



عبد الكريم محمد باقر الشماع

الميكانيكا الهندسية - استاتيكا

حلول 300 مسألة من مسائل ج. ل. مريام

مسئلة من مسائل ج. ل. مريام
حلول 300

الشماع

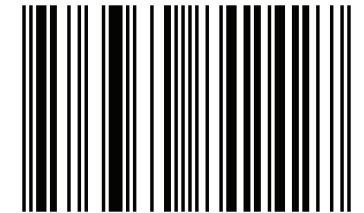
الميكانيكا الهندسية - استاتيكا

دراسة علم الاستاتيكا يعتبر هو المدخل والبداية لدراسة بقية العلوم في كليات الهندسة والحلقة الاولى التي تعتمد عليها بقية الحلقات الدراسية . دراسة فصول علم الاستاتيكا وفهمها جيدا , لابد ان يقرن بكثرة حل الاسئلة التي تعتبر المفتاح الرئيسي لفهم طبيعة وفلسفة هذا العلم. بدون حل المزيد من الاسئلة تبقى تلك المادة وهذا العلم من اعقد ما يواجه الطالب في بداية دراسته في كليات الهندسة. من اجل ذلك تم في هذا الكتاب حل 300 مسألة من المسائل المذكورة في الكتاب الموسوم (الميكانيكا الهندسية - استاتيكا) لمؤلفه ج. ل. مريام من منشورات دار الكتب الاردني, حيث يعتبر من اهم المصادر المنهجية العلمية والعالمية المعتبرة لتدريس مادة الاستاتيكا في اغلب الجامعات, وترجمته الى اللغة العربية هو دليل واضح على اهميته لان اساس تأليفه كان باللغة الانكليزية . وضع في اعداد هذا الكتاب خلاصة خبرة تدريس لمادة الاستاتيكا على مدى 15 سنة في اغلب جامعات الدول العربية. لوحظ أن محتوى الكتاب يستفاد منه شريحة كبيرة من طلبة المرحلة الاولى والثانية في كليات الهندسة خصوصا طلبة الهندسة المدنية والميكانيكية اضافة الى بعض تخصصات كليات العلوم. الوحدات القياسية التي يتناولها الكتاب هي الوحدات الدولية بنظام SI.

بكلوريوس هندسة بناء, الجامعة التكنولوجية, العراق, 1982 ماجستير
هندسة مدنية, الجامعة الاردنية, الاردن, 1996 محاضر في المعهد
الفي, النجف, العراق بين 1986-1993 محاضر في الجامعة الأردنية,
الاردن بين 1993-1996 محاضر في جامعه 7 اكتوبر, مصراته, ليبيا
بين 1996-2011 محاضر في كلية التخطيط العمراني, جامعه الكوفة,
العراق 2011 ولحد الان



NOOR
PUBLISHING



978-3-330-84242-7

عبد الكريم محمد باقر الشماع

الميكانيكا الهندسية - استاتيكا

عبد الكريم محمد باقر الشماع

الميكانيكا الهندسية - استاتيكا

حلول 300 مسألة من مسائل ج. ل. مريام

Noor Publishing

Impressum

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Alle in diesem Buch genannten Marken und Produktnamen unterliegen warenzeichen-, marken- oder patentrechtlichem Schutz bzw. sind Warenzeichen oder eingetragene Warenzeichen der jeweiligen Inhaber. Die Wiedergabe von Marken, Produktnamen, Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen u.s.w. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

البيانات القانونية

معلومات بليوجرافية للمكتبة الوطنية الألمانية : المكتبة الوطنية الألمانية تسجل هذا تفاصيل البيانات: <http://dnb.d-nb.de> المنشور في البليوجرافيا الوطنية الألمانية البليوجرافية موجودة على شبكة الإنترنت تحت الموقع التالي جميع العلامات التجارية والمنتجات المستخدمة في هذا الكتاب تخضع لقانون براءة اختراع ،وهي علامات تجارية مسجلة لأصحابها. استنساخ الأسماء التجارية، أسماء المنتجات ،أسماء مشتركة في هذا المنشور ،حتى من دون وضع العلامات الخاصة لا يعني أن هذه الأسماء هي معفاة من التشريعات التجارية لحماية العلامة ،وبالتالي يمكن استخدامها من طرف أي شخص.

صورة الغلاف / Coverbild

www.ingimage.com

دار النشر / Verlag

Noor Publishing

ist ein Imprint der / is a trademark of

OmniScriptum GmbH & Co. KG

Bahnhofstraße 28, 66111 Saarbrücken, Deutschland / Germany

البريد الإلكتروني / Email

info@omniscryptum.com

Herstellung: siehe letzte Seite /

طبع :انظر آخر صفحة

رقم دولي معياري للكتاب / ISBN:

978-3-330-84242-7

Copyright © عبد الكريم محمد باقر الشماع

Copyright / t © حقوق التأليف و النشر

2016 OmniScriptum GmbH & Co. KG

. جميع الحقوق محفوظة. / Alle Rechte vorbehalten.

Saarbrücken 2016

الميكانيكا الهندسية - إحصائيات

حلول 300 مسألة من مسائل ج.ل. مريام

عبد الكريم محمد باقر الشماخ

قال رسول الله صلى الله عليه وآله وسلم

أُغْتَنِمَ خَمْساً قَبْلَ خَمْسٍ

شبابك قبل هرمك

صحتك قبل سقمك

غنالك قبل فقرك

فراغك قبل شغلك

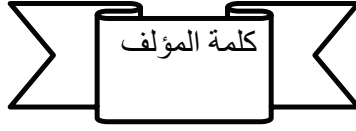
حياتك قبل موتك

صدق رسول الله (ص)

الإهداء

إلى نهرينا دجلة والفرات
إلى جبالنا .. سهولنا ... أهوارنا .. بحرنا .. بحيرتنا .. صحراءنا
إلى بلد بابل... سومر ... أكد .. آشور
إلى بلد أنبياءنا .. آدم .. نوح .. هود .. صالح .. يونس.. ذي الكفل
إلى بلسم جراحنا وربيع قلوبنا وكرامتنا الحسين بن علي عليهما السلام

إلى عراقنا الحبيب



من خلال تدريسنا لمادة علم السكون (إستاتيكا) في بعض الكليات الهندسية في العراق وفي بعض الدول العربية لاحظت مدى حاجة الطالب للمساعدة في فهم طبيعة هذه المادة خصوصاً إذا ما عرفنا أن تلك المادة تعتبر من مبادئ العلوم الأساسية لطلبة كليات العلوم وكليات الهندسة وخصوصاً طلبة الهندسة المدنية والميكانيكية. وحيث أن فلسفة علم الاستاتيكا يقوم على كثرة حل المسائل، لذا فأني أرى من واجبي الإنساني والعلمي والاخلاقي أن أضع خبرة تدريسي في هذه المادة أمام يد مَنْ يبحث عن الإلمام والمعرفة بهذا العلم.

ألفتُ عناية الطالب الكريم إلى أن جميع المسائل التي تم إيجاد الحلول لها هي من المصدر العلمي الموسوم (الميكانيكا الهندسية- الاستاتيكا) لمؤلفه ج. ل . ميريام من منشورات مركز الكتب الأردني وهو المصدر الرئيسي المعتمد في بعض الدول العربية لتدريس مادة الاستاتيكا في الكليات الهندسية. لذا أرجو من القارئ قبل الدخول في كيفية حل المسائل الرجوع إلى هذا المصدر لما فيه من معلومات ومقدمات علمية تؤهل الطالب لفهم كيفية حل المسائل، وقد تم اعتماد ترقيم الاسئلة المحولة حسب ارقامها في المصدر المذكور.

أملّي أن يكون الجهد الذي وضع في هذا الكتاب ينصب في خدمة مسيرتنا العلمية والفوز برضى الله ورسوله. اللهم تقبل عملنا هذا بأحسن قبول وأجعله في ميزان حسناتنا يوم لا ظل إلا ظلك بحق محمد وآل بيته الطيبين الطاهرين.

الحمد لله رب العالمين عدد الرمل والحصى.

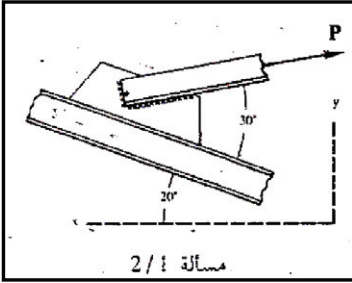
.....المؤلف 

فهرس المحتويات

الفصل	اسم الفصل	رقم الصفحة
1	حلول مسائل القوى ذات البعدين	1
2	حلول مسائل عزم القوى ذات البعدين	19
3	حلول مسائل عزم الازدواج	35
4	حلول مسائل محصلة القوى ذات البعدين	45
5	حلول مسائل تحليل القوى ذات الثلاث أبعاد	63
6	حلول مسائل عزم القوى الثلاثية الأبعاد	75
7	حلول مسائل محصلة القوى الثلاثية الأبعاد	94
8	حلول مسائل الاتزان للقوى الثنائية الأبعاد	104
9	حلول مسائل الاتزان للقوى الثلاثية الأبعاد	138
10	حلول مسائل تحليل المسنمات بطريقة المفاصل	160
11	حلول مسائل تحليل المسنمات بطريقة المقاطع	180
12	حلول مسائل المركز الهندسي للمساحات بطريقة التكامل	195
13	حلول مسائل المركز الهندسي للمساحات بطريقة الأشكال الهندسية	209
14	حلول مسائل رسم مخطط قوى القص وعزم الانحناء	220
15	حلول مسائل قوة الاحتكاك	255
16	حلول مسائل السيور اللينة	290
17	حلول مسائل عزم القصور الذاتي بطريقة التكامل	301
18	حلول مسائل القصور الذاتي بطريقة الأشكال الهندسية	316

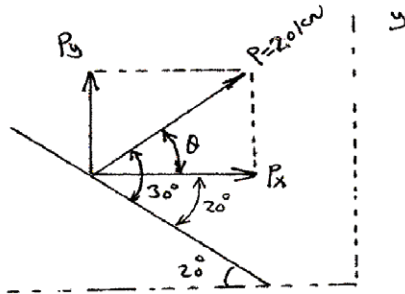
الفصل الاول

حلول مسائل تحليل القوة ذات البعدين



2/1 احسب مركبات القوة P والمؤثرة على العارضة في الاتجاه x والاتجاه y إذا كانت قيمتها 20 KN.

الحل:-



$$\theta = 30^\circ - 20^\circ = 10^\circ$$

$$\cos \theta = \frac{P_x}{P} \Rightarrow P_x = 20 \cos 10 = 19.7 \text{ KN}$$

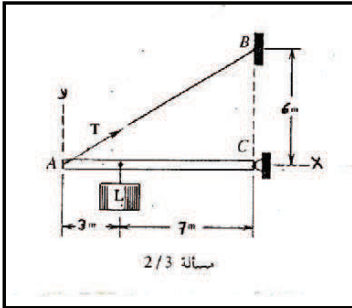
$$\sin \theta = \frac{P_y}{P} \Rightarrow P_y = 20 \sin 10 = 3.47 \text{ KN}$$

يمكن الإشارة إلى القوة P بقيمتها المتجهة تبعاً لما يأتي:-

$$\vec{P} = P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j}$$

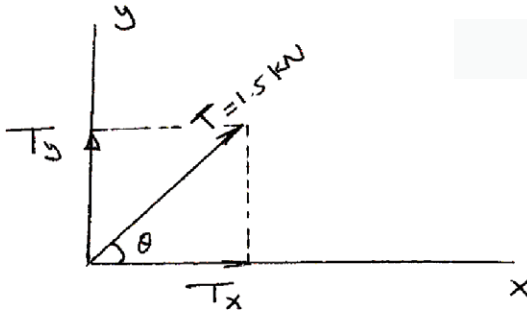
$$\vec{P} = -19.7\mathbf{i} + 3.47\mathbf{j}$$

الإشارة السالبة تشير إلى أن اتجاه المركبة P_x هو بعكس اتجاه المحور x المشار إليه في المسألة.



2/3 إذا كان الثقل L على بعد 7m من نقطة الارتكاز C عندئذ يساوي الشد T في الكبل 15 kN . عبر عن T بمعادلة متجهة وباستخدام وحدة المتجهات i, j

الحل



$$\tan \theta = \frac{6}{3+7}$$

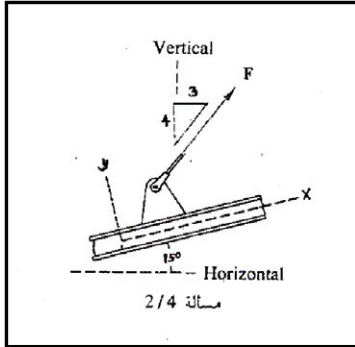
$$\theta = \tan^{-1} \frac{6}{10} = 31^\circ$$

$$\cos \theta = \frac{T_x}{T} \Rightarrow T_x = 15 \cos 31 = 12.86 \text{ KN}$$

$$\sin \theta = \frac{T_y}{T} \Rightarrow T_y = 15 \sin 31 = 7.72 \text{ KN}$$

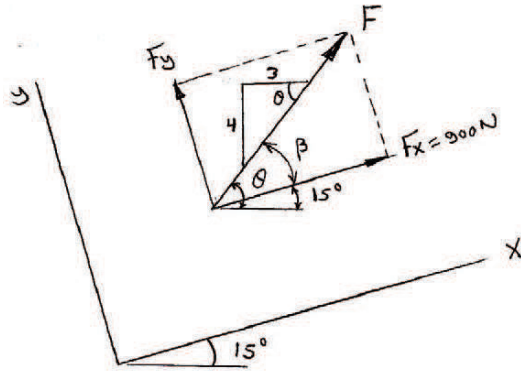
$$\bar{T} = T_x i + T_y j$$

$$\bar{T} = 12.86i + 7.72j$$



2/4 يؤثر الكيبل على الحامل بقوة شد F . فإذا كانت قيمة المركبة في اتجاه x لهذا الشد تساوي 900 N . أحسب قيمة المركبة في اتجاه y وكذلك القوة F .

الحل:-



$$\tan \theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53.13^\circ$$

لاحظ أن زوايا (θ) متساوية بالتناظر.

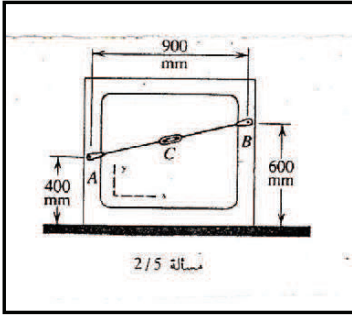
$$\therefore \beta = 53.13 - 15 = 38.13^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{F_x}{F}$$

$$\therefore F = \frac{900}{\cos 38.13} = 1144 \text{ N}$$

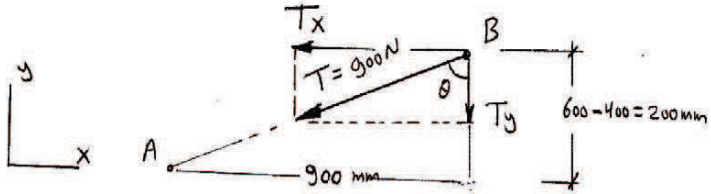
$$\tan 38.13 = \frac{F_y}{F_x}$$

$$\therefore F_y = 900 \tan 38.13 = 706.45 \text{ kN}$$



2/5 أديرت عجلة الشد C إلى أن أصبح الكيبل الخفيف الممتد عرض الهيكل بحالة شد قيمته 900N . احسب قيمة المركبتين x ، y للقوة المسلطة على الهيكل في نقطة B من قبل الكيبل.

الحل:



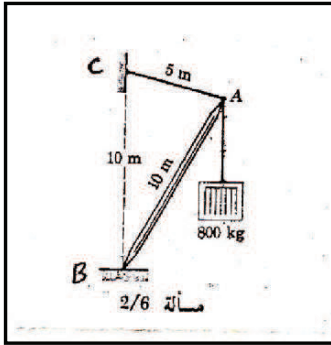
$$\tan \theta = \frac{900}{200} \Rightarrow \theta = 77.47$$

$$\cos 77.47 = \frac{T_y}{900} \Rightarrow T_y = 195.25 \text{ N}$$

$$\sin 77.47 = \frac{T_x}{900} \Rightarrow T_x = 879 \text{ N}$$

$$\bar{T} = T_x i + T_y j$$

$$\bar{T} = -879i - 195.25j$$



2/6 يساوي الشد T في الكيبل العمودي وزن الحمولة. أحسب قيمة المركبتين T_n و T_t للشد على امتداد وعمودياً على الذراع على التوالي والمسقط على الذراع في النقطة A بواسطة الحمولة.

الحل:

في المسألة معطي كتلة الجسم لذا لكي تحول الكتلة إلى قوة مقاسه بالنيوتن يجب ضربها بالعجلة الأرضية (9.81 m/sec^2) . حسب قانون نيوتن الثاني.

$$W = 800 (9.81) = 7848 \text{ N}$$

لاحظ أن زوايا (θ) متساوية بالتناظر .

وبتطبيق قانون الـ (Cosine) على المثلث (ABC) يمكن الحصول على قيمة الزاوية (θ) .

$$5^2 = 10^2 + 10^2 - 2(10)(10)\cos(\theta)$$

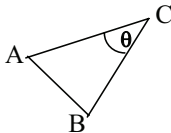
$$\theta = 28.95^\circ$$

$$\cos 28.95 = \frac{T_t}{7848} \Rightarrow T_t = 6867 \text{ N}$$

$$\sin 28.95 = \frac{T_n}{7848} \Rightarrow T_n = 3798.8 \text{ N}$$

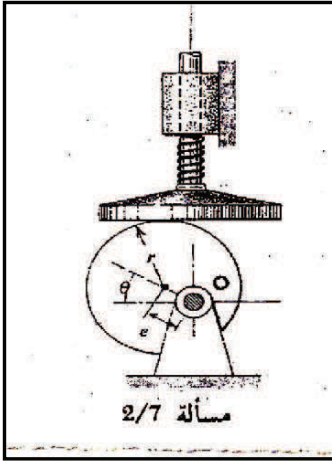
ملاحظة: قانون الـ (cosine) يطبق على أي مثلث سواء كانت أضلاع المثلث عبارة عن قوى أو أبعاد. فلو كان المثلث تبعاً لما هو عليه في الشكل المجاور فأن قانون الـ (cosine)

يطبق عليه كما يلي:-



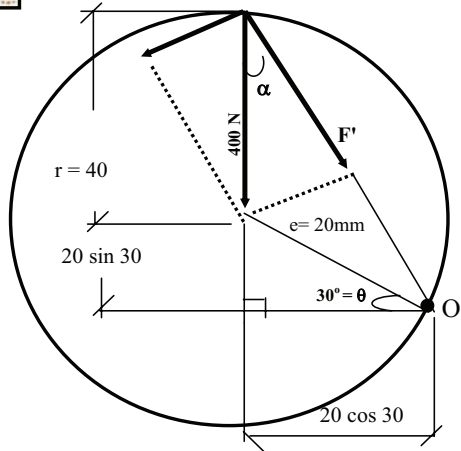
$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2(CA)(CB)\cos\theta$$

وتبعاً لذلك تم تطبيقه على المثال أعلاه.



2/7 للحدبة (العقدة، الكامنة) الدائرة إزاحة
 $e=20\text{mm}$ ونصف قطر $r=40\text{mm}$ إذا كان
 يسلط سطح المكبس الأسفل والأملس قوة 400
 N على العقدة ، عمودية على الأسطح
 المتلامسة باتجاه الأسفل عندما تكون الزاوية
 $\theta=30^\circ$. أحسب المركبة العمودي F' لهذه
 القوة على امتداد الخط الذي يصل نقطة
 التلامس ومركز العمود (المحور) الذي يدير
 العقدة.

الحل:

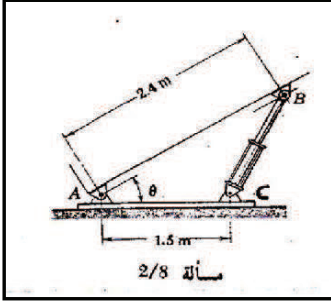


$$\tan \alpha = \frac{20 \cos 30}{40 + 20 \sin 30} = 0.346$$

$$\alpha = 19.1^\circ$$

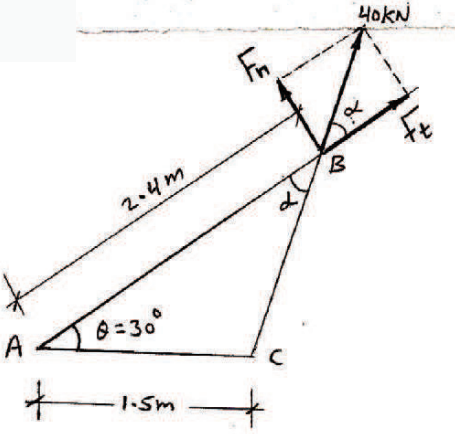
$$\cos 19.1 = \frac{F'}{400}$$

$$F' = 400 \cos 19.1 = 378 \text{ N}$$



2/8 تسلط الأسطوانة الهيدروليكية قوة مقدارها 40kN في اتجاه محورها على الثقل الذي ترفعه. أوجد المركبتين F_t و F_n العمودية والمماسية لـ AB للوضع $\theta = 30^\circ$.

الحل:



يمكن تحليل القوة 40 kN في أي مكان يقع على خط عملها.

بتطبيق قانون الـ (cosine) على المثلث ABC نحصل على قيمة الضلع (BC):

$$BC^2 = 1.5^2 + 2.4^2 - 2(1.5)(2.4) \cos 30^\circ$$

$$BC = 1.33 \text{ m}$$

بتطبيق قانون الـ (sine) أو قاعدة لامي على المثلث ABC نحصل على قيمة الزاوية (α) :

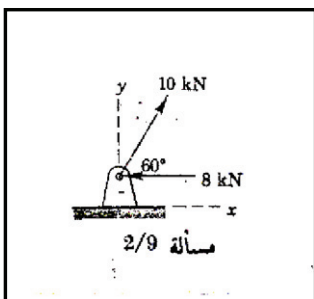
$$\frac{BC}{\sin \theta} = \frac{AC}{\sin \alpha}$$

$$\frac{1.33}{\sin 30^\circ} = \frac{1.5}{\sin \alpha} \Rightarrow \alpha = 34.32^\circ$$

$$F_t = 40 \cos 34.22 = 33 \text{ KN}$$

$$F_n = 40 \sin 34.32 = 22.55 \text{ KN}$$

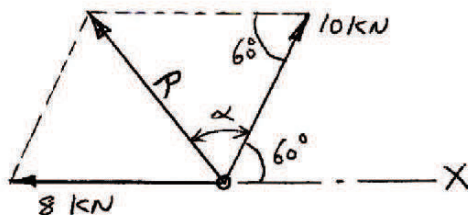
ملاحظة: يمكن تحليل القوة في أي مكان شرط أن يكون المكان على نفس خط عمل القوة.



2/9 احسب قيمة القوة الوحيدة R والتي تعادل
القوتين الموضحتين بالشكل وأوجد قيمة θ
المقاسة بعكس الساعة من الإحداثي x
الموجب إلى R.

الحل:

R تعني القوة المحصلة لتأثير القوتين 10 kN ،
8kN وبتطبيق قانون الـ (cosine) يمكن الحصول
عليها:-



$$R^2 = 10^2 + 8^2 - 2(10)(8) \cos 60^\circ$$

$$R = 9.17 \text{ kN}$$

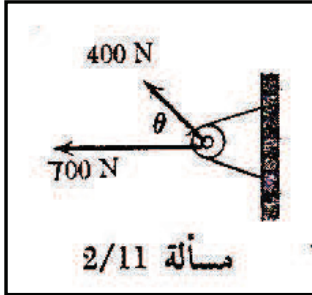
وللتعرف على الزاوية (θ) المطلوبة في المسألة يجب حساب الزاوية (α) بتطبيق قانون الـ

-(sine)

$$\frac{9.17}{\sin 60} = \frac{8}{\sin \alpha}$$

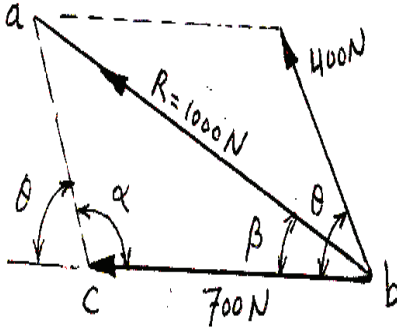
$$\alpha = 49.07^\circ$$

$$\therefore \theta = 49.07 + 60^\circ \cong 109.1^\circ$$



2/11 بأي زاوية θ تسلط القوة 400-N لكي تساوي
محصلة القوتين $R=1000$ N ؟ ما هي قيمة
الزاوية β المحصورة بين R والخط الأفقي في
هذه الحالة؟

الحل:



بتطبيق قانون الـ (cosine) على
المثلث abc نحصل على قيمة الزاوية
 $-(\alpha)$

$$1000^2 = 700^2 + 400^2 - 2(700)(400)\cos \alpha$$

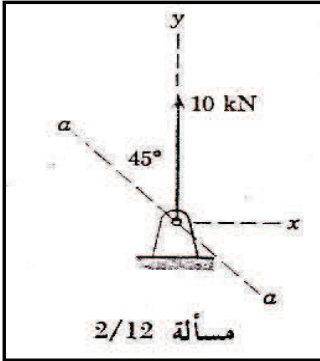
$$\alpha = 128.68^\circ$$

$$\therefore \theta = 180^\circ - 128.68 = 51.3^\circ$$

بتطبيق قانون الـ (sine) على المثلث (abc) نحصل على قيمة الزاوية (β) :-

$$\frac{400}{\sin \beta} = \frac{1000}{\sin 128.68}$$

$$\beta = 18.2^\circ$$



2/12 تحل القوة 10kN محل كل من القوة F_1 التي باتجاه الخط a-a وبزاوية 45° والقوة F_2 التي قيمتها 8kN. أحسب قيمة F_1 ، والزاوية θ المحصورة بين F_2 ومحور x- عكس عقرب الساعة.

الحل:

$$8^2 = F_1^2 + 10^2 - 2(10)F_1 \cos 45$$

$$F_1^2 - 14.14F_1 + 36 = 0$$

وبحل المعادلة يلاحظ هنالك قيمتين إلى

القوة F_1 هما :-

$$F_1 = 10.81 \text{ kN} , F_1 = 3.33 \text{ kN}$$

فإذا كانت قيمة $(F_1 = 10.81 \text{ kN})$ فإن

الزاوية α قيمتها :-

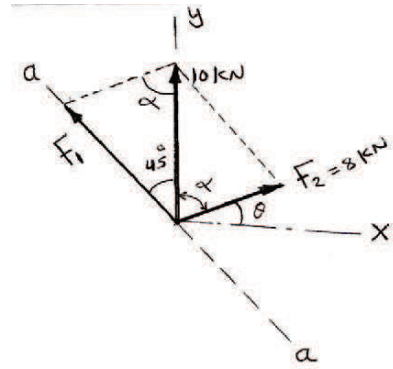
$$\frac{10.81}{\sin \alpha} = \frac{8}{\sin 45} \Rightarrow \alpha = 72.838^\circ$$

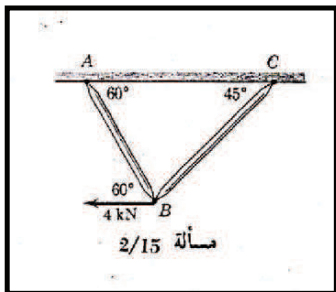
$$\therefore \theta = 90 - 72.838 = 17.16^\circ$$

وإذا كانت قيمة $(F_1 = 3.33 \text{ kN})$ فإن الزاوية قيمتها :-

$$\frac{3.33}{\sin \alpha} = \frac{8}{\sin 45} \Rightarrow \alpha = 17.11^\circ$$

$$\therefore \theta = 90 - 17.11 = 72.88^\circ$$



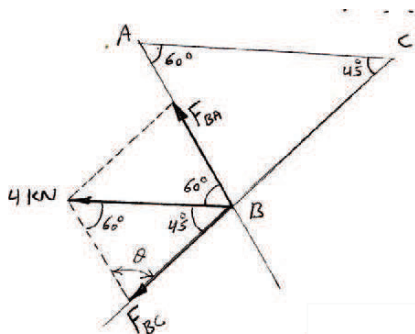


2/15 حلل القوة 4 kN إلى مركبتين إحداهما في

اتجاه AB والثانية على امتداد BC.

الحل: يمكن اعتبار القضيبتين هما المحوران اللذان

مطلوب تحليل القوة (4 kN) باتجاههما.



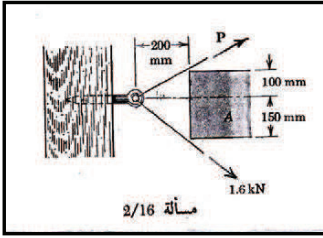
$$\theta = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$$

$$\frac{4}{\sin 75} = \frac{F_{BC}}{\sin 60}$$

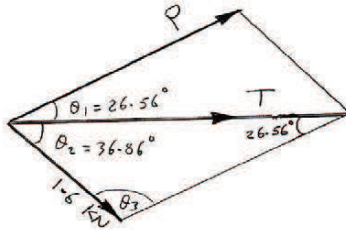
$$F_{BC} = 3.59 \text{ kN}$$

$$\frac{4}{\sin 75} = \frac{F_{BA}}{\sin 45}$$

$$F_{BA} = 2.93 \text{ kN}$$



2/16 المطلوب إزالة المسمار من قطعة الخشب بتسليط قوة على امتداد محوره الأفقي ونظراً لوجود العائق A لا نستطيع القيام بذلك، عليه يمكننا استخدام قوتين إحداهما 1.6 kN والثانية P بواسطة الكوابل كما موضح بالشكل. أحسب مقدار P اللازمة لتوليد الشد T على امتداد محور المسمار، وأوجد مقداره.



قيمة الزاوية θ_1 بين خط الأفق والقوة P هي:-

$$\tan \theta_1 = \frac{100}{200} \Rightarrow \theta_1 = 26.56^\circ$$

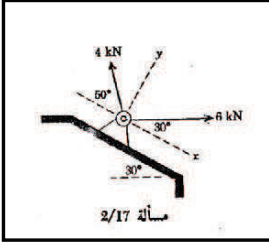
قيمة الزاوية θ_2 بين خط الأفق والقوة 1.6 kN هي:-

$$\tan \theta_2 = \frac{150}{200} \Rightarrow \theta_2 = 36.86^\circ$$

$$\theta_3 = 180 - 26.56 - 36.86 = 116.58^\circ$$

$$\frac{P}{\sin 36.86} = \frac{1.6}{\sin 26.56} \Rightarrow T = 2.14 \text{ kN}$$

$$\frac{T}{\sin 116.58} = \frac{1.6}{\sin 26.56} \Rightarrow T = 3.20 \text{ kN}$$



2/17 استبدلت القوتين 6 kN و 4 kN بقوة واحدة R تكافئهما ، وعبر عنهما بمعادلة اتجاهية بدلالة وحدة المتجهات في الاتجاهين (y,x). احسب قيمة الزاوية θ المحصورة بين R والمحور x.

الحل:

$$\alpha = 30^\circ + 50^\circ = 80^\circ \quad (\text{بالتبادل})$$

$$R^2 = 6^2 + 4^2 - 2(6)(4)\cos 80^\circ$$

$$R = 6.6 \text{ kN}$$

$$\frac{6.60}{\sin 80^\circ} = \frac{4}{\sin \beta} \Rightarrow \beta = 36.64^\circ$$

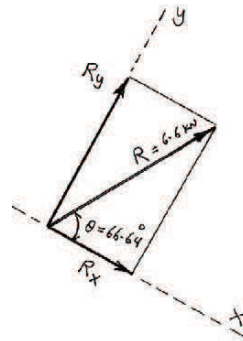
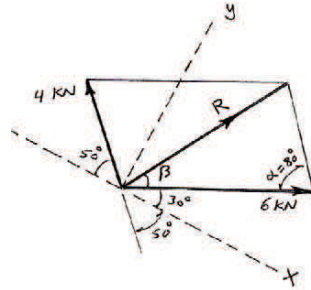
$$\therefore \theta = 30^\circ + \beta = 30^\circ + 36.64^\circ = 66.64^\circ$$

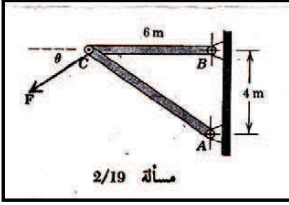
المعادلة الاتجاهية للقوة المحصلة R هي:-

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$$

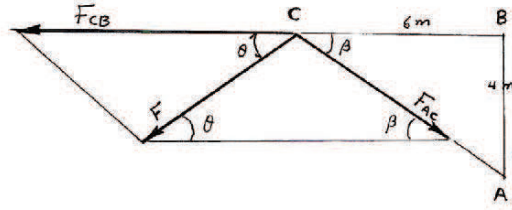
$$\vec{R} = (6.6 \cos 66.64^\circ) \vec{i} + (6.6 \sin 66.64^\circ) \vec{j}$$

$$\vec{R} = 2.62 \vec{i} + 6.06 \vec{j}$$





2/19 ماهي أكبر قيمة للزاوية θ لتعيين اتجاه القوة F بحيث لا تزيد قيمة مركبتها على امتداد CA عن 80% من قيمة مركبتها على امتداد BC .



يمكن اعتبار القوة المحصلة F هي القوة المطلوب تحليلها باتجاه المحورين AC , BC طبقاً لما هو عليه في الشكل المجاور. حيث: -

$$F_{AC} = 0.80 F_{BC}$$

$$\tan \beta = \frac{4}{6} \Rightarrow \beta = 33.69^\circ$$

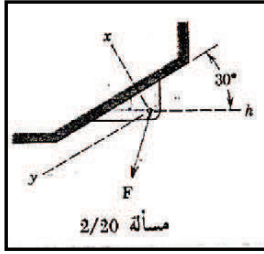
$$F^2 = F_{AC}^2 + F_{BC}^2 - 2F_{AC}F_{BC} \cos \beta$$

$$F^2 = (0.80F_{BC})^2 + F_{BC}^2 - 2(0.8F_{BC})F_{BC} \cos 33.69$$

$$F = 0.555 F_{BC}$$

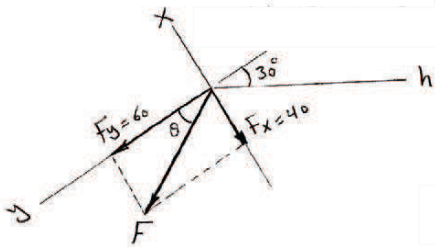
$$\frac{F}{\sin \beta} = \frac{F_{AC}}{\sin \theta}$$

$$\frac{0.55F_{BC}}{\sin 33.69} = \frac{0.8F_{BC}}{\sin \theta} \Rightarrow \theta = 53.08^\circ$$



2/20 إذا استبدلنا القوة $F = -40i + 60j$ N بقوتين أحدهما باتجاه المحور y والثانية باتجاه الأفقي h بحيث يكون لهما نفس تأثير F . أوجد قيم كل منهما.

الحل: من خلال القيمة الاتجاهية للقوة F يبدو أن مركبات القوة F_x ، F_y هي كما موضحة في الشكل المجاور. حيث أن القيمة العددية للقوة F



بمقدار:-

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

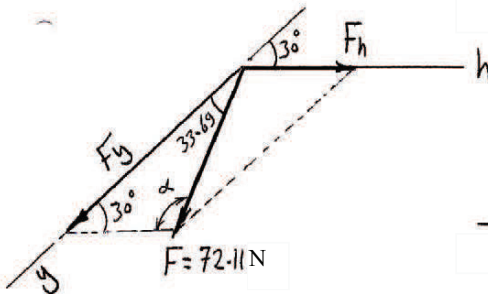
$$F = \sqrt{40^2 + 60^2}$$

$$F = 72.11 \text{ N}$$

بعد إيجاد قيمة الزاوية θ يمكن الرجوع مرة أخرى لتحليل القوة F باتجاه y ، h :-

$$\tan \theta = \frac{40}{60} \Rightarrow \theta = 33.69^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 30^\circ - 33.69^\circ = 116.31^\circ$$



$$\frac{F_y}{\sin 116.31} = \frac{72.11}{\sin 30}$$

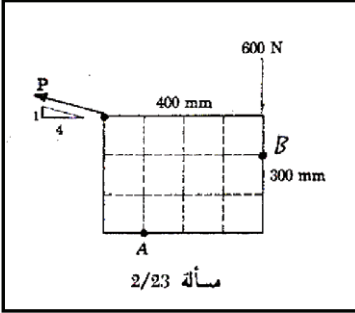
$$F_y = 129.28 \text{ N}$$

$$\frac{F_h}{\sin 33.69} = \frac{72.11}{\sin 30}$$

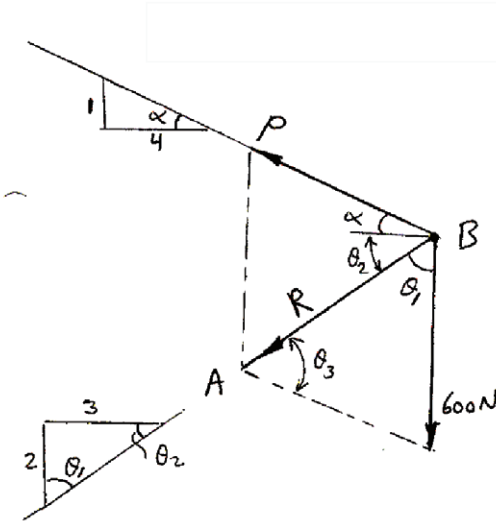
$$F_h = 80 \text{ N}$$

2/23 إذا علمنا أن محصلة القوتين تمر من نقطة

A . أوجد قيمة القوة P.



الجواب: من خلال ميلان القوة P والأبعاد يمكن ملاحظة أن خط عمل القوة P يصل إلى نقطة B. ومن نقطة B يمكن رسم القوة المحصلة ومركباتها كما هو عليه في الشكل المجاور.



$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 56.31^\circ$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 14^\circ$$

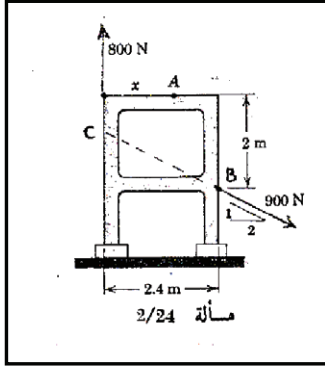
$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33.69^\circ$$

$$\therefore \theta_3 = \alpha + \theta_2 = 47.69^\circ$$

$$\frac{P}{\sin \theta_1} = \frac{600}{\sin \theta_3}$$

$$\frac{P}{\sin 56.31} = \frac{600}{\sin 47.69}$$

$$P = 675 \text{ N}$$



2/24 المطلوب استبدال القوتين اللتين تؤثران على الهيكل بقوة مكافئة واحدة R في نقطة A. أوجد قيمة R والمسافة x إلى نقطة A. حل إما بطريقة الرسم البياني أو باستخدام المعادلات الجبرية.

الحل باستخدام المعادلات الجبرية يلاحظ أن خط عمل

القوة (900N) يصل النقطة (c). من نقطة (c)

يمكن رسم القوة المحصلة التي تمر بالنقطة A ومركباتها تبعاً لما هو عليه في الشكل المجاور.

$$\tan \theta = \frac{2}{1}$$

$$\theta = 63.43^\circ$$

$$R^2 = 900^2 + 800^2 - 2(900)(800)\cos 63.43$$

$$R = 898 \text{ N}$$

ولغرض التعرف على قيمة x نعمل الآتي:-

$$\tan \theta = \frac{2.4}{y_1}$$

$$y_1 = \frac{2.4}{\tan 63.43} = 1.2$$

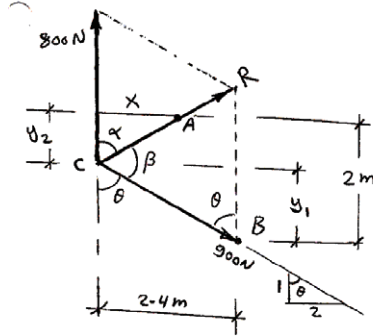
$$\therefore y_2 = 2 - 1.2 = 0.8 \text{ m}$$

$$\frac{800}{\sin \beta} = \frac{898}{\sin 63.43} \Rightarrow \beta = 52.82^\circ$$

$$\therefore \alpha = 180^\circ - 52.82^\circ - 63.43^\circ = 63.75^\circ$$

$$\tan \alpha = \frac{x}{y_2}$$

$$x = 0.8 \tan 63.75 = 1.62 \text{ m}$$

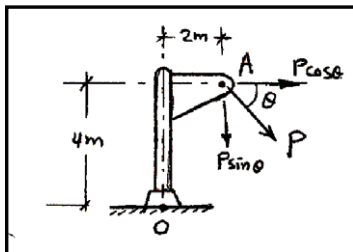


الفصل الثاني

حلول مسائل
عزم القوى ذات البعدين

2/25 أحسب قيمة أصغر قوة P في المثال 2/3 بحيث إذا سلطت على النقطة A تنتج نفس العزم حول نقطة O الذي تنتجه القوة 600N . وأوجد قيمة الزاوية θ المحصورة بين P وخط

الأفق.



الحل: بعد مراجعة المثال (2/3) من كتاب (ميريام) يُلاحظ أن مقدار العزم حول (O) كان (2610 N.m) . يمكن إعادة رسم شكل المسألة كما هو عليه في الشكل المجاور .

بعد تحليل القوة P إلى مركباتها ، نحسب مجموع أو محصلة عزوم تلك المركبات حول النقطة (O) والذي مقدار (2610 N.m) مع عقرب الساعة. الرمز $(\sqrt{+} \Sigma M_0)$ الذي يستخدم في حل تلك المسائل يعني إيجاد مجموع أو محصلة عزوم القوى حول نقطة (O) على افتراض أن اتجاه عزم أي قوة تلف عكس عقرب الساعة يؤخذ موجب.

$$\sqrt{+} \Sigma M_0 = -P \cos \theta (4) - P \sin \theta (2)$$

$$-2610 = -P(4 \cos \theta + 2 \sin \theta)$$

$$\therefore P = \frac{2610}{4 \cos \theta + 2 \sin \theta} \dots\dots\dots(1)$$

المعادلة الأخيرة تمثل P بدلالة θ . ولمعرفة النهاية الصغرى لتلك الدالة نفاضل P بالنسبة للزاوية (θ) ومن ثم نجعل $\left(\frac{dP}{d\theta} = 0.0\right)$. راجع كيفية إيجاد النهايات العظمى والصغرى للدوال في كتب الرياضيات.

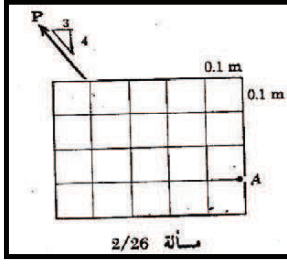
$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{(4 \cos \theta + 2 \sin \theta)(0.0) - 2610(-4 \sin \theta + 2 \cos \theta)}{(4 \cos \theta + 2 \sin \theta)^2}$$

$$0.0 = \frac{2610(4 \sin \theta - 2 \cos \theta)}{(4 \cos \theta + 2 \sin \theta)^2}$$

$$4 \sin \theta = 2 \cos \theta \Rightarrow \frac{4 \sin \theta}{4 \cos \theta} = \frac{2 \cos \theta}{4 \cos \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 26.6^\circ$$

وبتعويض قيمة θ في المعادلة (1) نحصل على قيمة: $P = 584 \text{ N}$



2/26 أحسب قيمة القوة P إذا كان مقدار عزمها حول نقطة A يساوي 30 N.m علماً بأن الصفيحة التي تعمل عليها القوة مقسمة إلى مربعات طول ضلع الواحد منها 0.1 m.

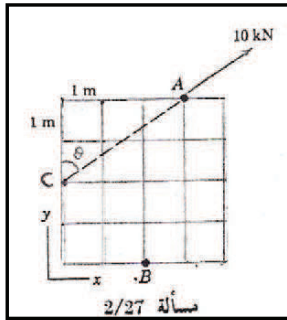
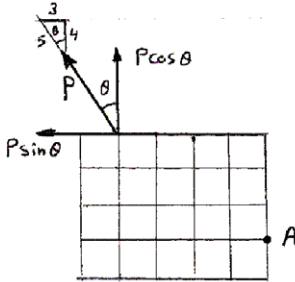
الحل:

$$\checkmark + \Sigma M_A = -P \cos \theta (0.4) + P \sin \theta (0.3)$$

$$-30 = -P \left(\frac{4}{5}\right)(0.4) + P \left(\frac{3}{5}\right)(0.3)$$

$$P = 214 \text{ N}$$

لأن عزم القوة P حول (A) يلف مع عقرب الساعة ، فقد سبق العزم (30 N.m) بإشارة سالبة.



2/27 الصفيحة المستطيلة الموضحة بالشكل مكونة من مربعات بطول ضلع 1-m . إذا سلطت القوة 10kN في النقطة A في الاتجاه الموضح بالشكل. أحسب عزم القوة M_B حول النقطة B.

الحل: يمكن إيجاد عزم القوة (10 kN) من خلال تحليل القوة إلى مركباتها في نقطة A أو في نقطة (C) لأن كلا النقطتين واقعتا على خط عمل القوة. فلو اخترنا التحليل في (C) فإن:-

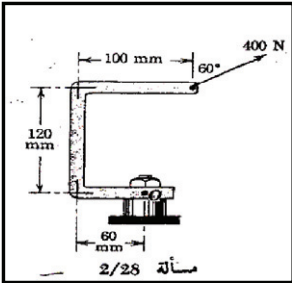
$$\tan \theta = \frac{3}{2} \Rightarrow \theta = 56.31^\circ$$

المركبة الأفقية للقوة (10 kN) هي بمقدار (10 sin 56.3).

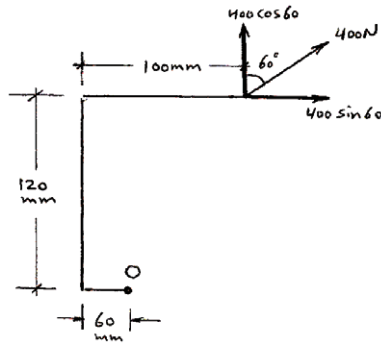
أما المركبة الرأسية فمقدارها (10 cos 56.31). عزمها حول نقطة B هو:

$$\checkmark + \Sigma M_B = -10 \sin 56.31(2) - 10 \cos 56.31(2) = -27.73 \text{ kN.m}$$

الإشارة السالبة تعني أن عزم القوة حول B يجعل الصفيحة تلف مع عقرب الساعة.

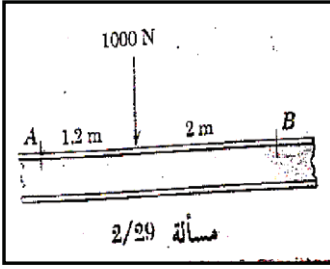


2/28 أحسب عزم القوة 400-N حول نقطة O.



الحل:

$$\begin{aligned}
 +\Sigma M_O &= 400 \cos 60 (100 - 60) - 400 \sin 60 (120) \\
 &= -33569 \text{ N}\cdot\text{mm}
 \end{aligned}$$

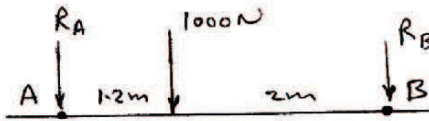


2/29 نرغب باستبدال القوة 1000-N العاملة على العارضة بقوتين باتجاه نحو الأسفل R_A من نقطة A و R_B من نقطة B. بدون أن نحدث أي تغيير للتأثير الخارجي الإجمالي على العارضة. أحسب قيمة هاتين القوتين.

الحل: عزم القوة 1000 N حول A يجب أن يساوي عزم R_B حول نفس النقطة وعليه:-

$$1000(1.2) = R_B(1+1.2)$$

$$R_B = 37N$$

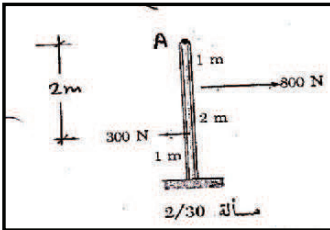


كذلك فإن عزم القوة 1000 N حول B يجب أن يساوي عزم R_A حول نفس النقطة:-

$$1000(2) = R_A(1.2+2)$$

$$R_A = 625N$$

لاحظ أن مجموع القوتين $R_A + R_B$ مساوي إلى (1000N).



2/30 أحسب المسافة y من رأس العارضة وبتجاه نحو الأسفل للقوة P المؤثرة على العارضة والتي تحل محل كل من القوتين الموضحتين بالشكل.

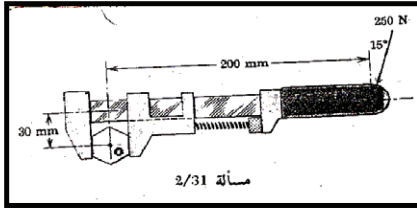
الحل: إيجاد المسافة (y) يكون من خلال معرفتنا أن العزم الذي تحدثه القوى عند رأس العارضة يفترض أن يكون مساوي للعزم الذي تحدثه القوة P عند رأس العارضة.

$$P = 800 - 300 = 500N$$

$$\curvearrowright + \Sigma M_A = 800(1) - 300(2) = 200$$

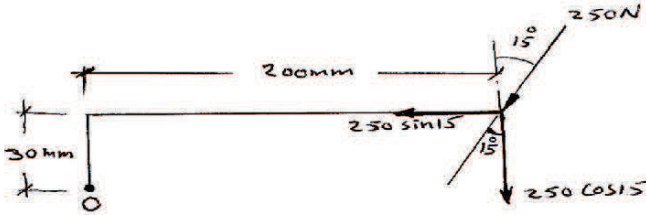
$$Py = \Sigma M_A$$

$$y = \frac{200}{500} = 0.4 \text{ m}$$

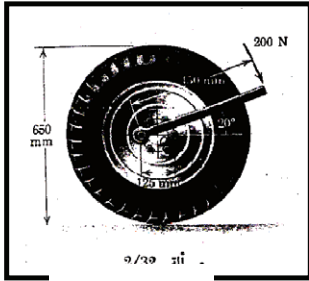


2/31 أحسب عزم القوة 250N والمؤثرة على ذراع مفتاح الربط حول مركز المسامير الملولب.

الحل:



$$\begin{aligned}\check{+} \Sigma M_O &= -250 \cos 15 (200) + 250 \sin 15 (30) \\ &= -46355 \text{ N} \cdot \text{mm}\end{aligned}$$

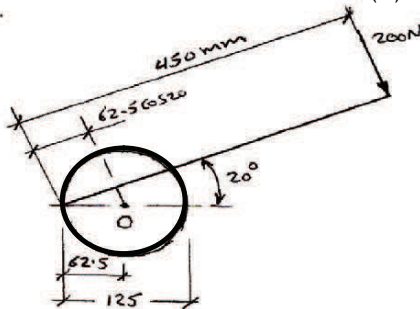


2/32 سلطت قوة مقدارها 200N في نهاية مفتاح ربط لشد مسامير الشفة (flange bolt) الذي يثبت العجلة في المحور . احسب قيمة العزم M الناتج من القوة المسلطة حول المركز O للعجلة موضع مفتاح الربط الموضح في الشكل.

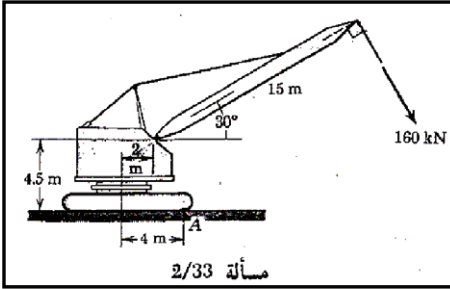
الحل: ذراع القوة (N) بالنسبة لنقطة (O)

هو $(450 - 62.5 \cos 20)$.

$$\begin{aligned}\check{+} \Sigma M_O &= -200(450 - 62.5 \cos 20) \\ &= -78254 \text{ N} \cdot \text{mm}\end{aligned}$$

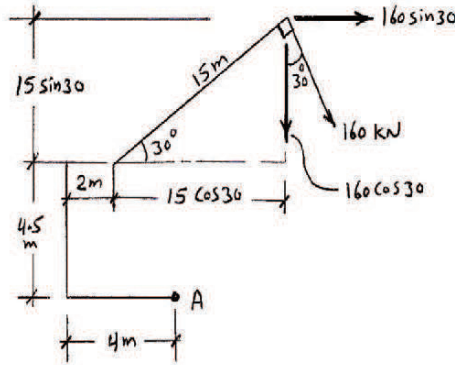


يمكن إعادة حل المسألة بتحليل القوة 200 N إلى ما يكافئها من مركباتها الأفقية والرأسية وضرب كل مركبة بذراعها حول نقطة (O).



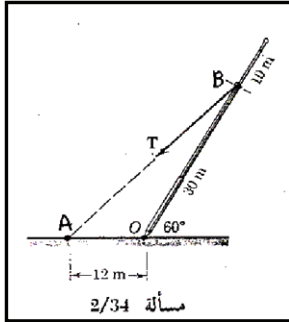
2/33 احسب العزم حول النقطة A الذي تطبقه قوة 160 kN عن طريق كابل لرافعة موضحة في الشكل.

الحل:



$$\sqrt{+} \Sigma M_A = -160 \cos 30 (2 + 15 \cos 30 - 4) - 160 \sin 30 (15 \sin 30 + 4.5)$$

$$\therefore \Sigma M_A = -2483 \text{ kN.m}$$



2/34 لرفع سارية علم من الوضع الموضح يجب أن يقدم الشد في الكبل عزمًا حول النقطة O قدره 72 N.m. أحسب قيمة T.

الحل:

لغرض التعرف على ذراع قوة الشد T المشار إليها بالرمز (d) ، من نقطة B نزل عمود يقطع إمتداد AO في نقطة ولتكن E . في المثلث OEB:

$$BE = 30 \sin 60$$

$$OE = 30 \cos 60$$

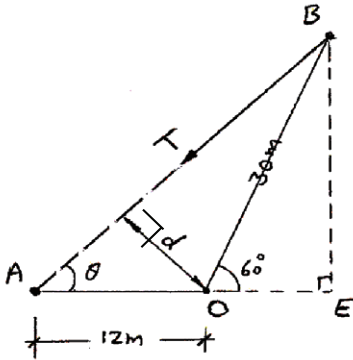
في المثلث القائم الزاوية AEB:

$$\tan \theta = \frac{30 \sin 60}{12 + 30 \cos 60}$$

$$\theta = 43.9^\circ$$

$$\sin \theta = \frac{d}{AO} \Rightarrow d = 12 \sin 43.9$$

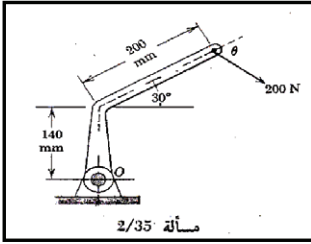
$$= 8.32 \text{ m}$$



$$\sum M_O = Td$$

$$72 = T(8.32) \Rightarrow T = 8.65 \text{ kN}$$

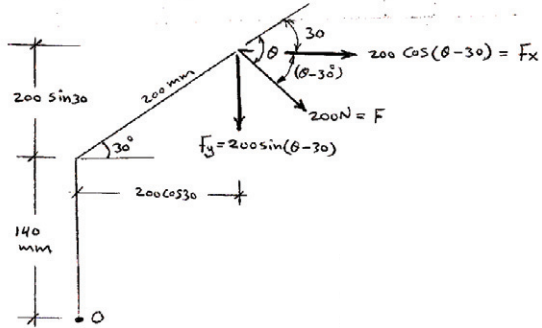
ملاحظة يمكن إيجاد T من خلال تحليلها إلى مركباتها باتجاه BO والمركبة الأخرى عمودية على BO . عزم المركبة باتجاه BO صفرًا لأنها تمر بالنقطة (O) بينما ذراع المركبة العمودية على BO سيكون 30 m. أو يمكن إيجاد T من خلال تحليلها إلى مركباتها باتجاه BE وبالاتجاه العمودي على BE للمركبة الأخرى. ذراع المركبة التي باتجاه BE سيكون بمقدار (BE= 30 sin 60) بينما ذراع المركبة العمودية على BE سيكون بمقدار (OE=30 cos 60).



2/35 احسب قيمة الزاوية θ التي تعطي أكبر قيمة للعض M_O الناتج من القوة 200-N حول محور العمود في نقطة O وأحسب قيمة M_O .

الحل:

يُلاحظ في الشكل المجاور أن القوة ($F=200$) تم تحليلها إلى مركباتها:-



$$F_x = 200 \cos(\theta - 30) \quad , \quad F_y = 200 \sin(\theta - 30)$$

وبمراجعة المتطابقات في المثلثات في كتب الرياضيات فأن:-

$$F_x = 200 \cos(\theta - 30) = 200(\cos 30^\circ \cos \theta + \sin \theta \sin 30)$$

$$F_x = 200(0.866 \cos \theta + 0.5 \sin \theta)$$

$$F_y = 200 \sin(\theta - 30) = 200(\sin \theta \cos 30 - \cos \theta \sin 30)$$

$$F_y = 200(0.866 \sin \theta - 0.5 \cos \theta)$$

$$\curvearrowright + \Sigma M_O = -F_y(200 \cos 30) - F_x(200 \sin 30 + 140)$$

$$\curvearrowright + \Sigma M_O = -34641(0.866 \sin \theta - 0.5 \cos \theta) - 48000(0.866 \cos \theta + 0.5 \sin \theta)$$

$$\curvearrowright + \Sigma M_O = -53999 \sin \theta - 24247.5 \cos \theta \quad \dots\dots\dots(1)$$

المعادلة (1) تُظهر أن ΣM_O هي دالة للزاوية θ . ولمعرفة النهاية العظمى لتلك الدالة

فاصل ΣM_O بالنسبة للزاوية (θ) ومن ثم نجعل $(\frac{d\Sigma M_O}{d\theta} = 0)$:

$$\left(\frac{d\Sigma M_O}{d\theta}\right) = -53999 \cos \theta + 24247.5 \sin \theta = 0.0$$

$$24247.5 \sin \theta = 53999 \cos \theta$$

وبقسمة طرفي المعادلة على $(24247.5 \cos \theta)$ فإن:-

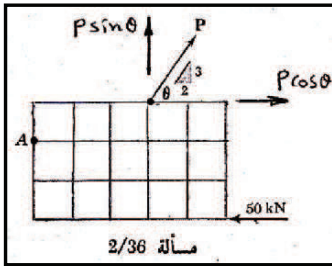
$$\tan \theta = \frac{53999}{24247.5}$$

$$\therefore \theta = 65.82^\circ$$

وبتعويض قيمة الزاوية θ في المعادلة (1) يمكن الحصول على اكبر عزم يمكن أن تسلمه القوة (200 N) حول نقطة (O).

$$+\sqrt{\Sigma M_O} = -53999 \sin 65.82 - 24247.5 \cos 65.82$$

$$+\sqrt{\Sigma M_O} = -59193 \text{ N.mm}$$



2/36 إذا كانت محصلة العزم في النقطة A للقوى 50 kN و P تساوي صفراً أوجد بالرسم البياني والمعادلات الجبرية قيمة P علماً بأن الصفيحة التي تعمل عليها القوى مقسمة إلى مربعات بطول ضلع 1m.

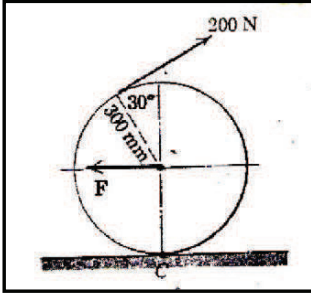
الحل: بالمعادلات الجبرية

$$\tan \theta = \frac{3}{2} \Rightarrow \theta = 56.31^\circ$$

$$+\sqrt{\Sigma M_A} = -50(2) - P \cos 56.31(1) + P \sin 56.31(3) = 0.0$$

$$1.941P = 100$$

$$\therefore P = 51.52 \text{ kN}$$

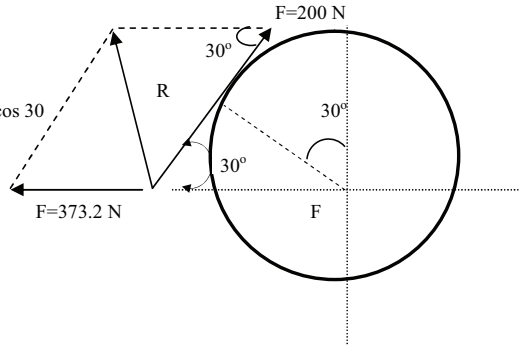
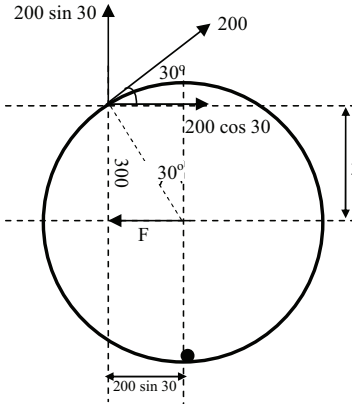


2/37 إذا كان عزم المحصلة حول C للقوتين صفراً.
أوجد قيمة المحصلة R.

الحل:

$$\begin{aligned} \checkmark + \Sigma M_O &= -200 \cos 30 (300 \cos 30 + 300) \\ &- 200 \sin 30 (300 \sin 30) \\ &+ F (300) = 0.0 \end{aligned}$$

$$\therefore F = 373.2 \text{ N}$$

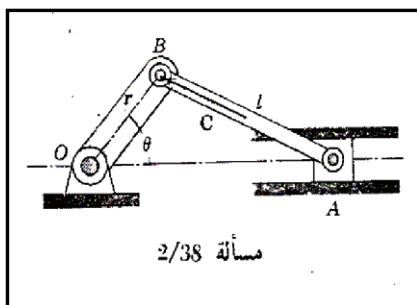


بتطبيق قانون الـ (cosine) يمكن الحصول على المحصلة (R):

$$R^2 = 200^2 + 373.2^2 - 2(200)(373.2) \cos 30$$

$$R = 223.6 \text{ N}$$

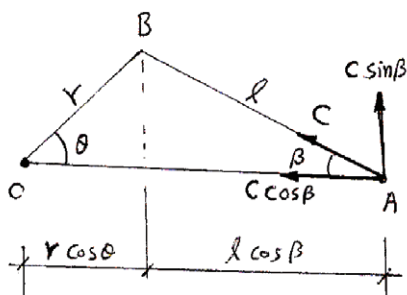
ملاحظة: لو حُلَّت المسألة بيانياً لظهر أن (R) تمر بالنقطة (C) ذلك لأن القوة F حُسبت على هذا الأساس. فعندما تمر R بالنقطة (C) سيكون عزمها عند (C) مساوي للصفر لأن ذراعها سيكون صفراً.



2/38 في آلة المنزلقة الموضحة في الشكل
للذراع الموصل AB طول l بسند قوة
ضغط متغيرة. اشتق معادلة عزم القوة
حول محور ذراع التدوير O (crank)
بدلالة l, r, C والزاوية المتغيرة θ .

الحل:

بتطبيق قانون الـ (sine) على المثلث
OBA نحصل على قيمة الزاوية (β)
والتي تمثل زاوية ميلان القوة (C).



$$\frac{l}{\sin \theta} = \frac{r}{\sin \beta}$$

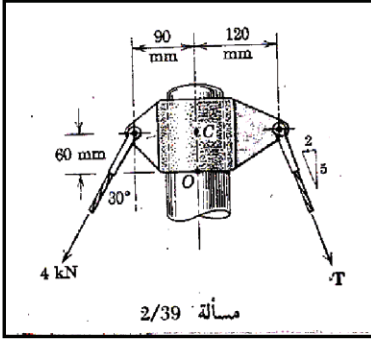
$$\sin \beta = \frac{r \sin \theta}{l}$$

$$\beta = \sin^{-1} \left(\frac{r \sin \theta}{l} \right)$$

وبتحليل القوة (C) عند نقطة A وحساب عزمها حول (O) يكون:-

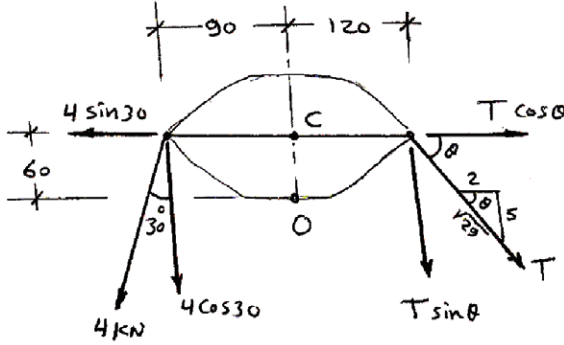
$$\sqrt{+} \Sigma M_O = C \sin \beta (l \cos \beta + r \cos \theta) + C \cos \beta (0.0)$$

وبتعويض قيمة الزاوية (β) في المعادلة الأخيرة نحصل على ما هو مطلوب في المسألة.



2/40 احسب قيمة الشد T بحيث لا يوجد انحناء في السارية عند نقطة O.

الحل:

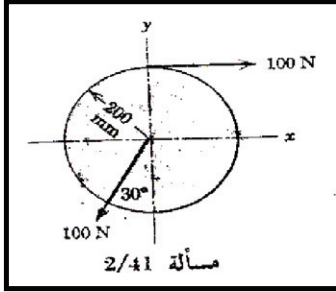


عندما لا يوجد إنحناء في السارية فهذا يعني أن العزم عند (O) يساوي صفراً:

$$\checkmark + \Sigma M_O = 4 \cos 30(90) + 4 \sin 30(60) - T\left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)(120) - T\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right)(60) = 0.0$$

$$T = 3.23 \text{ kN}$$

ملاحظة: لو تم اعتبار العزم عند (C) يساوي صفراً في هذه الحالة ستكون عزوم القوى $(T \cos \theta)$ ، $(4 \sin 30)$ مساوية للصفر كونها تمر بالنقطة (C) وبالتالي فذراعها صفراً.

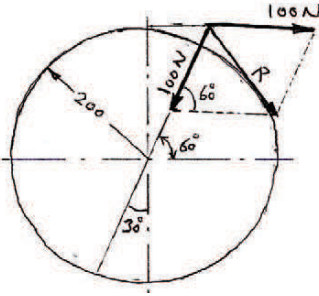


2/41 أوجد بالرسم البياني أو بالمعادلات الجبرية إحداثيات النقطة A الواقعة على حافة العجلة والتي يبلغ فيها العزم M لمحصلة القوتين قيمته العظمى أوجد قيمة M في هذه النقطة.

الحل:

أ- الطريقة الأولى:-

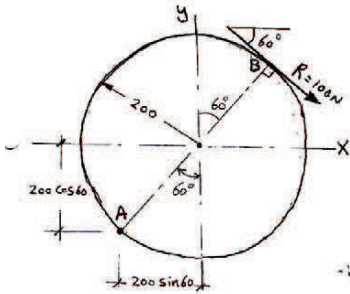
وذلك بإيجاد محصلة القوتين حسب مبدأ تحليل القوة ذات البعدين باستخدام قانون الـ (cosine):



$$R^2 = 100^2 + 100^2 - 2(100)(100) \cos 60$$

$$R = 100 \text{ N}$$

وبذلك سيكون أي من مثلثي متوازي الأضلاع عبارة عن مثلث متساوي الأضلاع أي كل زواياه بمقدار 60° بمعنى أن المحصلة (R) تميل عن الأفق بمقدار 60° وهي عبارة عن مستقيم مماس للدائرة في نقطة ولتكن B. عندها سيكون القطر AB هو أكبر ذراع لتلك المحصلة بالنسبة لنقطة تقع على محيط أو حافة العجلة، وبالتالي فإن أكبر ذراع سيعطي أكبر عزم لتلك المحصلة حول نقطة A والذي مقداره:-



$$MA = -100(400) = -4 \times 10^4 \text{ N.mm}$$

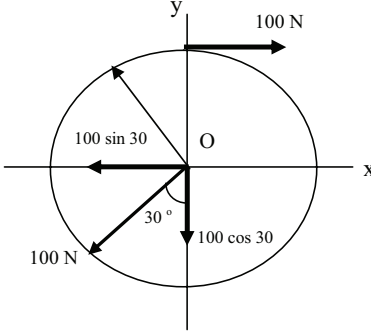
وبذلك ستكون إحداثيات نقطة A:-

$$A (-200 \sin 60, -200 \cos 60)$$

$$A (-173.2, -100)$$

ب- الطريقة الثانية:

وذلك باستخدام مبادئ إيجاد محصلة القوة ذات البعدين في الفصل الذي سيلي لاحقاً.



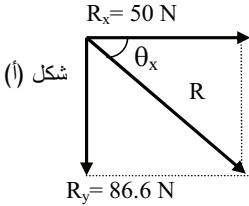
توجد المركبة الأفقية للمحصلة R_x وذلك بمعرفة المجموع الجبري للقوى باتجاه x ($\sum F_x$) مع اعتبار القوة التي باتجاه x موجبة وسالبة عندما تكون عكس اتجاه المحور x . أي أن:-

$$\rightarrow \sum F_x = R_x = 100 - 100 \sin 30 = 50 \text{ N}$$

توجد المركبة الرأسية للمحصلة R_y وذلك بمعرفة المجموع الجبري للقوى باتجاه y ($\sum F_y$) أي أن:-

$$+\uparrow \sum F_y = R_y = -100 \cos 30 = -86.6 \text{ N}$$

الإشارة السالبة تعني أن (R_y) باتجاه معاكس لاتجاه المحور y . ومن خلال رسم اتجاه مركبات المحصلة R_x ، R_y المبين في الشكل المجاور، يمكن معرفة قيمة المحصلة R بنظرية فيثاغورس:-



$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{50^2 + 86.6^2} = 100 \text{ N}$$

وزاوية ميلانها عن الأفق θ_x هي بمقدار :

$$\tan \theta_x = \frac{86.6}{50} \Rightarrow \theta_x = 60^\circ$$

الآن ندرس موقع المحصلة (R) بالنسبة لنقطة معلومة ولتكن تلك النقطة هي مركز الدائرة (O) . عزم المحصلة حول نقطة (O) يساوي مجموع عزوم القوى الفردية حول نفس النقطة بمعنى:-

$$\boxed{RD = \sum M_o}$$

حيث: D = ذراع المحصلة حول (O) ، $\sum M_o$ = مجموع العزوم الفردية حول (O) .

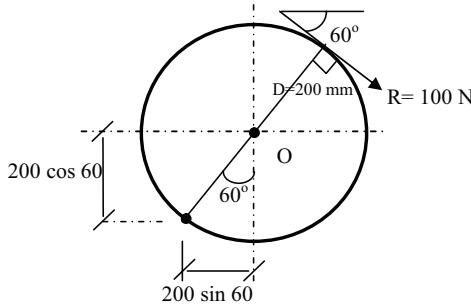
$$\checkmark + \Sigma M_o = -100(200) + 100(0.0) = -2 * 10^4 \text{ N.mm}$$

الإشارة السالبة تعني أن عزم المحصلة حول (O) يلف مع عقرب الساعة. بمعنى أن المحصلة التي تميل عن الأفق بزاوية 60° بالاتجاه الموضح في شكل (أ)، تقع فوق نقطة (O). فلو كانت R تمر بالنقطة (O) لظهر $(\Sigma M_o = 0.0)$ ولو كانت R تقع تحت (O) لظهر ΣM_o بقيمة موجبة على اعتبار يلف عكس عقرب الساعة.

الآن وبعد ما عرفنا أن R تقع فوق نقطة (O)، يبرز سؤال عن بعد المحصلة (R) عن النقطة (O). البعد يحدده قيمة ذراع المحصلة (D) حيث:-

$$RD = \Sigma M_o \Rightarrow D = \frac{2 * 10^4}{100} = 200 \text{ mm}$$

وبما أن نصف القطر (200 mm) وذراع المحصلة (D=200 mm) فهذا يعني أن المحصلة هي قوة مماسية للدائرة كما يظهر في الشكل المجاور.



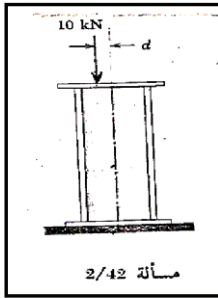
إذا النقطة (A) التي يكون عندها أكبر عزم للمحصلة R والواقعة على حافة العجلة أو الدائرة هي بامتداد الذراع (D). عندها فأن عزم R حول نقطة A يساوي:-

$$M_A = -100 (200 + 200) = -4 * 10^4 \text{ N.mm}$$

أما إحداثيات نقطة (A) فيمكن الحصول عليها بنفس الطريقة الأولى.

الفصل الثالث

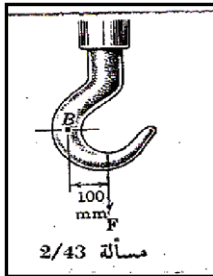




2/42 يحلل تأثير القوة 10 kN على العمود الفولاذي (الصلب) إلى قوة ضغط على امتداد المحور المركزي وعزم ازدواج. فإذا كانت قيمة عزم الازدواج تساوي 800N.m. أوجد قيمة الإزاحة d.

الحل: $Mc = Fd$ (عزم الازدواج)

$$800 = 10 \times 10^3 d \Rightarrow d = 0.08 \text{ m} = 80 \text{ mm}$$



2/43 عند تصميم الصنارة (الكلاب) الرافعة نجد أن تأثير القوة F على المقطع الحرج للصنارة مكونة من قوة لسحب B وعزم الازدواج . فإذا كانت قيمة عزم الازدواج تساوي 4000 N.m أوجد قيمة F.

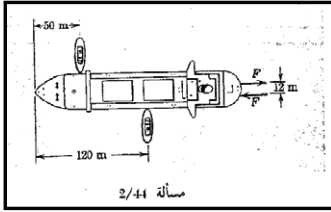
الحل:

$$Mc = Fd \Rightarrow 4000 \times 10^3 = F(100)$$

$$\therefore F = 4 \times 10^4 \text{ N} = 40 \text{ kN}$$

2/44 تولد كل مروحة من مراوح باخرة ذات لولب مزدوج قوة F مقدارها 300 kN عندما تبلغ السرعة قيمتها العظمى. تدور أثناء حركة الباخرة إحدى المراوح بأقصى سرعتها إلى الأمام والأخرى بأقصى سرعتها في اتجاه معاكس. كم يجب أن تكون قوة الدفع P على الباخرة من قبل كل زورق لتلغي مفعول دوران المراوح؟

الحل:



يُلاحظ أن مراوح الباخرة ينتج عنها عزم

ازدواج يلف الباخرة مع عقرب الساعة بمقدار :-

$$M_c = F d = 300(12) = 3600 \text{ kN. m}$$

ولإلغاء مفعول دوران الباخرة لابد للزورق أن تسلط قوى (p) مساوية في المقدار معاكسة في الاتجاه

ولاتقعان على خط عمل واحد. أي بمعنى لابد للزورق أن تسلط عزم ازدواج مساوي لعزم ازدواج

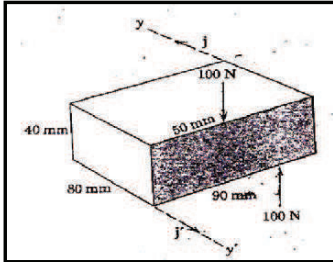
الباخرة ولكن باتجاه معاكس أي عكس عقرب الساعة وبذلك فأن :-

$$M_c = Fd \Rightarrow 3600 = P (120 - 50) \Rightarrow P = 51.4 \text{ kN.}$$

2/45 عبر عن محصلة القوتين حول المحور y

المحور y' بدلالة المتجهات باستخدام

وحدة المتجهات الموضحة بالشكل.



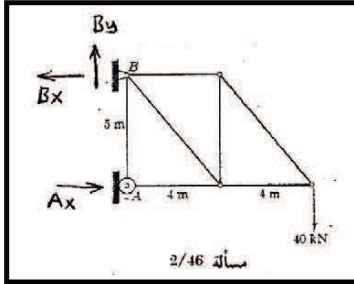
الحل:

$$\overline{M}_c = +100(90 - 50)j' \quad \text{بالنسبة للمحور } y' \text{ فأن:} -$$

$$\overline{M}_c = 400j'$$

$$\overline{M}_c = -100(90 - 50)j \quad \text{بالنسبة للمحور } y \text{ فأن:} -$$

$$\overline{M}_c = -400j$$



2/46 يحمل الحامل الموضح في الشكل . وزن 40

kN ويسلط الجدار العمودي قوة ضد اسطوانة التدرج المثبتة في نقطة A التي تدور حول المفصل في نقطة B. وتتولد القوة الإضافية على الحامل اللازمة للتوازن. يولد الوزن 40 kN ومركبة رد الفعل العمودية في النقطة B عزم ازدواج مساوي ومعاقل إلى عزم الازدواج الناتج عن القوتين الأفقيتين . أحسب القوة المسلطة على مسمار المفصل B.

الحل: من معرفتنا بعزم الازدواج هو ينتج من قوتين متساويتين في المقدار ، فعندما يقول في السؤال أن الوزن 40 kN ومركبة رد الفعل العمودية في النقطة B يولد عزم ازدواج فهذا يعني $(By = 40 \text{ kN})$ وعزم الازدواج الحاصل بمقدار :-

$$Mc = Fd = 40(4+4) = 320 \text{ kN.m}$$

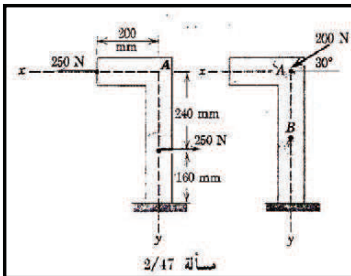
عزم الازدواج هذا يلف مع عقرب الساعة . إذاً لكي يكون هنالك اتزان فأن عزم الازدواج الناتج من القوتين الأفقيتين Bx, Ax يجب أن يساوي لعزم الازدواج (320 kN.m) ولكن باتجاه معاكس وعليه :

$$Mc = Fd$$

$$320 = Bx (5) \Rightarrow Bx = 64 \text{ kN}$$

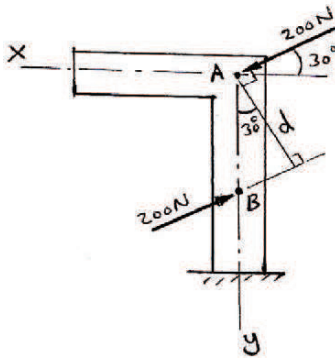
إذاً بنظرية فيثاغورس يمكن معرفة محصلة القوى على المسمار B :-

$$B = \sqrt{64^2 + 40^2} = 75.5 \text{ kN}$$



2/47 إذا كان اللوح الزاوي معرضاً لقوتين 250-N كما

هو موضح في الشكل ويرغب في استبدالها بقوة 200N مسلطة على النقطة A وقوة أخرى مسلطة على النقطة B، أوجد إحداثيات B في الاتجاه y.



الحل: في اللوح الأيسر فإن:-

$$M_c = Fd = 250 (240) = 6 \cdot 10^4 \text{ N.mm}$$

العزم هذا هو نفسه مطلوب إلى اللوح الأيمن

ولكن باختلاف قيم واتجاهات القوى
(200 N).

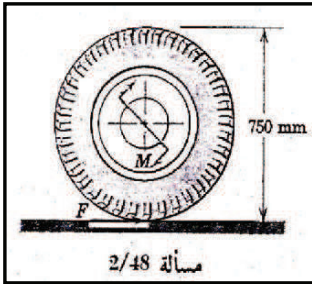
$$M_c = Fd$$

$$6 \cdot 10^4 = 200 \Rightarrow d = 300 \text{ mm}$$

$$\cos 30 = \frac{d}{AB}$$

$$AB = \frac{300}{\cos 30} = 346.41 \text{ mm}$$

إذا إحداثيات B هي:- B (0, 346.41)



2/48 تؤثر قوة الاحتكاك F البالغة 2.4 kN على العجلة

الخلفية لسيارة في حالة تعجيل بالإضافة إلى عزم على

المحور يساوي عزم الازدواج M. فإذا كانت هذه القوة

وعزم الازدواج قد استبدلت بقوة مكافئة مؤثرة على نقطة

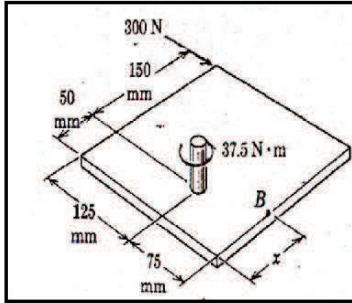
تبعد 12 mm عن مركز العجلة مباشرة فوقها أوجد قيمة

M.

الجواب:

$$M_c = Fd$$

$$M_c = 2.4 \left(\frac{750}{2} + 12 \right) = 929 \text{ kN.mm}$$



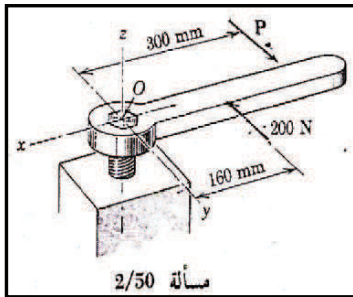
2/49 إذا كانت قيمة عزم الازدواج المسلط على المحور (العمود) (الرأسي) الذي هو ملحوم بصفيحة مستطيلة أفقية تساوي 37.5 N.m وإذا استبدل عزم الازدواج والقوة 300-N بقوة واحدة مكافئة لهما في النقطة B . أوجد قيمة المسافة x المبينة في الشكل.

الحل:

$$M_c = Fd$$

$$37.5 = 300d \Rightarrow d = 0.125 \text{ m} = 125 \text{ mm}$$

$$\therefore x = (50 + 150) - 125 = 75 \text{ mm}$$



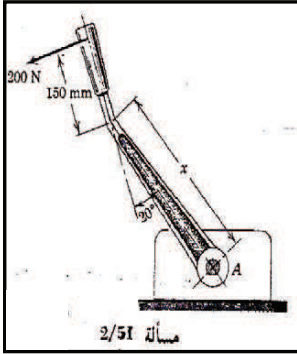
2/50 إذا سقطت القوة 200- N على مفتاح الربط، وكذلك القوة P كما موضح في الشكل. من الملاحظ أن القوة R في النقطة O وعزم الازدواج $M=20\text{kN.m}$ مكافئان لهما أوجد P, R.

الجواب:

$$\bar{M} = 200(160)\mathbf{k} - P(300)\mathbf{k} = 20 \cdot 10^3 \mathbf{k}$$

$$\bar{P} = 40\mathbf{j}$$

$$\bar{R} = 40\mathbf{j} - 200\mathbf{j} = -160\mathbf{j}$$

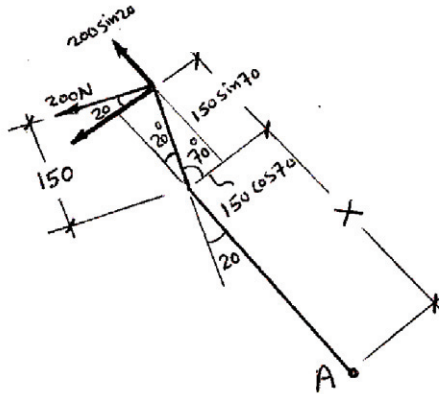


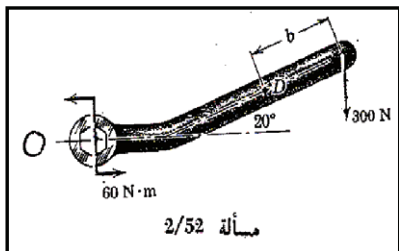
2/51 إذا كان ذراع التحكم تحت تأثير عزم ازدواج 80 N.m باتجاه عقرب الساعة ناتج عن محور (عموده) في النقطة A. وقد صمم ليعمل تحت قوة سحب 200-N كما هو موضح في الشكل . فإذا كانت محصلة عزم الازدواج والقوة تمر من خلال نقطة A . أوجد البعد المناسب لذراع التحكم . x

الحل:

$$\sqrt{+\Sigma M_A = 80 \cdot 10^3 = 200 \sin 20(150 \cos 70) + 200 \cos 20(150 \sin 70 + x)}$$

$$x = 266 \text{ mm}$$





2/52 استبدل عزم الازدواج والقوة الموضحة في

الشكل بقوة واحدة F تؤثر في النقطة D .

عين النقطة بإيجاد المسافة b .

الجواب:

$$M_c = Fd$$

$$60 \cdot 10^3 = 300 d$$

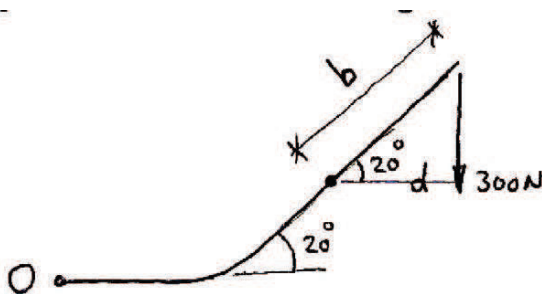
$$d = 200 \text{ mm}$$

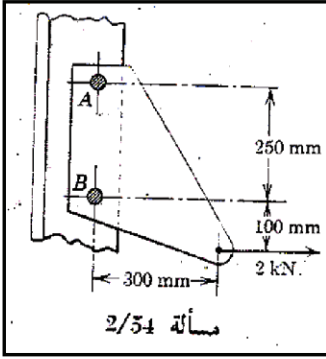
d تمثل المسافة التي تصنع زاوية قائمة على خط عمل القوة 300 N والقوة الأخرى عند

النقطة D

$$\cos 20^\circ = \frac{d}{b}$$

$$\therefore b = \frac{200}{\cos 20^\circ} = 213 \text{ mm}$$





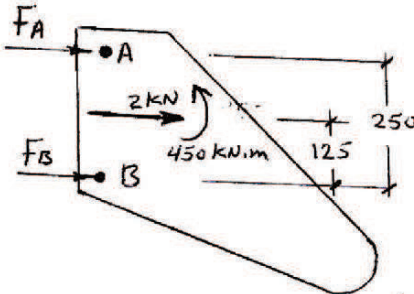
2/54 تُثبت الحامل بالعارضة بواسطة مسمارين كبس A, B, والذي يحمل القوة 2-kN . استبدل هذه القوة بقوة أخرى تعمل على استقامة المحور الأفقي بين المسمارين ويعزم الازدواج ثم وزع هذه القوة وعزم الازدواج إلى قوتين واحدة في A والأخرى في B وأوجد بعدئذ القوة المؤثرة على المسامير .

الحل:



$$M_c = 2\left(100 + \frac{250}{2}\right) = 450 \text{ kN.mm}$$

مجموع العزوم قبل الاستبدال = مجموع العزوم بعد الاستبدال
ويأخذ العزم حول (B) مثلاً فأن:-

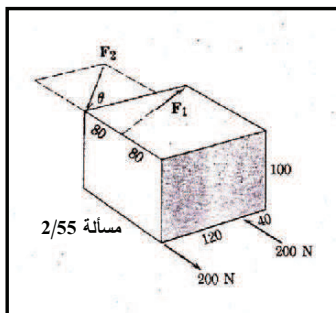


$$-F_A (250) = -2(125) + 450$$

$$F_A = -0.8 \text{ kN} \Rightarrow F_A = 0.8 \text{ kN} \leftarrow$$

مجموع القوى قبل الاستبدال = مجموع القوى بعد الاستبدال

$$F_A + F_B = 2 \Rightarrow -0.8 + F_B = 2 \Rightarrow F_B = 2.8 \text{ kN}$$



2/55 إذا كانت القوة F_1 ، F_2 معادلاً إلى نظام القوتين 200-N . أوجد قيمة θ وقيم كل من F_1 و F_2 .

الحل:

$$M_c = Fd$$

$$M_c = 200 (120)$$

$$M_c = 24000 \text{ N.mm}$$

حسب ما مبين في السؤال أن عزم القوة

(200) معادلاً لعزم إزدواج القوتين F_1 ، F_2 ،

عليه:-

$$\tan \alpha = \frac{160}{80} \Rightarrow \alpha = 63.43^\circ$$

$$M_c = Fd$$

$$24000 = F_1 \sin 63.43 (80)$$

$$F_1 = 335 \text{ N}$$

يُلاحظ من خلال الشكل المجاور أن:-

$$F_2 \sin \theta = 335 \cos 63.43 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$F_2 \cos \theta = 335 \sin 63.43 \quad \dots\dots\dots(2)$$

وبقسمة المعادلة (1) على (2) ينتج:-

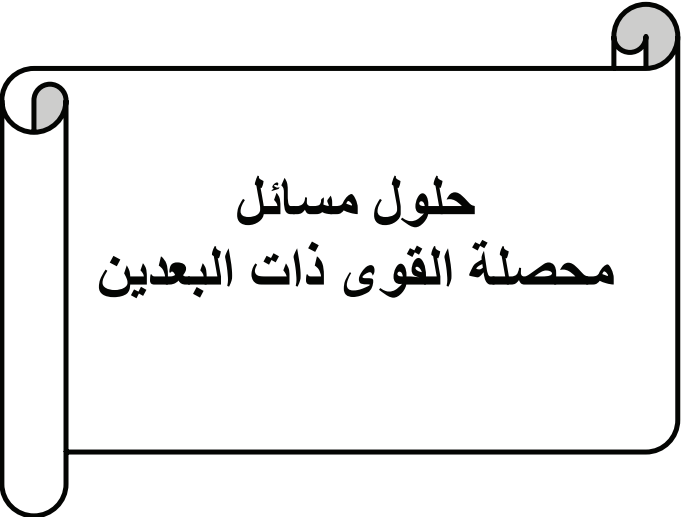
$$\tan \theta = \frac{\cos 63.43}{\sin 63.43} \Rightarrow \theta = 26.6^\circ$$

وبتعويض قيمة (θ) في أي من المعادلات (1)، (2) نحصل على قيمة:-

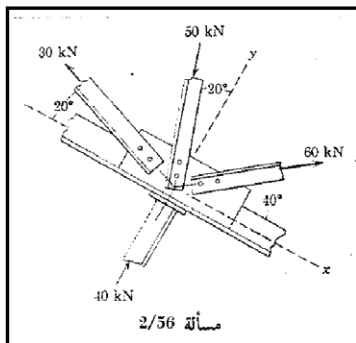
$$F_2 = 335 \text{ N}$$

(الجزء العلوي في شكل المسألة)

الفصل الرابع



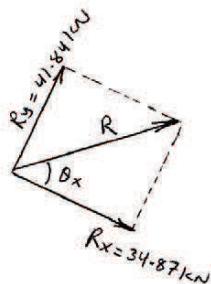
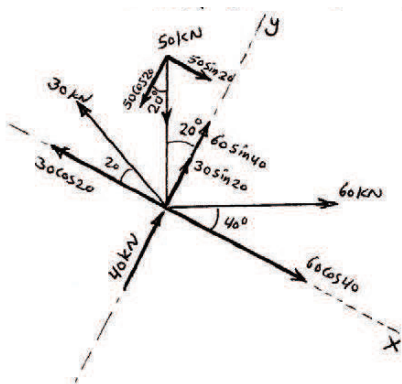
حلول مسائل
محصلة القوى ذات البعدين



2/56 أوجد المحصلة R للقوى الأربع المؤثرة على لوح التقوية . كذلك أوجد قيمة R والزاوية θ_x المحصورة بين المحصلة والمحور x.

الحل:

نوجد المركبة الأفقية للمحصلة R_x وذلك بمعرفة المجموع الجبري للقوى باتجاه x (ΣF_x) بعد تحليل القوى إلى ما يكافئها من مركباتها باتجاه المحاور x, y, كما هو مبين في الشكل المجاور.



$$\downarrow \Sigma F_x = 60 \cos 40 + 50 \sin 20 - 30 \cos 20 = 34.87 \text{ kN} = R_x$$

$$+\nearrow \Sigma F_y = 60 \sin 40 + 30 \sin 20 - 50 \cos 20 + 40 = 41.84 \text{ kN} = R_y$$

$$\vec{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j}$$

$$\vec{R} = 34.87\mathbf{i} + 41.84\mathbf{j}$$

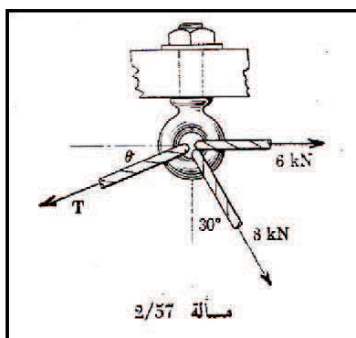
$$R = \sqrt{34.87^2 + 41.84^2} = 54.5 \text{ kN}$$

$$\tan \theta_x = \frac{R_y}{R_x} = \frac{41.84}{34.87} \Rightarrow \theta_x = 50.2^\circ \quad (\text{زاوية ميلان R عن المحور x})$$

ملاحظة: 1- عندما تكون نظام القوى من النوع المتلاقي في نقطة واحدة فإن المحصلة تمر بنقطة التلاقي.

2- لو ظهر أن قيمة $(\theta_x = 90^\circ)$ فهذا يعني أن المحصلة R منطبقة على R_y وهذا يحصل

عندما تكون $(R_x = \Sigma F_x = 0.0)$ وهذا ما سيتم الاستفادة منه في حل مسألة 2/57.



2/57 أحسب قيمة الشد T والزاوية θ بحيث أن

محصلة القوى على المسمار ذي العروة 15

kN باتجاه الأسفل.

الحواب:

عندما تكون R باتجاه الأسفل فهذا يعني

أنها منطبقة ومساوية إلى مركبتها الرأسية R_y

وهذا يحصل عندما تكون مركبتها الأفقية

$(R_x = 0.0)$. وعليه فإن:-

$$\rightarrow \Sigma F_x = R_x = 0.0 = 6 + 8 \sin 30 - T \cos \theta$$

$$T \cos \theta = 10 \quad \dots\dots\dots(1)$$

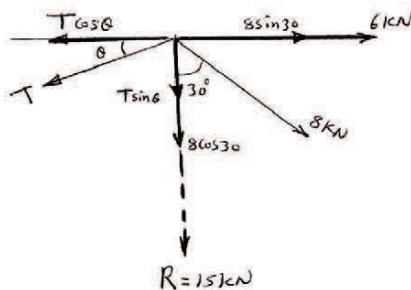
$$+ \uparrow \Sigma F_y = R_y = -T \sin \theta - 8 \cos 30 = -15$$

$$T \sin \theta = 15 - 8 \cos 30$$

$$T \sin \theta = 8.07 \dots\dots\dots(2)$$

ويقسم المعادلة (2) على (1) ينتج:-

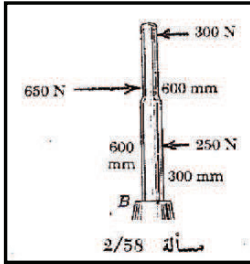
$$\frac{T \sin \theta}{T \cos \theta} = \frac{8.07}{10}$$



$$\tan \theta = 0.807 \Rightarrow \theta = 38.9^\circ$$

وبتعبير قيمة θ في أي من المعادلات (1) أو (2) نحصل على قيمة :

$$T = 12.85 \text{ kN}$$



2/58 أوجد الارتفاع h من القاعدة إلى نقطة عمل محصلة القوى الثلاث.

الحل: عندما تكون جميع القوى أفقية فأن

محصلتها (R) تكون أفقية ومساوية لقيمة مركبتها الأفقية R_x وهذا ما سيتم إثباته:-

$$+\uparrow \Sigma F_y = R_y = 0.0$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = R_x = 650 - 300 - 250 = 100 \text{ N}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{100^2 + 00} = 100 \text{ N} \quad (\text{القيمة العددية إلى } R)$$

$$\therefore \bar{R} = R_x i + R_y j$$

$$\bar{R} = 100i \quad (\text{القيمة الاتجاهية إلى } R)$$

الآن ندرس نقطة عمل محصلة القوى الثلاث R بالنسبة لنقطة معلومة ولتكن B حيث أن عزم

المحصلة حول B = مجموع عزوم القوى الفردية حول نفس النقطة. أي أن:-

$$RD = \Sigma M_B$$

حيث D = ذراع المحصلة حول B ، ΣM_B = مجموع عزوم القوى الفردية حول B .

$$\curvearrowleft + \Sigma M_B = 250(300) + 300(600 + 300) - 650(600) = -45000 \text{ N.mm}$$

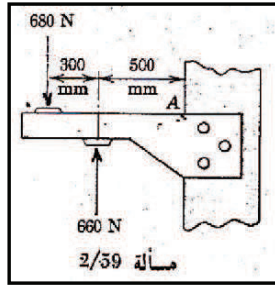
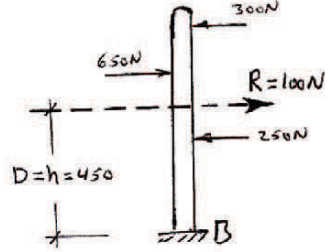
الإشارة السالبة تعني أن عزم R حول B يلف مع عقرب الساعة ، لذا فمن المؤكد أن المحصلة تقع فوق نقطة B . فلوكانت تحت B لظهر العزم موجب. إذا بُدُ المحصلة R عن B سيحدده قيمة ذراعها الذي مقداره:-

$$RD = \Sigma M_B$$

$$Rh = \Sigma M_B$$

$$h = \frac{45000}{100} = 450 \text{ mm}$$

ملاحظة: عندما يكون ΣM_B مساوي للصفر فهذا يعني أن R تمر بالنقطة B.



2/59 أين تؤثر محصلة القوتين؟

الحل:

عندما تكون جميع القوى رأسية ، فإن محصلتها R تكون رأسية ومساوية لقيمة مركبتها الرأسية R_y وهذا ما سيتم إثباته:-

$$\rightarrow \Sigma F_x = R_x = 0.0$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = R_y = 660 - 680 = -20 \text{ N}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{0.0^2 + (20)^2} = 20 \text{ N} \quad \text{القيمة العددية إلى } R$$

$$\therefore \bar{R} = R_x \bar{i} + R_y \bar{j}$$

$$\boxed{\bar{R} = -20\bar{j}}$$

(القيمة الاتجاهية إلى R)

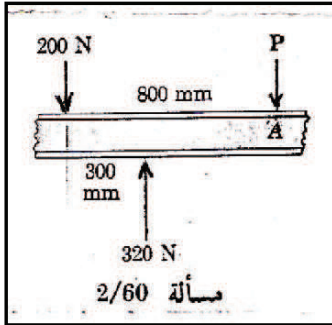
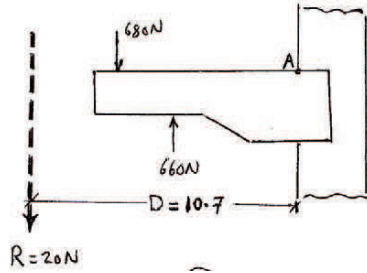
ندرس موقع عمل المحصلة R بالنسبة لنقطة معلومة ولتكن نقطة A.

$$\curvearrowleft \Sigma M_A = 680(300 + 500) - 660(500) = 214000 \text{ N.mm}$$

العزم الموجب يعني أن R تعمل عزم عكس عقرب الساعة. لذا طبقاً لاتجاه المحصلة $(\bar{R} = -20j)$ فمن المؤكد أنها تقع يسار أو شمال نقطة A . بُعد المحصلة عن نقطة A يمكن تحديده من خلال إيجاد ذراع المحصلة (D):

$$RD = \Sigma M_A$$

$$D = \frac{214000}{20} = 10700 \text{ mm} = 10.7 \text{ m}$$



2/60 تمر محصلة القوى الثلاث دائماً من نقطة A مهما كانت قيمة القوة P . اشرح السبب.

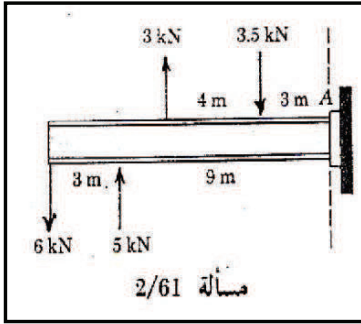
الحل:

عندما تمر المحصلة R من نقطة A فهذا يعني عندما نحسب (ΣM_A) فسنجد قيمتها مساوية للصفر لأن:-

$$RD = \Sigma M_A$$

أي أن عزم المحصلة حول A يساوي مجموع القوى الفردية حول نفس النقطة. وعند حسابنا إلى (ΣM_A) فمهما تكن قيمة P فإن عزمها يكون مساوي للصفر تبعاً لما يأتي:-

$$\curvearrowleft + \Sigma M_A = -320(800 - 300) + 200(800) + P(0.0) = 0.0$$



2/61 أوجد قيمة المحصلة R التي تحل محل القوى الأربع المؤثرة على العائق المثبت من طرف واحد من دون أن تغير من قيمة رد الفعل على نهاية اللحام في A. عين موقع R بتحديد المسافة b إلى شمال نقطة A.

الحل:

$$\rightarrow \Sigma F_x = R_x = 0.0$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = R_y = -6 + 5 + 3 - 3.5 = -1.5 \text{ kN}$$

$$\bar{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} \Rightarrow \bar{R} = -1.5 \mathbf{j}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \Rightarrow R = \sqrt{0.0 + 1.50^2} = 1.5 \text{ kN}$$

يتضح من ذلك أن المحصلة R منطبقة على مركبتها الرأسية R_y باتجاه الأسفل. وللتعرف

على موقع المحصلة بالنسبة لنقطة A ، فإن :-

$$\curvearrowright + \Sigma M_A = 3.5(3) - 3(7) - 5(9) + 6(12) = 16.5 \text{ kn.m}$$

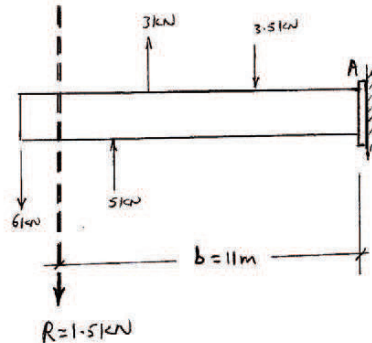
لاحظ أن رد الفعل في A مهما تكن قيمته سيكون عزمه صفراً. من خلال القيمة الموجبة إلى

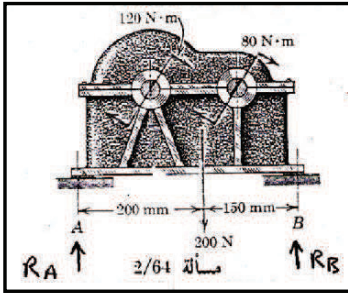
(ΣM_A) فإن المحصلة حتما تقع إلى يسار أو شمال A بحيث تبعد عن A بمسافة يحددها ذراع

المحصلة حول A أي أن :-

$$RD = \Sigma M_A$$

$$Rb = \Sigma M_A \Rightarrow b = \frac{16.5}{1.5} = 11 \text{ m}$$





2/64 يؤثر على مسنن تخفيض السرعة وزنه 200 N عزم ازدواج وقوة عمودية في كل من نقاط التثبيت A و B . أوجد القوى العمودية في A و B إذا كانت محصلة عزمي الازدواج والقوى الثلاث تساوي صفر.

الحل: نفرض أن القوى في A ، B هي R_A ، R_B بالاتجاهات الموضحة في الشكل المجاور .

$$+\uparrow \Sigma F_y = R_y = R_A + R_B - 200 = 0.0$$

$$\therefore R_A + R_B = 200 \dots\dots(1)$$

$$\curvearrowleft + \Sigma M_A = -200(200) + R_B(350) - 80 \cdot 10^3 - 120 \cdot 10^3 = 0.0$$

$$R_B = 685.7 \text{ N}$$

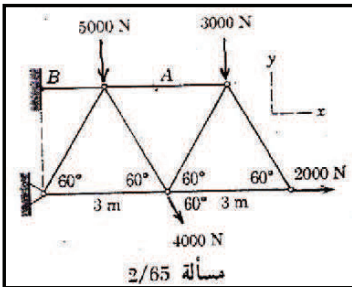
وبتعويض قيمة R_B في المعادلة (1) ينتج:-

$$R_A + 685.7 = 200$$

$$R_A = -485.7 \text{ N}$$

$$\therefore R_A = 485.7 \downarrow$$

الإشارة السالبة لقيمة R_A تعني أنها باتجاه الأسفل وليست باتجاه الأعلى كما تم أفترضها ابتداءً.



2/65 أوجد المحصلة R للقوى الأربع وحدد موقع نقطة A على الوتر العلوي والتي تمر منها المحصلة R.

الحل:

تغير وحدات جميع القوى إلى الـ (kN) وتوجد مركبات المحصلة باتجاه x واتجاه y ، بعد تحليل القوة
4000 N إلى مركبة أفقية بمقدار $4000 \cos 60$ ومركبة رأسية بمقدار $4000 \sin 60$.

$$\rightarrow \Sigma F_x = R_x = 2 + 4 \cos 60 = 4 \text{ kN}$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = R_y = -3 - 5 - 4 \sin 60 = -11.46 \text{ kN}$$

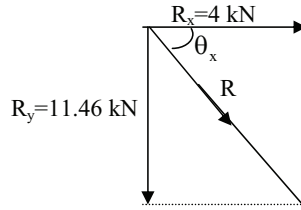
$$\bar{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j}$$

$$\bar{R} = 4\mathbf{i} - 11.46\mathbf{j} \quad (\text{القيمة الاتجاهية للمحصلة})$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$R = \sqrt{4^2 + 11.46^2} = 12.14 \text{ kN}$$

(القيمة العددية للمحصلة)

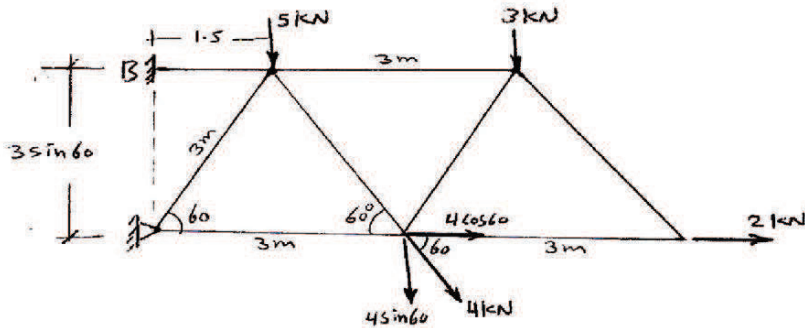


شكل (أ)

وللتعرف على زاوية ميلان المحصلة عن المحور x (θ_x) فإن:-

$$\tan \theta_x = \frac{11.46}{4} \Rightarrow \theta_x = 70.76^\circ$$

وللتعرف على موقع المحصلة R بالنسبة لنقطة معلومة ولتكن B فإن:-



بما أن جميع زوايا المثلثات 60° فإن جميعها من المثلثات المتساوية الأضلاع التي مقدارها 3m.

مجموع عزوم القوى الفردية حول B :-

$$\curvearrowleft + \Sigma M_B = -5(1.5) - 3(3 + 1.5) - 4 \sin 60(3) + 4 \cos 60(3 \sin 60) + 2(3 \sin 60)$$

$$\curvearrowleft + \Sigma M_B = -21 \text{ kN.m}$$

إذا المحصلة R المبين اتجاهها في شكل (أ) أعلاه لابد وأنها تقع إلى يمين نقطة B. بعد R من B يحدده ذراع المحصلة R والذي مقداره:-

$$RD = \Sigma M_B \Rightarrow D = \frac{21}{12.14} = 1.73 \text{ m}$$

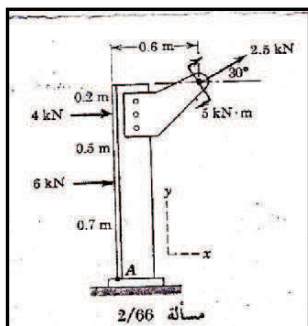
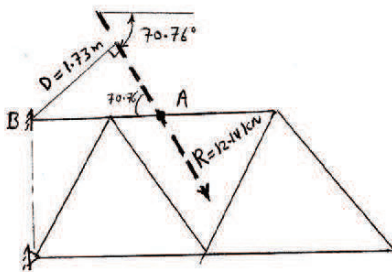
إذاً من خلال الشكل المجاور، يمكن معرفة موقع R

وللتعرف على موقع نقطة A التي تمر بها

المحصلة فأن:-

$$\sin 70.76 = \frac{1.73}{AB} \Rightarrow AB = 1.83$$

إذاً النقطة A تبعد مسافة (1.83 m) عن نقطة B.



2/66 استبدل القوى الثلاث وعزم الازدواج بقوة

مكافئة R في A وعزم ازدواج M. أوجد

وقيمة R.

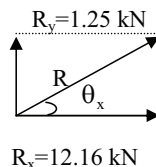
الحل:

$$+\rightarrow \Sigma F_x = R_x = 2.5 \cos 30 + 4 + 6 = 12.16 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = R_y = 2.5 \sin 30 = 1.25 \text{ kN}$$

$$\bar{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} \Rightarrow \bar{R} = 12.16 \mathbf{i} + 1.25 \mathbf{j}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{12.16^2 + 1.25^2} = 12.22 \text{ kN}$$



$$R_x = 12.16 \text{ kN}$$

$$\theta_x = \tan^{-1} \frac{1.25}{12.16} = 5.87^\circ$$

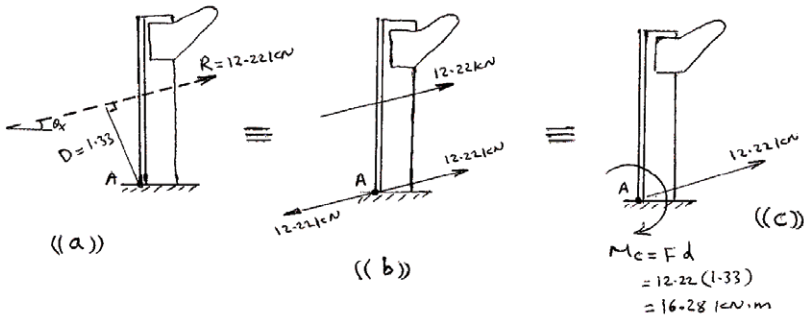
وللتعرف على موقع المحصلة R بالنسبة لنقطة A فأن:-

$$\uparrow + \Sigma M_A = -6(0.7) - 4(0.5 + 0.7) - 2.5 \cos 30(1.4) + 2.5 \sin 30(0.60) - 5$$

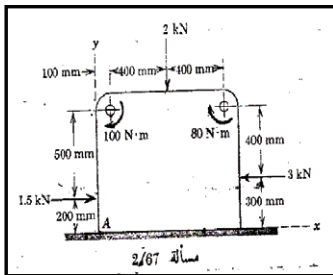
$$\uparrow + \Sigma M_A = -16.28 \text{ kN.m} \quad (\text{مع عقرب الساعة})$$

إذاً من المؤكد أن R تقع فوق A على مسافة يحددها ذراع المحصلة D.

$$RD = \Sigma M_A \Rightarrow D = \frac{16.28}{12.22} = 1.33 \text{ m}$$



إذاً بعد ما عرفنا قيمة واتجاه وموقع المحصلة بالنسبة لنقطة A المبين في الشكل (a) أعلاه ، يمكن وحسب المبادئ التي تعلمناها في عزم الازدواج من مكافئة المحصلة إلى قوة وعزم في نقطة A كما موضح في شكل (C) . لاحظ أن قيمة M_c هي نفسها قيمة (ΣM_A) وهذا ما يؤكد على أن العزوم قبل الاستبدال = العزوم بعد الاستبدال.



2/67 أوجد المحصلة R للقوى الثلاثة ولعزم الازدواج كما هو موضح في الشكل وكذلك أوجد الأحداثي x للنقطة التي تقع على المحور x وتمر منها المحصلة R.

الحل:

$$+\rightarrow \Sigma F_x = R_x = 1.5 - 3 = -1.5 \text{ kN}$$

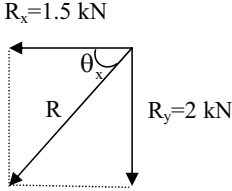
$$+\uparrow \Sigma F_y = R_y = -2 \text{ kN}$$

$$\bar{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} \Rightarrow \bar{R} = -1.5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \Rightarrow R = 2.5 \text{ kN}$$

$$\theta_x = \tan^{-1} \frac{2}{1.5} = 53.13^\circ$$

ندرس موقع المحصلة R بالنسبة لنقطة A:



$$\curvearrowleft + \Sigma M_A = -1.50(200) - 2(400 + 100) + 3(300) - 100 - 80 = -580 \text{ kN.mm}$$

الإشارة السالبة تعني أن المحصلة R تلف مع عقرب الساعة . إذاً من المؤكد أنها تقع إلى يمين نقطة A تبعاً لما هو موضح في الشكل المجاور . وتبعد مسافة :

$$RD = \Sigma M_A$$

$$D = \frac{580}{2.5} = 232 \text{ mm}$$

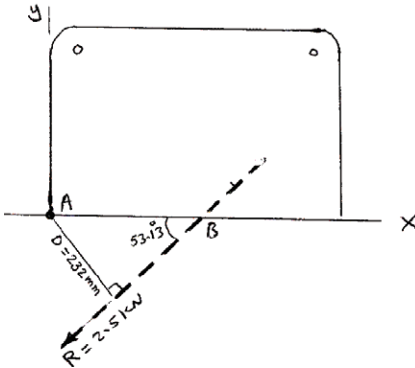
إذاً لمعرفة الأحداثي x لنقطة B

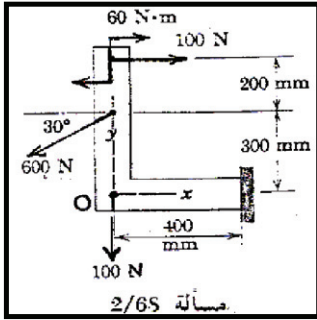
التي تمر منها المحصلة:

$$\sin 53.13 = \frac{232}{AB}$$

$$AB = 290 \text{ mm}$$

إذا إحداثي B هي (290, 0).

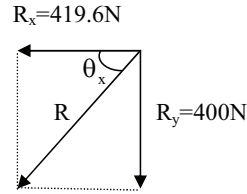




2/68 احسب الاحداثي y- على المحور y-
والتي يجب أن تمر منها محصلة القوى
الثلاث وعزم الازدواج.

الحل:

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x &= R_x = 100 - 600 \cos 30 = -419.6 \text{ N} \\ + \uparrow \Sigma F_y &= R_y = -100 - 600 \sin 30 = -400 \text{ N} \\ \bar{R} &= -419i - 400j \\ R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{419.6^2 + 400^2} = 580 \text{ N} \\ \theta_x &= \tan^{-1} \frac{400}{419.6} = 43.63^\circ \end{aligned}$$



لنتعرف على موقع المحصلة بالنسبة لنقطة معلومة ولتكن هي نقطة الاصل (O).

$$\begin{aligned} \curvearrowleft + \Sigma M_O &= 600 \cos 30(300) - 100(500) - 60 * 10^3 \\ &= 45884 \text{ N.mm} = Mc \text{ (قيمة عزم الازدواج)} \end{aligned}$$

بما أن العزم موجب فمن المؤكد أن المحصلة تقع فوق نقطة (O) على بُعد D أي أن :-

$$RD = \Sigma M_O \Rightarrow D = \frac{45884}{580} = 79.11 \text{ mm}$$

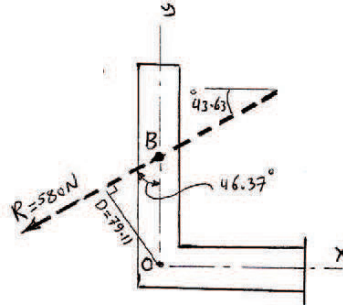
وبناءً على ذلك فإن قيمة واتجاه وموقع المحصلة هو كما مبين في الشكل المجاور. إذاً النقطة

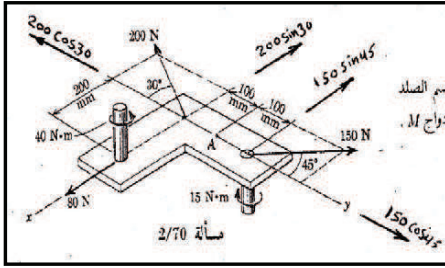
المقصود بها في السؤال التي تمر منها المحصلة هي B. الأداثي y لنقطة B هو :-

$$\sin 46.37 = \frac{79.11}{OB}$$

$$OB = 109.3$$

$$\therefore B(0, 109.3)$$





2/70 استبدل القوى الثلاث وعزمي الازدواج
المؤثرة على الجسم الصلب (الصلب) بقوة
واحدة مكافئة R في نقطة A وعزم
ازدواج M.

الحل:

$$\Sigma F_x = R_x = 80 - 200 \sin 30 - 150 \sin 45 = -126 \text{ N}$$

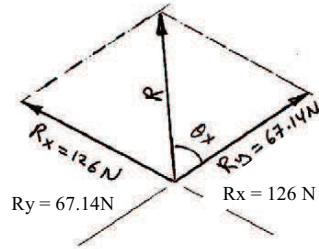
$$\Sigma F_y = R_y = 150 \cos 45 - 200 \cos 30 = -67.14 \text{ N}$$

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$$

$$\vec{R} = -126\vec{i} - 67.14\vec{j}$$

$$R = \sqrt{126^2 + 67.14^2} = 142.77 \text{ N}$$

$$\theta_x = \tan^{-1}\left(\frac{67.14}{126}\right) = 28^\circ \Rightarrow \theta_y = 62^\circ$$



لنتعرف الآن على بعد المحصلة من نقطة A-

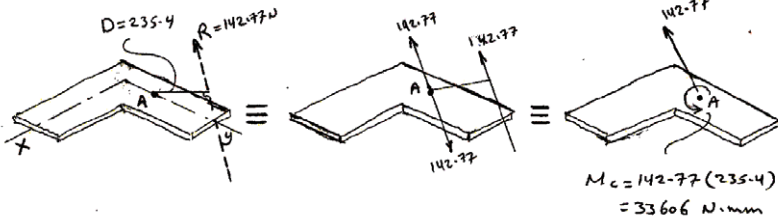
$$+\Sigma M_A = 40 \cdot 10^3 - 15 \cdot 10^3 + 150 \sin 45 (100) - 200 \sin 30 (100) + 80 (100)$$

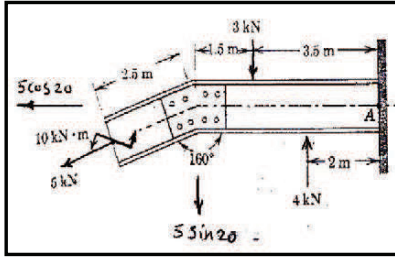
$$\therefore \Sigma M_A = 33606.6 \text{ N} \cdot \text{mm} \text{ (مع عكس الساعة)}$$

من خلال العزم الموجب يتضح أن R واقعة على يمين نقطة A- على مسافة:-

$$RD = \Sigma M_A$$

$$D = \frac{33606}{142.77} = 235.4 \text{ mm}$$





2/71 عبر عن محصلة القوى الثلاث وعزم الازدواج بقوة R في نقطة A وعزم ازدواج M . أوجد M وقيمة R.

الحل:

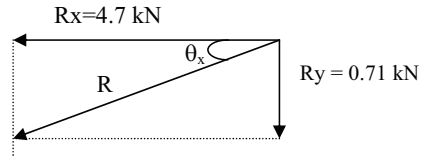
$$\rightarrow \Sigma F_x = R_x = -5 \cos 20 = -4.7 \text{ kN}$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = R_y = -5 \sin 20 - 3 + 4 = -0.71 \text{ kN}$$

$$\bar{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j}$$

$$\bar{R} = -4.7 \mathbf{i} - 0.71 \mathbf{j}$$

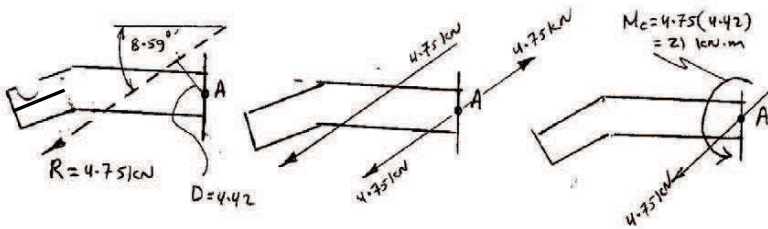
$$R = \sqrt{4.7^2 + 0.71^2} = 4.75 \text{ kN}$$



$$\theta_x = \tan^{-1} \left(\frac{0.71}{4.7} \right) = 8.59^\circ$$

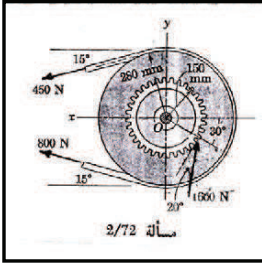
$$\curvearrowright + \Sigma M_A = 10 + 5 \sin 20 (1.5 + 3.5) + 3 (3.5) - 4 (2)$$

$$\Sigma M_A = 21 \text{ kN.m} \quad (\text{عكس عقرب الساعة})$$



$$RD = \Sigma M_A$$

$$D = \frac{21}{4.75} = 4.42 \text{ m}$$



2/72 يدور المسنن والبكرة ذات السير المخروطي بشكل V عكس عقرب الساعة تحت تأثير قوة السن 1600N وقوى الشد 800-N، 450-N في السير المخروطي V. عبر عن مفعول هذه القوى الثلاث بالمتحصلة R في نقطة O وعزم ازدواج قيمته M. هل تقع سرعة هذا الجسم أم تزداد؟

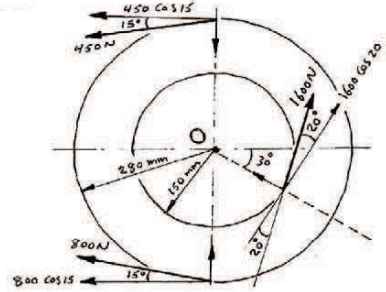
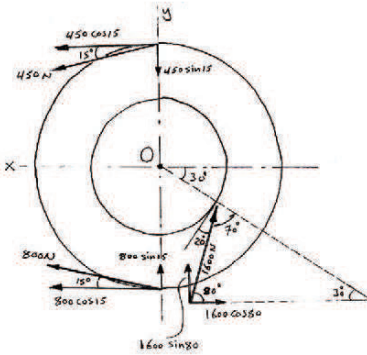
الحل: بناء على تحليل القوى الفردية باتجاه

المحاور x, y فان :

$$\leftarrow \Sigma F_x = R_x = -1600 \cos 80 + 800 \cos 15 + 450 \cos 15 \quad \therefore R_x = 930 \text{ N}$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = R_y = 1600 \sin 80 + 800 \sin 15 - 450 \sin 15 = 1666 \text{ N}$$

$$\therefore \bar{R} = R_x \bar{i} + R_y \bar{j} \Rightarrow \bar{R} = 930\bar{i} + 1666\bar{j}$$

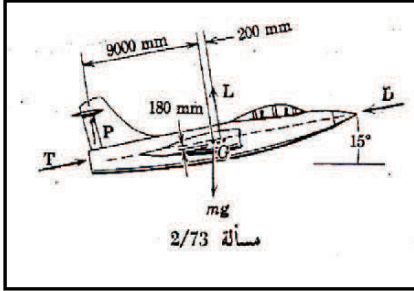


الآن نتعرف على قيمة عزم الازدواج M عند نقطة (O) والذي يساوي ΣM_O . مع إهمال عزم

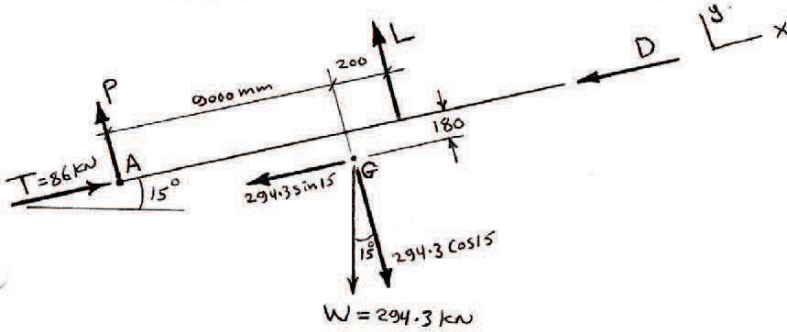
القوى المارة في نقطة (O).

$$+\Sigma M_O = 1600 \cos 20(150) + 450 \cos 15 (280) - 800 \cos 15 (280)$$

$$\curvearrowright +\Sigma M_O = 130.8 \times 10^3 \text{ N.mm}$$



2/73 تعلق الطائرة النفاثة التي كتلتها m تساوي $30Mg$ بميل زاويته 15° وبسرعة ثابتة تحت تأثير قوة دفع منتظم T قيمتها 86 kN . أن محصلة جميع القوى المؤثرة على الطائرة تساوي الصفر ما دامت سرعتها ثابتة. أحسب قيمة قوة السحب D وقوة الدفع L والقوة P المؤثرة على معدل الطائرة للوضع الموضح بالشكل .



$$m = 30 Mg = 30 \cdot 10^6 \text{ gm} = 30 \cdot 10^3 \text{ kg} \text{ (كتلة الطائرة)}$$

$$w = mg = (30 \cdot 10^3) (9.81) = 294300 \text{ N} = 294.3 \text{ kN} \text{ (وزن الطائرة)}$$

$$\curvearrowright \Sigma M_A = 0.0$$

$$-294.3 \sin 15 (180) - 294.3 \cos 15 (9000) + L(9200) = 0.0$$

$$\boxed{L = 279.6 \text{ kN}}$$

$$\uparrow \Sigma F_y = 0$$

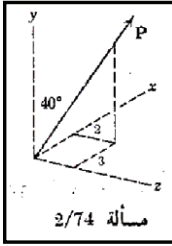
$$P + 279.6 - 294.3 \cos 15 = 0 \Rightarrow \boxed{P = 4.67 \text{ kN}}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$86 - 294.3 \sin 15 - D = 0.0 \Rightarrow \boxed{D = 9.83 \text{ kN}}$$

الفصل الخامس

حلول مسائل تحليل القوة ذات الثلاث أبعاد



2/74 إذا كانت المركبة في اتجاه x للقوة P تساوي

60 N. أوجد قيمة المركبة في اتجاه y

الحل:

$$\tan \theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = 33.69^\circ$$

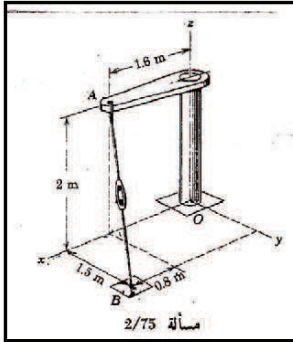
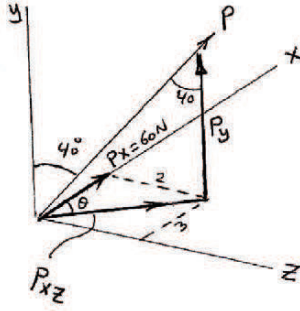
$$\cos \theta = \frac{P_x}{P_{xz}}$$

$$P_{xz} = \frac{60}{\cos 33.69}$$

$$P_{xz} = 72.11$$

$$\tan 40 = \frac{P_{xz}}{P_y}$$

$$P_y = \frac{72.11}{\tan 40} = 85.93 \text{ N}$$



2/75 يدار مقبض الشدادة إلى أن تصبح قوة الشد في

الكابل AB مساوية لـ 1.2 kN. أكتب المعادلة

الاتجاهية للشد T كقوة مسطرة على المقبض.

الحل:

بما أن قوة الشد T إتجاهها من نقطة A إلى B، لذا من

الضروري التعرف على متجه الوحدة (unit vector) إلى

AB والذي يرمز له بالرمز λ_{AB} حيث أن:-

$$\lambda_{AB} = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \frac{\text{القيمة الاتجاهية إلى AB}}{\text{القيمة العددية إلى AB}}$$

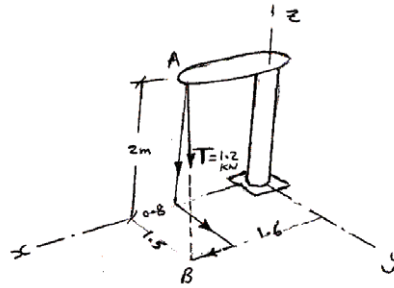
ومن خلال معرفتنا بـ (λ_{AB}) يمكن إيجاد المعادلة الاتجاهية للشد T حيث أن:-

$$\lambda_{AB} = \frac{\bar{T}}{|\bar{T}|} = \frac{\text{القيمة الاتجاهية إلى } \bar{T}}{\text{القيمة العددية إلى } \bar{T}}$$

إذاً في البداية يجب التعرف على المعادلة الاتجاهية للمتجه AB، ولهذا الغرض هناك طريقتين:-
 * الطريقة المباشرة:- وهي أن نتبع اتجاه مركبات المتجه AB باتجاه المحاور x, y, z كما موضح في الشكل المجاور . وبذلك يكون:-

$$\bar{AB} = -2k + 1.5j + 0.8i$$

$$\bar{AB} = 0.8i + 1.5j - 2k$$



الطريقة الغير مباشرة:- وهي أن نوجد إحداثيات A(1.6, 0, 2) ونوجد إحداثيات B(2.4, 1.5, 0) ثم تطرح إحداثيات B من A بمعنى أن:-

$$\bar{AB} = B - A = (2.4 - 1.6)i + (1.5 - 0)j + (0 - 2)k$$

$$\bar{AB} = 0.8i + 1.5j - 2k$$

وبعد إيجاد القيمة أو المعادلة الاتجاهية للمتجه AB يمكن معرفة قيمته العددية:

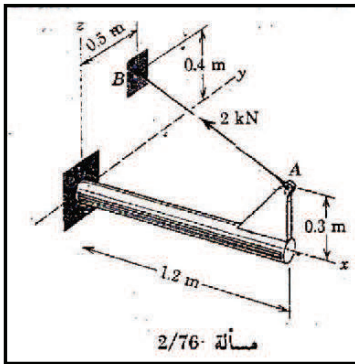
$$|\overline{AB}| = \sqrt{0.8^2 + 1.5^2 + 2^2} = 2.6$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \frac{1}{2.6} (0.8i + 1.5j - 2k)$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\overline{T}}{|\overline{T}|} \Rightarrow \frac{1}{2.6} (0.8i + 1.5j - 2k) = \frac{\overline{T}}{1.2}$$

$$\overline{T} = \frac{1.2}{2.6} (0.8i + 1.5j - 2k)$$

$$\overline{T} = 0.37i + 0.69j - 0.92k$$



2/76 يؤثر الكابل بقوة شد مقدارها 2kN على الحامل في A . أكتب المعادلة الاتجاهية للشد T.

الحل: نوجد المعادلة أو القيمة الاتجاهية للمتجه AB بالطريقة المباشرة وذلك بتتبع اتجاه مركبات AB باتجاه المحاور x, y, z, كما أسلفنا في المثال السابق.

$$\overline{AB} = -0.3k - 1.2i + 0.4k + 0.5j$$

$$\overline{AB} = -1.2i + 0.5j + 0.1k$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{1.2^2 + 0.5^2 + 0.1^2} = 1.30$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \frac{1}{1.3}(-1.2i + 0.5j + 0.1k)$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\overline{T}}{|\overline{T}|} \Rightarrow \frac{1}{1.3}(-1.2i + 0.5j + 0.1k) = \frac{\overline{T}}{2}$$

$$\overline{T} = \frac{2}{1.3}(-1.2i + 0.5j + 0.1k)$$

$$\overline{T} = -1.84i + 0.77j + 0.154k$$

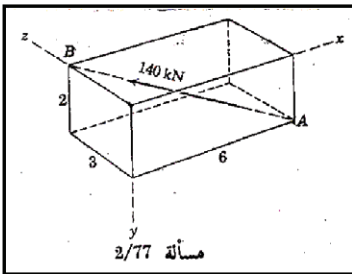
ملاحظة : يمكن إيجاد AB بطريقة غير مباشرة حيث:-

$$A (1.2, 0, 0.3)$$

$$B (0, 0.5, 0.4)$$

$$\overline{AB} = B - A = (0 - 1.2)i + (0.5 - 0)j + (0.4 - 0.3)k$$

$$\overline{AB} = -1.2i + 0.5j + 0.1k$$



2/77 تعمل القوة F ومقدارها 140kN باتجاه قطر

متوازي المستطيلات نسبة أضلاعه 6 : 3 : 2
عبر عن F كمتجه.

الحل:

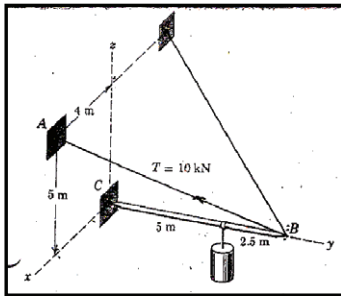
$$\overline{AB} = -6i + 3k - 2j$$

$$\overline{AB} = -6i - 2j + 3k$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = 7$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \frac{1}{7}(-6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\overline{\mathbf{F}}}{|\overline{\mathbf{F}}|} \Rightarrow \overline{\mathbf{F}} = \frac{140}{7}(-6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$$



2/78 إذا كان الشد في الكابل الساند AB يساوي

10kN . عبر عن الشد بمعادلة اتجاهية T

تؤثر على BA.

الحل:

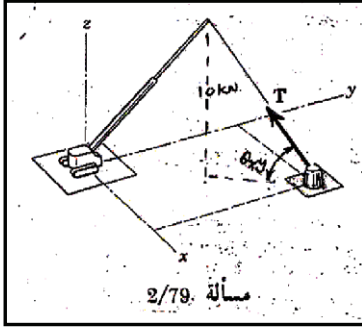
$$\overline{BA} = -7.5\mathbf{j} + 5\mathbf{k} + 4\mathbf{i}$$

$$\overline{BA} = 4\mathbf{i} - 7.5\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

$$|\overline{BA}| = \sqrt{4^2 + 7.5^2 + 5^2} = 9.86$$

$$\lambda_{BA} = \frac{\overline{BA}}{|\overline{BA}|} = \frac{1}{9.86}(4\mathbf{i} - 7.5\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$$

$$\lambda_{BA} = \frac{\overline{\mathbf{T}}}{|\overline{\mathbf{T}}|} \Rightarrow \overline{\mathbf{T}} = \frac{10}{9.86}(4\mathbf{i} - 7.5\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$$



2/79 تؤثر الرافعة على القاعدة الخرسانية بقوة شد

$T = -6i - 8j + 10k$ في الكيبل الموصل

بينهما. أحسب الزوايا المحصورة بين T

والإحداثي الموجب x وبين المستوي $x-y$.

الحل:

$$\bar{T} = -6i - 8j + 10k$$

$$\bar{T} = T_x i + T_y j + T_z k$$

$$\therefore T_x = -6 \text{ kN}, T_y = -8 \text{ kN}, T_z = 10 \text{ kN}$$

$$T = |\bar{T}| = \sqrt{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2}$$

$$T = \sqrt{6^2 + 8^2 + 10^2}$$

$$T = 14.14 \text{ kN}$$

$$T_x = T \cos \theta_x \Rightarrow \cos \theta_x = \frac{-6}{14.14}$$

$$\therefore \theta_x = 115^\circ$$

$$\therefore \sin \theta_{xy} = \frac{10}{14.14} \Rightarrow \theta_{xy} = 45^\circ$$

2/80 إذا كان مقدار القوة F يساوي 1200 N وجيب تمام اتجاهها مع

الإحداثي x يساوي 0.25 . إذا كانت النسبة بين مركبة اتجاه x إلى

مركبة اتجاه z تساوي 0.6 . أحسب قيمة F_y .

$$\frac{F_x}{F_z} = 0.6, \cos \theta_x = 0.25, F = 1200 \text{ N}$$

الجواب: معطيات السؤال هي:-

$$F_x = F \cos \theta_x = 1200(0.25) = 300 \text{ N}$$

$$\frac{F_x}{F_z} = 0.6 \Rightarrow F_z = \frac{300}{0.6} = 500 \text{ N}$$

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \Rightarrow (1200)^2 = 300^2 + F_y^2 + (500)^2$$

$$F_y = 1049 \text{ N}$$

2/81 إذا كان عمل قوة P يصنع زاوية 120° مع أحداثي x الموجب وللقوة P جيب تمام اتجاهه مع أحداثي y يساوي 0.6 فإذا كانت مركبة القوة P في اتجاه y تساوي 200N. أكتب P كمتجه.

الحل: المعطيات:- $\theta_x = 120^\circ$, $P_y = 200\text{N}$, $\cos \theta_y = 0.6$

$$P_y = P \cos \theta_y \Rightarrow P = \frac{200}{0.6} = 333.3\text{N}$$

$$P_x = P \cos \theta_x = 333.3 \cos 120^\circ = -166.65\text{N}$$

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

$$(\cos 120^\circ)^2 + (0.6)^2 + \cos^2 \theta_z = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta_z = 0.39$$

$$\cos \theta_z = 0.62$$

$$P_z = P \cos \theta_z = 333.3(0.62) = 206.64\text{N}$$

$$\vec{P} = P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}$$

$$\vec{P} = -166.65\mathbf{i} + 200\mathbf{j} + 206.64\mathbf{k}$$

2/82 جيب تمام الاتجاهات للقوة المتجهة F مع x , y هي -0.4 , 0.6 على التوالي وإذا كانت $F \cdot \mathbf{k} = 60\text{N}$. أحسب الزاوية θ_{xy} المحصورة بين F وبين المستوى x-y , وأوجد المركبة في اتجاه x للقوة F.

الحل: المعطيات:- $F_z = 60\text{N}$, $\cos \theta_y = 0.6$, $\cos \theta_x = -0.4$

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

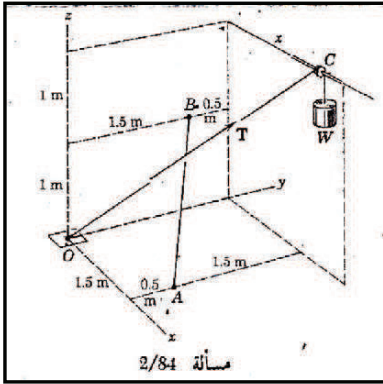
$$(-0.4)^2 + (0.6)^2 + \cos^2 \theta_z = 1 \Rightarrow \cos \theta_z = 0.693$$

$$F_z = F \cos \theta_z \Rightarrow F = \frac{60}{0.693} = 86.6\text{N}$$

$$\sin \theta_{xy} = \frac{60}{86.6} \Rightarrow$$

$$\theta_{xy} = 43.85^\circ$$

$$F_x = F \cos \theta_x = 86.6(-0.4) = -34.64\text{N}$$



2 / 84 احسب الإحداثي x للبكرة الصغيرة في نقطة c بحيث لا توجد أي مركبة للشد في الكبل OC على امتداد AB.

الحل:

السؤال ينص على أن $T_{AB}=0.0$.

$$\overline{AB} = -0.5j - 1.5i + 1k + 1.5j$$

$$\overline{AB} = -1.5i + j + k$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{1.5^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{4.25}$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{4.25}}(-1.5i + j + k)$$

$$\overline{OC} = 2k + 2j + xi$$

$$\overline{OC} = xi + 2j + 2k$$

$$|\overline{OC}| = \sqrt{x^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{x^2 + 8}$$

$$\lambda_{OC} = \frac{\overline{OC}}{|\overline{OC}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 8}}(xi + 2j + 2k)$$

$$|\overline{T}| = T \quad \lambda_{OC} = \frac{\overline{T}}{|\overline{T}|}$$

$$\overline{T} = \frac{T}{\sqrt{x^2 + 8}}(xi + 2j + 2k)$$

$$T_{AB} = \overline{T} \cdot \lambda_{AB}$$

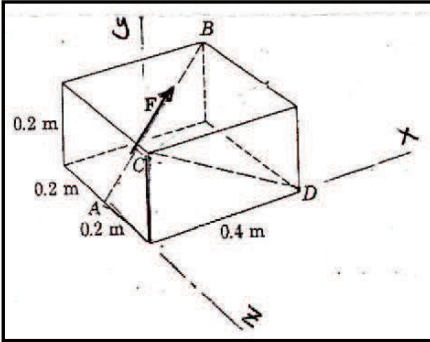
$$0.0 = \frac{T}{\sqrt{x^2 + 8}}(xi + 2j + 2k) \cdot \frac{1}{\sqrt{4.25}}(-1.5i + j + k)$$

وبضرب طرفي المعادلة في المعكوس الضربي للمعامل نحصل على:-

$$0.0 = (xi + 2j + 2k) \cdot (-1.5i + j + k)$$

$$0.0 = -1.5x + (2 \cdot 1) + (2 \cdot 1)$$

$$x = 2.67 \text{ m}$$



2/86 إذا كانت قيمة القوة F تساوي
 2 kN واتجاهها من A إلى B .
 احسب المركبة F_{CD} على طول CD

الحل:

$$\overrightarrow{CD} = 0.4\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j}$$

$$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{0.4^2 + 0.2^2} = \sqrt{0.2}$$

$$\lambda_{CD} = \frac{\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|} = \frac{1}{\sqrt{0.2}}(0.4\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j})$$

$$\overrightarrow{AB} = -0.2\mathbf{k} + 0.2\mathbf{j} + 0.4\mathbf{i}$$

$$\overrightarrow{AB} = 0.4\mathbf{i} + 0.2\mathbf{j} - 0.2\mathbf{k}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0.4^2 + 0.2^2 + 0.2^2} = \sqrt{0.24}$$

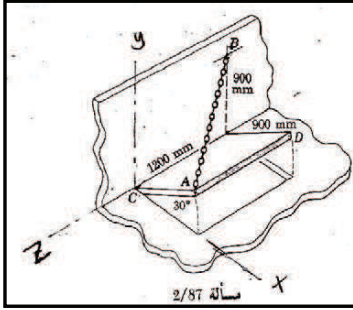
$$\lambda_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{0.24}}(0.4\mathbf{i} + 0.2\mathbf{j} - 0.2\mathbf{k})$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\overrightarrow{F}}{|\overrightarrow{F}|}$$

$$\overrightarrow{F} = \frac{2}{\sqrt{0.24}}(0.4\mathbf{i} + 0.2\mathbf{j} - 0.2\mathbf{k})$$

$$F_{CD} = \overrightarrow{F} \cdot \lambda_{CD} = \frac{2}{\sqrt{0.24}}(0.4\mathbf{i} + 0.2\mathbf{j} - 0.2\mathbf{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{0.2}}(0.4\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j})$$

$$F_{CD} = \frac{2}{\sqrt{0.24} \cdot \sqrt{0.2}}[0.4 \cdot 0.4 - 0.2 \cdot 0.2] = 1.09$$



2/87 إذا ثبت باب فتحة بزاوية 30° بواسطة السلسلة AB . وإذا كان الشد في السلسلة يساوي 100 N . أحسب مركبة الشد على طول الوتر CD للباب .

الجواب:

نوجد المعادلة الاتجاهية للمتجه AB بعد إيجاد إحداثيات A ، B طبقاً للمحاور x ، y ، z التي افترضت اتجاهاتها طبقاً لما هو موضح أعلاه.

$$A (900 \cos 30, 900 \sin 30, 0) \Rightarrow A (779, 450, 0) \\ B (0, 900, -1200)$$

$$\overline{AB} = B - A = (0 - 779)i + (900 - 450)j + (-1200 - 0)k$$

$$\overline{AB} = -779i + 450j - 1200k$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{779^2 + 450^2 + 1200^2} = 1500$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \frac{1}{1500}(-779i + 450j - 1200k)$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\overline{T}}{|\overline{T}|} \Rightarrow \boxed{\overline{T} = \frac{100}{1500}(-779i + 450j - 1200k)}$$

$$\overline{CD} = 900 \cos 30i - 1200k + 900 \sin 30j$$

$$\overline{CD} = 779i + 450j - 1200k$$

$$|\overline{CD}| = \sqrt{779^2 + 450^2 + 1200^2} = 1500$$

$$\lambda_{CD} = \frac{\overline{CD}}{|\overline{CD}|} = \boxed{\frac{1}{1500}(779i + 450j - 1200k)}$$

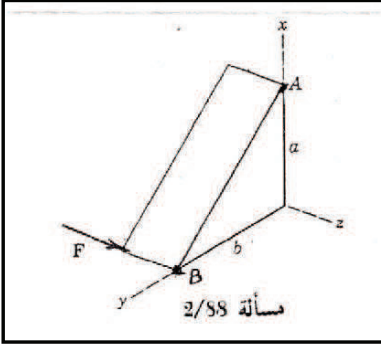
$$F_{CD} = \overline{T} \cdot \lambda_{CD} = \frac{100}{1500}(-779i + 450j - 1200k) \cdot \frac{1}{1500}(779i + 450j - 1200k)$$

$$F_{CD} = \frac{100}{1500^2}(-779^2 + 450^2 + 1200^2)$$

$$\boxed{F_{CD} = 46 \text{ N}}$$

الفصل السادس

حلول مسائل
عزم القوى الثلاثية الأبعاد



2/88 أوجد عزم القوة F حول النقطة A.

الحل

العزم بدلالة الاحداثيات الثلاثية (z, y, x) قانونه هو :

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

وهذا يعني أن حاصل الضرب الاتجاهي (cross product) لذراع القوة ($\vec{r}$) كمعادلة اتجاهية في القوة ($\vec{F}$) كمعادلة اتجاهية سنحصل على متجه ثالث عمودي على كل من r , F . المتجه الثالث هذا هو الذي يطلق عليه بعزم القوة $\vec{F}$. $\vec{r}$ كمتمجه بدايته من النقطة المطلوب إيجاد العزم حولها وينتهي عند أي نقطة تقع على خط عمل القوة $\vec{F}$:

$$\vec{r}_{AB} = -ai + bj$$

$$\vec{F} = F_x i + F_y j + F_z k$$

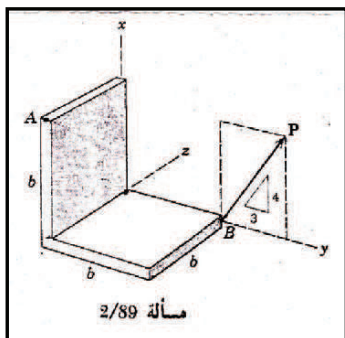
$$\vec{F} = FK$$

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AB} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a & b & 0 \\ 0 & 0 & F \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_A = i(bF - 0.0) - j(-aF - 0.0) + k(0.0 - 0.0)$$

$$\vec{M}_A = bFi + aFj = F(bi + aj)$$

2/89 أوجد عزم القوة P حول النقطة A.



مسألة 2/89

الحل:

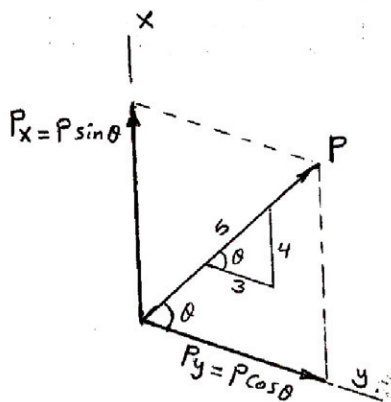
$$\vec{P} = P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k}$$

$$\vec{P} = (P \sin \theta) \vec{i} + (P \cos \theta) \vec{j} + (0.0) \vec{k}$$

$$\vec{P} = P \left(\frac{4}{5} \vec{i} + \frac{3}{5} \vec{j} \right)$$

$$\vec{r}_{AB} = -b \vec{i} + b \vec{j} + b \vec{k}$$

$$\vec{r}_{AB} = b(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

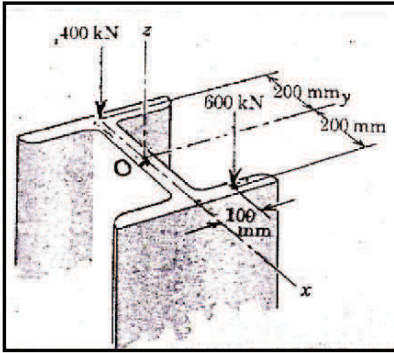


$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AB} \times \vec{P} = Pb \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_A = Pb \left[\vec{i} \left(1 \cdot 0.0 - 1 \cdot \frac{3}{5} \right) - \vec{j} \left(0.0 - \frac{4}{5} \right) + \vec{k} \left(-\frac{3}{5} - \frac{4}{5} \right) \right]$$

$$\vec{M}_A = Pb \left(-\frac{3}{5} \vec{i} + \frac{4}{5} \vec{j} - \frac{7}{5} \vec{k} \right)$$

$$\vec{M}_A = \frac{Pb}{5} (-3\vec{i} + 4\vec{j} - 7\vec{k})$$



2/90 تستخدم العارضة الفولاذية ذات المقطع H

كعمود لاسناد القوتين العموديتين كما هو موضح في الشكل. استبدل هاتين القوتين بقوة واحدة مكافئة تعمل على امتداد المحور المركزي العمودي للعمود وعزم الازدواج M.

الحل:

محصلة القوتين $\bar{R}$ هي التي تمثل القوة الواحدة المكافئة لهما. أما المجموع الجبري لعزوم القوى حول نقطة مركز العمود ($\bar{M}_O$) هو الذي يمثل عزم الازدواج (راجع حل سؤال 2/66 ، 2/70 ، 2/71).

$$\bar{R} = -400\mathbf{k} - 600\mathbf{k} = -1000\mathbf{k}$$

$$\bar{\mathbf{r}}_{400} = -200\mathbf{i}, \quad \bar{\mathbf{F}} = -400\mathbf{k}$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{400} = \bar{\mathbf{r}}_{400} \times \bar{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -400 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0.0 - 0.0) - \mathbf{j}(8 * 10^4) + \mathbf{k}(0.0)$$

$$\boxed{\bar{\mathbf{M}}_{400} = -8 * 10^4 \mathbf{j}} \quad (\text{عزم القوة 400kN حول O})$$

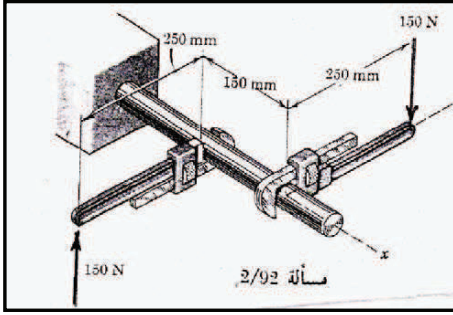
$$\bar{\mathbf{r}}_{600} = 200\mathbf{i} + 100\mathbf{j}, \quad \bar{\mathbf{F}} = -600\mathbf{k}$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{600} = \bar{\mathbf{r}}_{600} \times \bar{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 200 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & -600 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(100 * -600) - \mathbf{j}(200 * -600) + \mathbf{k}(0.0 - 0.0)$$

$$\boxed{\bar{\mathbf{M}}_{600} = -6 * 10^4 \mathbf{i} + 12 * 10^4 \mathbf{j}} \quad (\text{عزم القوة 600kN حول O})$$

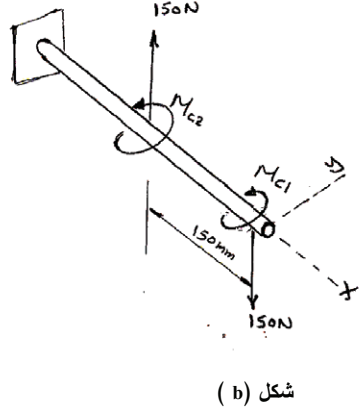
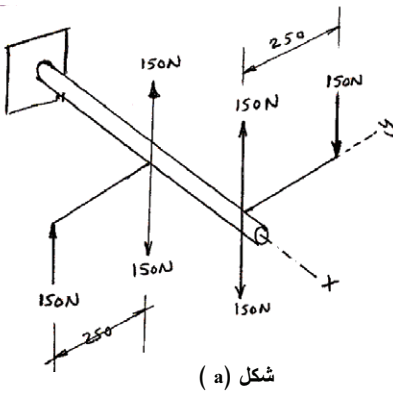
$$\bar{\mathbf{M}}_O = \bar{\mathbf{M}}_{400} + \bar{\mathbf{M}}_{600} = -8 * 10^4 \mathbf{j} - 6 * 10^4 \mathbf{i} + 12 * 10^4 \mathbf{j}$$

$$\boxed{\bar{\mathbf{M}}_O = 10^4 (-6\mathbf{i} + 4\mathbf{j})}$$



2/92 تكون القوتان اللتان تؤثران على
مقابض مفاتيح ربط الماسورة عزم
ازدواج M . عبر عن عزم الازدواج
كمتجه .

الحل:



بالاستفادة من تطبيقات عزم الازدواج يمكن حل السؤال طبقاً لما هو موضح في الأشكال أعلاه.

حيث يلاحظ في شكل (b) أن :-

$$\overline{M}_{C1} = -150(250)\mathbf{i} = -37500\mathbf{i} = -37.5\mathbf{i} \quad (\text{N.m})$$

$$\overline{M}_{C2} = -150(250)\mathbf{i} = -37500\mathbf{i} = -37.5\mathbf{i} \quad (\text{N.m})$$

يضاف إلى عزمي الازدواج هنالك عزم ازدواج ثالث يلف حول محور y :

$$\overline{M}_{C3} = 150(150)\mathbf{j} = 22500\mathbf{j} = 22.5\mathbf{j} \quad (\text{N.m})$$

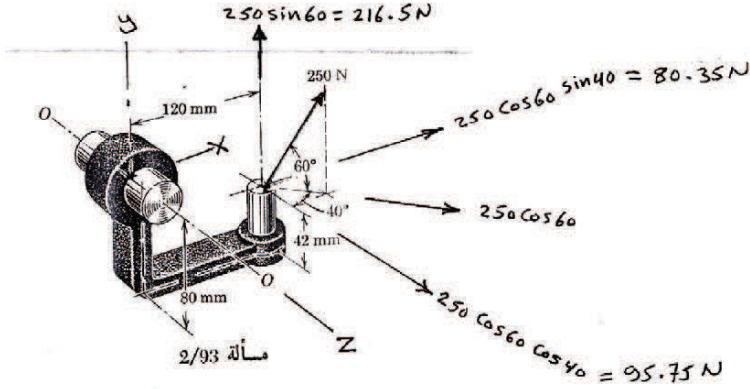
$$\therefore \overline{M} = \overline{M}_{C1} + \overline{M}_{C2} + \overline{M}_{C3}$$

$$\overline{M} = -37.5\mathbf{i} - 37.5\mathbf{i} + 22.5\mathbf{j}$$

$$\boxed{\overline{M} = -75\mathbf{i} + 22.5\mathbf{j}}$$

2/93 أحسب قيمة عزم القوة 250 N حول

المحور O-O.



الحل:-

إذا اعتبرنا أن موقع المحاور (z, y, x) طبقاً لما هو عليه في الشكل المجاور، فهذا يعني أن إيجاد العزم حول المحور (O-O) هو بمثابة إيجاد العزم حول المحور - Z. وبعد تحليل القوة (250 N) إلى مركباتها يكون:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$\vec{F} = 80.35\vec{i} + 216.5\vec{j} + 95.75\vec{k}$$

وبأخذ العزم حول نقطة الأصل يكون ذراع القوة ($\vec{r}$) من نقطة الأصل إلى نقطة تأثير القوة

بمقدار:-

$$\vec{r} = -80\vec{j} + 120\vec{i} + 42\vec{j}$$

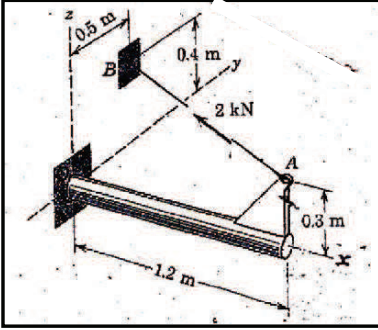
$$\vec{r} = 120\vec{i} - 38\vec{j}$$

$$\therefore \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 120 & -38 & 0 \\ 80.34 & 216.5 & 95.75 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M} = \vec{i}(-38 * 95.75) - \vec{j}(120 * 95.75) + \vec{k}(29033)$$

$$\vec{M} = -3638.5\vec{i} - 11490\vec{j} + 29033\vec{k}$$

$$\vec{M}_z = M_{o-o} = 29033 \text{ N.m}$$



2/94 أحسب عزم الشد 2kN في الكيبل

AB للمسألة 2/76 المعادلة هنا حول

محور z .

الحل:

من المسألة 2/76 فإن المعادلة الإتجاهية للمتجه

T هي:-

$$\bar{T} = -1.84i + 0.77j + 0.154k$$

$$\bar{r}_{OA} = 1.2i + 0.3k$$

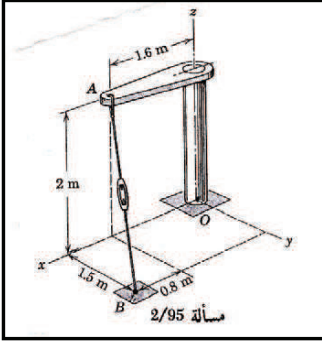
$$\bar{M}_0 = \bar{r}_{OA} \times \bar{T} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1.2 & 0 & 0.3 \\ -1.84 & 0.77 & 0.154 \end{vmatrix}$$

$$\bar{M}_0 = i(0.0 - 0.3 * 0.77) - j[1.2 * 0.154 - 0.3(-1.84)] + k(1.2 * 0.77 - 0.0)$$

$$\bar{M}_0 = -0.231i - 0.737j + 0.924k$$

$$\bar{M}_0 = M_x i + M_y j + M_z k$$

$$\therefore M_z = 0.924 \text{ kN.m} \quad (\text{يلف عكس عقرب الساعة})$$



2/95 ارسم المسألة 2/75 مرة أخرى حيث
يسلط الكبل AB قوة شد مقدارها 1.2
KN على العتلة في الاتجاه من A إلى
B . أحسب قيمة عزم هذه القوة حول
النقطة O.

الحل:

من حل المسألة 2/75 تم إيجاد المعادلة الاتجاهية لمتجه القوة T فكان:-

$$\bar{T} = 0.37\mathbf{i} + 0.69\mathbf{j} - 0.92\mathbf{k}$$

وبما أن المطلوب إيجاد عزم قوة الشد حول نقطة (O) ، إذا ذراع القوة $\bar{r}_{OB}$ من نقطة (O) إلى
أي نقطة على خط عمل القوة ولتكن (B) كمعادلة إتجاهية تكون:-

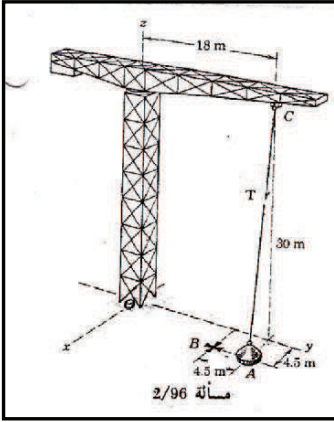
$$\bar{r}_{OB} = (1.6 + 0.8)\mathbf{i} + 1.5\mathbf{j}$$

$$\bar{r}_{OB} = 2.4\mathbf{i} + 1.5\mathbf{j}$$

$$\bar{M}_O = \bar{r}_{OB} \times \bar{T} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2.4 & 1.5 & 0 \\ 0.37 & 0.69 & -0.92 \end{vmatrix}$$

$$\bar{M}_O = \mathbf{i}(-1.38) - \mathbf{j}(-2.208) + \mathbf{k}(1.101)$$

$$\bar{M}_O = -1.38\mathbf{i} + 2.208\mathbf{j} + 1.101\mathbf{k}$$



2/96 تتولد قوة شد T مقدارها 21 kN عند رفع الثقل من الوضع A . احسب العزم الذي يولده T حول القاعدة O للرافعة.

الحل:

$$\overline{CA} = 4.5\mathbf{i} - 30\mathbf{k}$$

$$|\overline{CA}| = \sqrt{4.5^2 + 30^2} = 30.33$$

$$\lambda_{CA} = \frac{\overline{CA}}{|\overline{CA}|} = \frac{1}{30.33} (4.5\mathbf{i} - 30\mathbf{k})$$

$$\lambda_{CA} = \frac{\overline{T}}{|\overline{T}|}$$

$$\overline{T} = \frac{21}{30.33} (4.5\mathbf{i} - 30\mathbf{k})$$

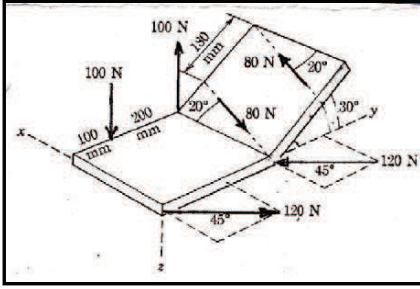
$$\overline{r}_{OA} = 4.5\mathbf{i} + 18\mathbf{j}$$

$$\overline{M}_o = \overline{r}_{OA} \times \overline{T} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4.5 & 18 & 0 \\ 4.5 & 0 & -30 \end{vmatrix} \frac{21}{30.33}$$

$$\overline{M}_o = \frac{21}{30.33} [\mathbf{i}(18 \cdot -30 - 0 \cdot 0) - \mathbf{j}(4.5 \cdot -30 - 0 \cdot 0) + \mathbf{k}(0 \cdot 0 - 18 \cdot 4.5)]$$

$$\overline{M}_o = \frac{21}{30.33} [-540\mathbf{i} + 135\mathbf{j} - 81\mathbf{k}]$$

$$\overline{M}_o = -374\mathbf{i} + 93.5\mathbf{j} - 56.1\mathbf{k}$$



2/98 تكون الازدواجيات الثلاثة للقوى
المتساوية والمتعاكسة ثلاثة عزوم
ازدواج. أوجد المحصلة M لعزوم
الازدواج الثلاثة.

الحل:

عزم الازدواج الناتج من القوة 100N هو :-

$$\bar{M}_{100} = -100(200)\mathbf{i} = -20\mathbf{i} \quad (\text{N.m})$$

بعد تحليل القوى 120N كما يظهر ذلك في الشكل (a) ، فإن عزم الازدواج الناتج من المركبات
هو :- $(120 \cos 45)$

$$\bar{M}_{120 \cos 45} = -120 \cos 45(300)\mathbf{k} = -25.45\mathbf{k} \quad (\text{N.m})$$

بالنسبة للقوى (80N) إذا اعتبرنا عزمها يساوي 80(180) فهذا غير صحيح لأن البعد 180 لم يكن
عمودي على اتجاه القوتين كي يمثل الذراع . لذا يجب تحليله وعنده عزم الازدواج الناتج للمركبات
هو :- $(80 \cos 20)$

$$M_{80} = 80 \cos 20(180) = 13.53 \quad (\text{N.M})$$

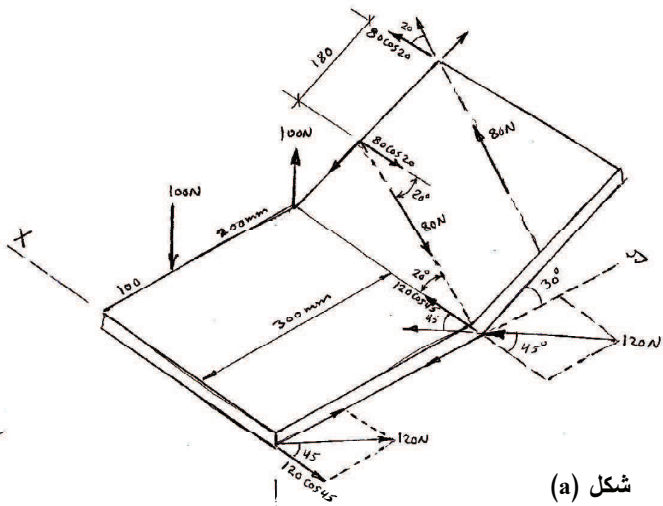
العزم الأخير هذا يلف عكس عقرب الساعة باتجاه عمودي على المستوى المائل بزاوية 30° عن
المحور y. لذا يجب تحليله باتجاه المحاور الثلاث وكما في الشكل (b).

$$\bar{M}_{80} = -13.53 \cos 60\mathbf{j} - 13.53 \sin 60\mathbf{k}$$

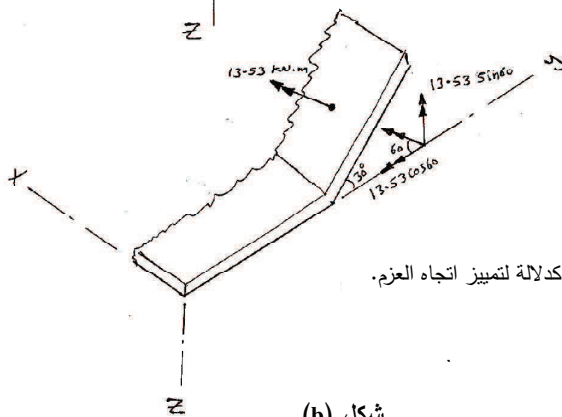
$$\bar{M}_{80} = -6.765\mathbf{j} - 11.717\mathbf{k}$$

$$\bar{M} = \bar{M}_{100} + \bar{M}_{120 \cos 45} + \bar{M}_{80} = -20\mathbf{i} - 25.45\mathbf{k} - 6.76\mathbf{kj} - 11.717\mathbf{k}$$

$$\bar{M} = -20\mathbf{i} - 6.765\mathbf{j} - 37.167\mathbf{k}$$



شكل (a)

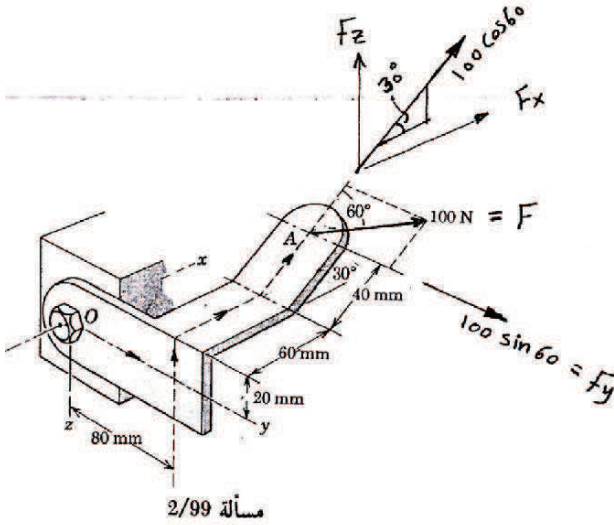


شكل (b)

ملاحظة:

السهم المزدوج هو كدلالة لتمييز اتجاه العزم.

2/99 أحسب قيمة عزم القوة 100N على الحامل في A حول المحور x، وكذلك أوجد المعادلة الموجهة لعزم القوة حول النقطة O وبدون استخدام طريقة الضرب بالنقاط.



مركبات القوة $F=100\text{ N}$ باتجاه المحاور x, y, z هي:-

$$F_x = 100 \cos 60 \cos 30 = 43.30 \text{ N}$$

$$F_y = 100 \sin 60 = 86.6 \text{ N}$$

$$F_z = 100 \cos 60 \sin 30 = 25 \text{ N}$$

$$\vec{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} = 43.30\mathbf{i} + 86.6\mathbf{j} - 25\mathbf{k}$$

ذراع القوة ($\vec{r}_{OA}$) كمتجه من نقطة (O) إلى نقطة A (تتبع اتجاه الأسهم في الشكل أعلاه) هو:

$$\vec{r}_{OA} = 80\mathbf{j} - 20\mathbf{k} + 60\mathbf{i} + (40 \cos 30)\mathbf{i} - (40 \sin 30)\mathbf{k}$$

$$\vec{r}_{OA} = 94.64\mathbf{i} + 80\mathbf{j} - 40\mathbf{k}$$

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{OA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 94.64 & 80 & -40 \\ 43.30 & 86.6 & -25 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_O = \mathbf{i}(1464) - \mathbf{j}(-634) + \mathbf{k}(4732)$$

$$\vec{M}_O = 1464\mathbf{i} + 634\mathbf{j} + 4732\mathbf{k}$$

$$\therefore M_x = 1464 \text{ N.mm}$$

2/101 إذا مرت القوة 50 kN من خلال نقطة P ذات الأبعاد (x, y, z) (-5, 2, 3) بالمليمترات وتتناسب متجهات جيوب التمام مع 9, 6, 2. أحسب العزم M للقوة حول نقطة ذات الإحداثيات بالمليمترات C(2,2,-3).

الحل :

$$\frac{\cos \theta_x}{\cos \theta_y} = \frac{2}{6} \Rightarrow \cos \theta_x = \frac{2}{6} \cos \theta_y$$

$$\frac{\cos \theta_y}{\cos \theta_z} = \frac{6}{9} \Rightarrow \cos \theta_z = \frac{9}{6} \cos \theta_y$$

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

$$\left(\frac{2}{6} \cos \theta_y \right)^2 + \cos^2 \theta_y + \left(\frac{9}{6} \cos \theta_y \right)^2 = 1$$

$$\cos \theta_y = 0.545$$

$$\cos \theta_x = \frac{2}{6} \cos \theta_y = \frac{2}{6} (0.545) = 0.181$$

$$\cos \theta_z = \frac{9}{6} \cos \theta_y = \frac{9}{6} (0.545) = 0.817$$

$$F_x = F \cos \theta_x = 50(0.181) = 9.05 \text{ kN}$$

$$F_y = F \cos \theta_y = 50(0.545) = 27.25 \text{ kN}$$

$$F_z = F \cos \theta_z = 50(0.817) = 40.85 \text{ kN}$$

$$\vec{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$$

$$\vec{F} = 9.05\mathbf{i} + 27.25\mathbf{j} + 40.85\mathbf{k}$$

ذراع القوة ($\vec{r}_{cp}$) يعني المعادلة الاتجاهية الناتجة من حاصل طرح إحداثيات P من نظيرتها

إحداثيات نقطة C (راجع حل سؤال 2/75).

$$\vec{r}_{cp} = (3-2)\mathbf{i} + (2-2)\mathbf{j} + (-5+3)\mathbf{k}$$

$$\vec{r}_{cp} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$$

$$\vec{M}_c = \vec{r}_{cp} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 9.05 & 27.25 & 40.85 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(54.5) - \mathbf{j}(58.95) + \mathbf{k}(27.25)$$

$$\vec{M}_c = 54.5\mathbf{i} - 58.95\mathbf{j} + 27.25\mathbf{k}$$

2/102 إذا كانت القوة ($F=100\text{N}$) تمر من النقطتين A, B، وبترتيب من A إلى B ، وإذا كانت الإحداثيات (x, y, z) للنقطتين A, B بالأمتار هي (4, -1, -3) ، (5, 4, 3) على التوالي . أحسب العزم M للقوة حول النقطة C ذات الإحداثيات بالأمتار هي (1, -2, 2).

الحل:

المتجه $\overline{AB}$ يمكن الحصول عليه من خلال طرح إحداثيات B نظيرتها إحداثيات A بمعنى :-
A(-3, -1, 4) , B(3, 4, 5)

$$\overline{AB} = B - A = (3+3)\mathbf{i} + (4+1)\mathbf{j} + (5-4)\mathbf{k}$$

$$\overline{AB} = 6\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k} \Rightarrow |\overline{AB}| = \sqrt{6^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{62}$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\overline{AB}}{AB} = \frac{1}{\sqrt{62}}(6\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\overline{F}}{F} \Rightarrow \overline{F} = \frac{100}{\sqrt{62}}(6\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

ذراع القوة ($\overline{r}_{CB}$) حول نقطة (C) هو عبارة عن المسافة في (C) إلى أي نقطة على خط عمل القوة ولتكن النقطة (B) . إذاً:

$$C(2, -2, 1) , B(3, 4, 5)$$

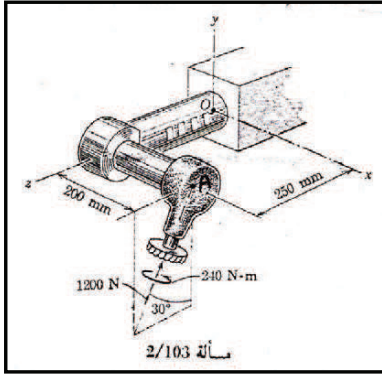
$$\overline{r}_{CB} = B - C = (3-2)\mathbf{i} + (4+2)\mathbf{j} + (5-1)\mathbf{k}$$

$$\overline{r}_{CB} = \mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

$$\overline{M}_c = \overline{r}_{CB} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix} \frac{100}{\sqrt{62}}$$

$$\overline{M}_c = \frac{100}{\sqrt{62}}[\mathbf{i}(-14) - \mathbf{j}(-23) + \mathbf{k}(-31)]$$

$$\overline{M}_c = \frac{100}{\sqrt{62}}(-14\mathbf{i} + 23\mathbf{j} - 31\mathbf{k})$$



2/103 إذا سلطت القوة 1200 N على سكين فارزة خاصة مع عزم ازدواج 240 N.m كما هو موضح في الشكل. احسب العزم في هذا النظام حول نقطة O.

الحل: كل عزوم القوى الفردية تُحسب حول نقطة O.

$$\bar{M}_{240} = 240 \sin 60j - 240 \cos 60k$$

$$\bar{M}_{240} = 207.84j - 120k$$

$$\bar{F} = 1200 \sin 60j - 1200 \cos 60k$$

$$\bar{F} = 1039j - 600k$$

$$\bar{r}_{OA} = 200i + 250k$$

$$\bar{M}_{1200} = \bar{r}_{OA} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 200 & 0 & 250 \\ 0 & 1039 & -600 \end{vmatrix}$$

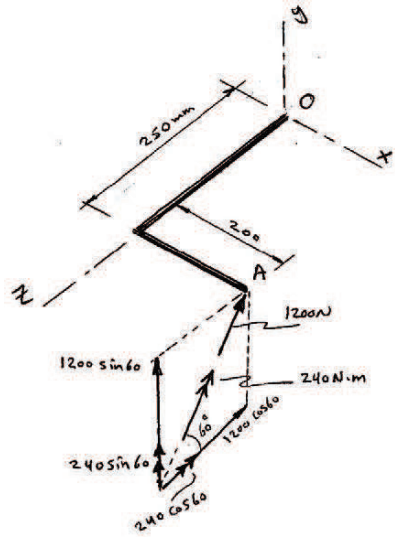
$$\bar{M}_{1200} = i(-250 * 1039) + j(200 * 600) + k(200 * 1039)$$

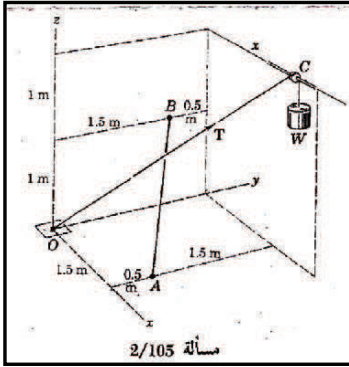
$$\bar{M}_{1200} = -259.75i + 120j + 207.8k$$

$$\bar{M}_O = \bar{M}_{240} + \bar{M}_{1200}$$

$$\bar{M}_O = 207.84j - 120k - 259.75i + 120j + 207.8k$$

$$\bar{M}_O = -259.75i + 327.84j + 87.8k$$





2/105 لقد كرر شكل المسألة 2/84 هنا. فإذا كان الشد في الكيبل يساوي 2kN . أحسب قيمة عزم الشد حول المحور AB لوضع البكرة C عندما تكون $x=2.67\text{m}$.

الحل:

لإيجاد عزم أي قوة حول خط معين،

$$M = (\bar{r} \times \bar{F}) \cdot \lambda \quad \text{يطبق القانون التالي:}$$

حيث أن: λ = معادلة متجه وحدة (Unit vector equation) للخط.

$\bar{r}$ = ذراع القوة كمتجه يبدأ من أي نقطة على الخط (المطلوب حساب العزم حوله)

وينتهي عند أي نقطة واقعة على خط عمل القوة.

$\bar{F}$ = القوة كمعادلة اتجاهية.

M = العزم حول الخط كقيمة عددية . وبناءً على ذلك فإن المطلوب في السؤال هو

$$M_{AB} = (\bar{r}_{AO} \times \bar{F}) \cdot \lambda_{AB} \quad \text{إيجاد } (M_{AB}) \text{ حيث:}$$

$$\overline{AB} = -1.5\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{1.5^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{4.25}$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{4.25}}(-1.5\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = -0.727\mathbf{i} + 0.485\mathbf{j} + 0.485\mathbf{k}$$

$$\bar{r}_{AO} = -1.5\mathbf{i} - 0.5\mathbf{j}$$

$$\overline{OC} = 2.67\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$|\overline{OC}| = \sqrt{15.12} = 3.89$$

$$\lambda_{OC} = \frac{\overline{OC}}{|\overline{OC}|} = \frac{1}{3.89}(2.67\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 0.686\mathbf{i} + 0.514\mathbf{j} + 0.514\mathbf{k}$$

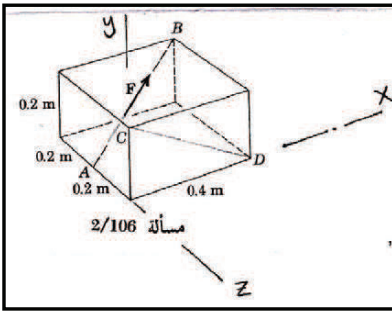
$$\lambda_{OC} = \frac{\bar{T}}{T} \Rightarrow \bar{T} = 2(0.686\mathbf{i} + 0.514\mathbf{j} + 0.514\mathbf{k})$$

$$\bar{T} = 1.372\mathbf{i} + 1.028\mathbf{j} + 1.028\mathbf{k}$$

$$M_{AB} = (\bar{r}_{AO} \times \bar{T}) \cdot \lambda_{AB} = \begin{vmatrix} -1.5 & -0.5 & 0 \\ 1.372 & 1.028 & 1.028 \\ -0.727 & 0.485 & 0.485 \end{vmatrix}$$

$$M_{AB} = -1.5(1.028 * 0.485 - 1.028 * 0.485) - (-0.5)(1.372 * 0.485 + 1.028 * 0.727) + (0.0)$$

$$M_{AB} = 0.0 + 0.706 + 0.0 \Rightarrow \boxed{M_{AB} = 0.706}$$



2/106 أعيد رسم شكل المسألة 2/86 مرة أخرى، فإذا كانت قيمة عزم القوة F حول الخط CD تساوي 50N.m أحسب قيمة F.

الحل:

$$M_{CD} = (\bar{r}_{CA} \times \bar{F}) \cdot \lambda_{CD} = 50 \quad \text{من معطيات المسألة فإن: -}$$

$$\lambda_{CD} = \frac{1}{\sqrt{0.2}}(0.4i - 0.2j) \quad \text{بالرجوع إلى المسألة 2/86 يلاحظ أن: -}$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\bar{F}}{F}$$

$$\bar{F} = \frac{F}{\sqrt{0.24}}(0.4i + 0.2j - 0.2k)$$

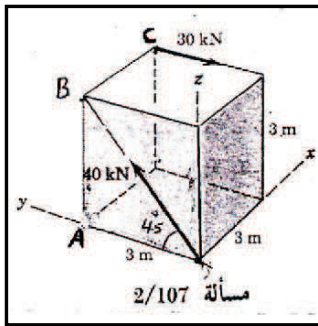
$$\bar{r}_{CA} = -0.2j - 0.2k$$

$$M_{CD} = \begin{vmatrix} 0 & -0.2 & -0.2 \\ 0.4 & 0.2 & -0.2 \\ 0.4 & -0.2 & 0 \end{vmatrix} \frac{F}{\sqrt{0.24} * \sqrt{0.2}} = 50 \quad \text{بالرجوع إلى المعادلة أعلاه فإن: -}$$

$$M_{CD} = \frac{F}{\sqrt{0.24} * \sqrt{0.2}} \{0.0 - (-0.2)[0.4 * 0.0 - (-0.2 * 0.4)] + (-0.2)[0.4 * (-0.2) - 0.2 * 0.4]\} = 50$$

$$\therefore \frac{F}{\sqrt{0.24} * \sqrt{0.2}} (0.016 + 0.032) = 50$$

$$\therefore F = 228 \text{ N}$$



2/107 استبدل القوتين المطبقتين على مكعب طول

ضلعه 3m بقوة واحدة مكافئة F تمر بالنقطة

A مع عزم ازدواج M.

الحل:

$$\bar{F} = -30\mathbf{j} + 40 \cos 45\mathbf{j} + 40 \sin 45\mathbf{k}$$

$$\bar{F} = -1.72\mathbf{j} + 28.28\mathbf{k}$$

$$\bar{M}_{40} = \bar{r}_{AB} \times \bar{F} = (3\mathbf{k}) \times (40 \cos 45\mathbf{j} + 40 \sin 45\mathbf{k})$$

$$\bar{M}_{40} = 40 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0.707 & 0.707 \end{vmatrix} = 40[\mathbf{i}(0.0 - 3 * 0.707) - \mathbf{j}(0.0) + \mathbf{k}(0.0 - 0.0)]$$

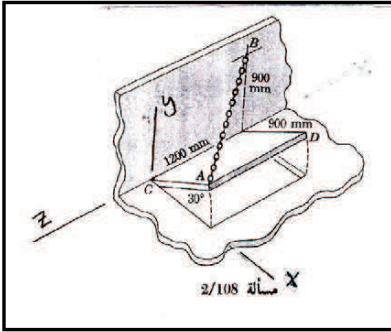
$$\bar{M}_{40} = -84.84\mathbf{i}$$

$$\bar{M}_{30} = \bar{r}_{AC} \times \bar{F} = (3\mathbf{i} + 3\mathbf{k}) \times (-30\mathbf{j}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & -30 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\bar{M}_{30} = \mathbf{i}(0.0 + 3 * 30) - \mathbf{j}(0.0 - 0.0) + \mathbf{k}(3 * -30 - 0.0)$$

$$\bar{M}_{30} = 90\mathbf{i} - 90\mathbf{k}$$

$$\therefore \bar{M} = \bar{M}_{40} + \bar{M}_{30} = -84.84\mathbf{i} + 90\mathbf{i} - 90\mathbf{k} = 5.16\mathbf{i} - 90\mathbf{k}$$



2/108 يوضح الشكل باب فتحة المسألة

2/87 فإذا كان الشد في السلسلة AB

يساوي 100N أوجد قيمة عزم الشد M

حول مفصل المحور.

الحل:

إذا اعتبر اتجاه المحاور x, y, z طبقاً لما هو عليه في الشكل أعلاه، فإن إيجاد عزم الشد M

حول مفصل المحور يعني إيجاد العزم حول المحور - (Mz) .

من المسألة 2/87 فإن:-

$$\vec{T} = \frac{100}{1500}(-779\mathbf{i} + 450\mathbf{j} - 1200\mathbf{k})$$

ذراع قوة الشد T حول نقطة الأصل - C هو $\vec{r}_{CA}$ حيث معادلته الاتجاهية:-

$$\vec{r}_{CA} = (900 \cos 30^\circ)\mathbf{i} + (900 \sin 30^\circ)\mathbf{j}$$

$$\vec{r}_{CA} = 779\mathbf{i} + 450\mathbf{j}$$

$$\therefore \vec{M}_C = \vec{r}_{CA} \times \vec{T} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 779 & 450 & 0 \\ -779 & 450 & -1200 \end{vmatrix} \frac{100}{1500}$$

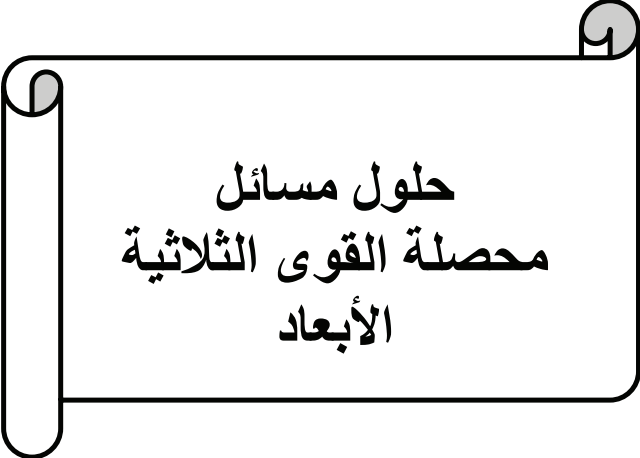
$$\vec{M}_C = \frac{100}{1500} [\mathbf{i}(54 \cdot 10^4) - \mathbf{j}(-934800) + \mathbf{k}(701100)]$$

$$\vec{M}_C = 36 \cdot 10^3 \mathbf{i} + 62320\mathbf{j} + 46740\mathbf{k}$$

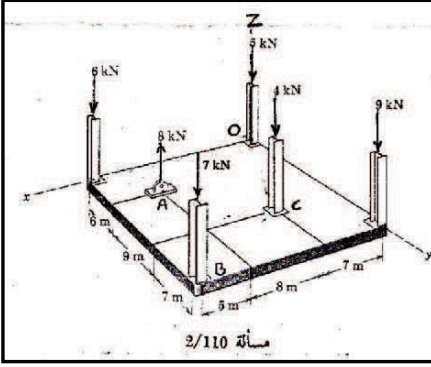
$$\vec{M}_C = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}$$

$$\therefore M_z = 46740 \text{ N.mm} = 46.74 \text{ kN.m}$$

الفصل السابع



حلول مسائل
محصلة القوى الثلاثية
الأبعاد



2/110 تسند البلاطة من الأسمنت الأحمال

الستة العمودية كما هو موضح في الشكل .

أوجد محصلة القوى والإحداثيات x و y

لنقطة تأثيرها .

الحل:

$$\bar{R} = -5k - 4k - 9k - 7k + 8k - 6k$$

$$\boxed{\bar{R} = -23k}$$

سبق أن تم التعرف إلى أن عزم المحصلة R حول نقطة معينة = مجموع عزوم القوى الفردية حول نفس النقطة. ولتكن النقطة هذه هي نقطة الأصل (O). إذا المطلوب هو التعرف على إحداثي موقع المحصلة بالنسبة لنقطة الأصل من خلال القانون ($\bar{R} \times \bar{D} = \bar{M}_O$) الذي سبق تطبيقه على القوى الثنائية الأبعاد.

$$\bar{M}_5 = 0.0 \quad (\text{كون القوة تمر بنقطة الأصل})$$

$$\bar{M}_6 = 6(5 + 8 + 7)j = 120j$$

$$\bar{M}_9 = -9(7 + 9 + 6)i = -198i$$

$$\bar{M}_8 = \bar{r}_{OA} \times \bar{F} = (15i + 6j) \times (8k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 15 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\bar{M}_8 = i(48 - 0) - j(120) + k(0.0)$$

$$\boxed{\bar{M}_8 = 48i - 120j}$$

$$\bar{M}_7 = \bar{r}_{OB} \times \bar{F} = (20i + 22j) \times (-7k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 20 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\bar{M}_7 = i(-154) - j(-140) + k(0.0)$$

$$\boxed{\bar{M}_7 = -154i + 140j}$$

$$\overline{M}_4 = \overline{r}_{OC} \times \overline{F} = (7i + 15j) \times (-4k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 7 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\overline{M}_4 = i(-60) - j(-28) + k(0.0)$$

$$\boxed{\overline{M}_4 = -60i + 28j}$$

$$\overline{M}_o = \overline{M}_s + \overline{M}_6 + \overline{M}_9 + \overline{M}_8 + \overline{M}_7 + \overline{M}_4$$

$$\overline{M}_o = 0.0 + 120j - 198i + 48i - 120j - 154i + 140j - 60i + 28j$$

$$\boxed{\overline{M}_o = -364i + 168j} \quad (\text{مجموع عزوم القوى الفردية حول O})$$

المعادلة الاتجاهية لذراع محصلة القوى $\overline{D}$ هي:-

$$\overline{D} = xi + yj + zk$$

$$\overline{D} \times \overline{R} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 0 & 0 & -23 \end{vmatrix} = i(-23y) - j(-23x) + k(0.0)$$

$$\boxed{\overline{D} \times \overline{R} = (-23y)i + (23x)j}$$

عزم المحصلة R حول نقطة الأصل

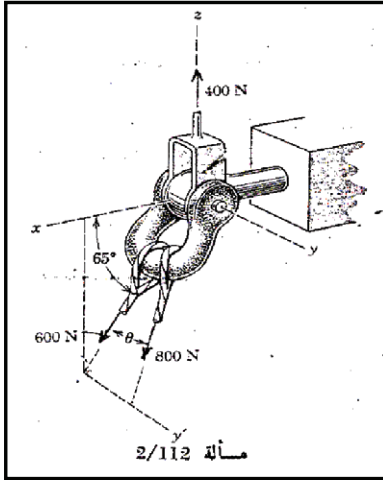
$$\boxed{\overline{D} \times \overline{R} = \overline{M}_o}$$

$$(-23y)i + (23x)j = -364i + 168j$$

وبمساواة (i مع i) و (j مع j) نحصل على قيم إحداثيات موقع المحصلة R:

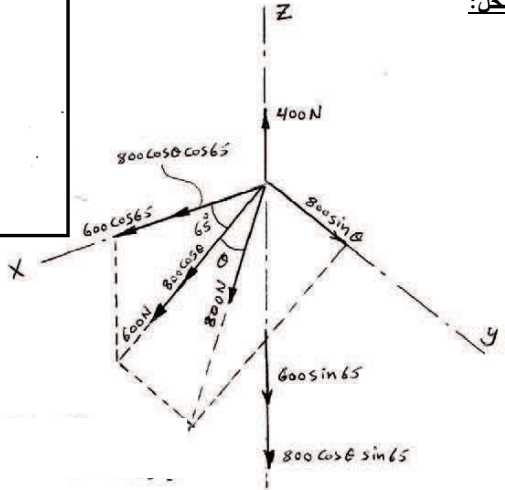
$$-23y = -364 \Rightarrow y = 15.83 \text{ m}$$

$$23x = 168 \Rightarrow x = 7.30 \text{ m}$$



2/112 أوجد الزاوية θ بحيث تكون قيمة القوة الناتجة باتجاه الأسفل والمؤثرة على مسمار ذي عروة تساوي 750 N . أوجد قيمة محصلة القوى الثلاث وجيب تمام الاتجاهات.

الحل:



بعد تحليل القوى 600N، 800N إلى مركباتها باتجاه المحاور x, y, z كما مبين في الشكل المجاور فأن:-

$$\Sigma F_z = R_z = 400 - 600 \sin 65 - 800 \cos \theta \sin 65$$

$$R_z = -143.78 - 725 \cos \theta$$

$$-750 = -143.78 - 725 \cos \theta \Rightarrow \theta = 33.26^\circ$$

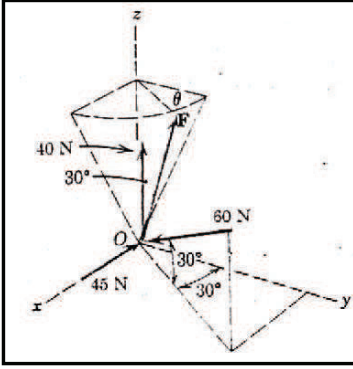
$$\bar{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k}$$

$$\bar{R} = (600 \cos 65 + 800 \cos 33.26 \cos 65) \mathbf{i} + 800 \sin 33.26 \mathbf{j} + (400 - 600 \sin 65 - 800 \cos 33.26 \sin 65) \mathbf{k}$$

$$\bar{R} = 536.28 \mathbf{i} + 438.75 \mathbf{j} - 750.06 \mathbf{k} \Rightarrow R = |\bar{R}| = 1021 \text{ N}$$

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R} = \frac{536.28}{1021} = 0.525, \quad \cos \theta_y = \frac{R_y}{R} = \frac{438.75}{1021} = 0.429$$

$$\cos \theta_z = \frac{R_z}{R} = \frac{-750.06}{1021} = -0.734$$



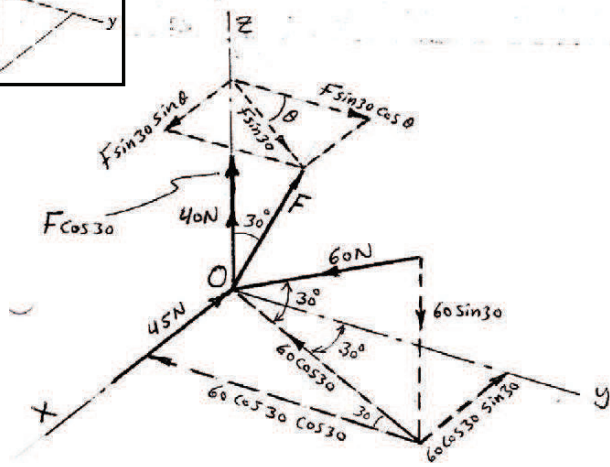
2/113 تلتنقي القوى الأربع في مركز الإحداثيات O.

إذا كانت المركبة باتجاه x للمحصلة R تساوي

50 N والمركبة باتجاه z تساوي 100 N أوجد

R, θ, F

الحل:



بعد تحليل القوى 60 N، F إلى مركباتها باتجاه المحاور (z, y, x) فإن :-

$$\Sigma F_x = R_x = -45 + F \sin 30 \sin \theta - 60 \cos 30 \sin 30$$

$$-50 = 0.5F \sin \theta - 70.98 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\Sigma F_z = R_z = 40 + F \cos 30 - 60 \sin 30$$

$$100 = 10 + F \cos 30 \Rightarrow F = 104 \text{ N}$$

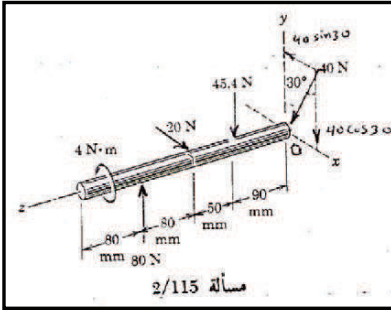
وبتعويض قيمة F في المعادلة (1) نحصل على قيمة $\theta = 23.8^\circ$.

$$\bar{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k}$$

$$\bar{R} = (-45 + 104 \sin 30 \sin 23.8 - 60 \cos 30 \sin 30) +$$

$$(-60 \cos 30 \cos 30 + 104 \sin 30 \cos 23.8) \mathbf{j} + (40 + 104 \cos 30 - 60 \sin 30) \mathbf{k}$$

$$\boxed{R = -50\mathbf{i} + 2.578\mathbf{j} + 100\mathbf{k}}$$



2/115 أوجد المحصلة للقوى الأربع وعزم
الازدواج المؤثرة على مسند العمود
(O).

الحل:

$$\vec{R} = 20\mathbf{i} - 40\sin 30^\circ\mathbf{j} - 45.4\mathbf{j} - 40\cos 30^\circ\mathbf{j} + 80\mathbf{j}$$

$$\vec{R} = 0.0$$

لنأخذ العزوم عند نقطة الأصل O:-

$$\vec{M}_{45.4} = 45.4(90)\mathbf{i} = 4086\mathbf{i} = 4.086\mathbf{i} \quad (\text{N.m})$$

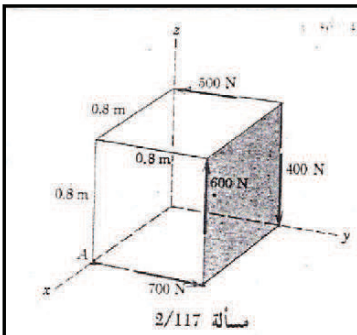
$$\vec{M}_{20} = 20(50 + 90)\mathbf{j} = 2800\mathbf{j} = 2.8\mathbf{j} \quad (\text{N.m})$$

$$\vec{M}_{80} = -80(80 + 50 + 90)\mathbf{i} = -17600\mathbf{i} = -17.6\mathbf{i} \quad (\text{N.m})$$

$$\vec{M}_4 = 4\mathbf{k}$$

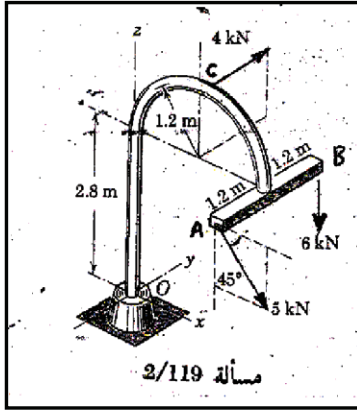
$$\vec{M}_O = 4.086\mathbf{i} + 2.8\mathbf{j} - 17.6\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$$

$$\vec{M}_O = -13.51\mathbf{i} + 2.8\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$



2/117 تؤثر القوى الأربع في الشكل على حافات
المكعب طول كل منها 0.8m عوض عن هذه
القوى بقوة واحد R من النقطة A وعزم
ازدواج M.

الحل: يمكن الاستفادة من فكرة حل سؤال 2/107 وتطبيقها لحل هذه المسألة. يترك الحل للطلاب.



2/119 يمكن إيجاد مفعول القوى الثلاث سوية على القاعدة في النقطة O إذا أوجدنا محصلتها في النقطة O. أوجد قيم المحصلة R وعزم الازدواج M.

الحل:

$$\bar{R} = 5 \cos 45i - 5 \sin 45k - 6k + 4j$$

$$\bar{R} = 3.53i + 4j - 9.53k$$

$$R = \sqrt{3.53^2 + 4^2 + 9.53^2} = 10.93 \text{ kN}$$

بأخذ العزوم عند نقطة (O):

$$\bar{M}_5 = \bar{r}_{OA} \times \bar{F}$$

$$\bar{M}_5 = (2.4i - 1.2j + 2.8k) \times (5 \cos 45i - 5 \sin 45k)$$

$$\bar{M}_5 = 5 \cos 45 \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2.4 & -1.2 & 2.8 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3.53[i(1.2) - j(-2.4 - 2.8) + k(1.2)]$$

$$\bar{M}_5 = 4.24i + 18.36j + 4.24k$$

$$\bar{M}_4 = \bar{r}_{OC} \times \bar{F} = (1.2i + 4k) \times 4j = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1.2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\bar{M}_4 = i(-16) - j(0.0) + k(4.8)$$

$$\therefore \bar{M}_4 = -16i + 4.8k$$

$$\bar{M}_6 = \bar{r}_{OB} \times \bar{F} = (2.4i + 1.2j + 2.8k) \times (-6k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2.4 & 1.2 & 2.8 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= i(-7.2) - j(-14.4) + k(0.0)$$

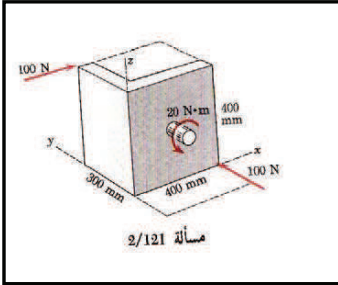
$$\therefore \bar{M}_6 = -7.2i + 14.4j$$

$$\therefore \bar{M}_O = 4.24i + 18.36j + 4.24k - 16i + 4.8k - 7.2i + 14.4j$$

$$\overline{M}_O = -18.96i + 32.76j + 9.04k$$

$$|\overline{M}_O| = M_O = \sqrt{18.96^2 + 32.76^2 + 9.04^2}$$

$$\therefore M_O = 38.9 \text{ kN.m}$$



2/121 يمكن تمثيل القوتين وعزم الازدواج بمحصلة

ربط. أوجد المعادلة الاتجاهية لعزم الربط M ،

وأوجد إحداثيات النقطة P في المستوى $x-z$

التي تمر منها محصلة قوة الربط.

الحل:

الطريقة الأولى:

$$\overline{R} = 100i + 100j$$

$$R = \sqrt{100^2 + 100^2} = 100\sqrt{2} \text{ N}$$

نحسب عزوم القوى الفردية حول نقطة O :

$$\overline{M}_{100} = 100(400)k = 40k \text{ (N.m)}$$

$$\overline{M}_{100} = \vec{r}_{OA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0.3 & 0.4 \\ 100 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 40j - 30k$$

$$\overline{M} = -20j$$

$$\overline{M}_O = -20j + 40k + 40j - 30k = 20j + 10k$$

يمكن تحليل العزم $\overline{M}_O$ إلى مركبتين أحدهما باتجاه المحصلة R ويرمز له بـ $\overline{M}_{OR}$ والمركبة

الأخرى عمودية على R ويرمز لها بـ $\overline{M}_{ON}$ بمعنى أن:-

$$\overline{M}_O = \overline{M}_{OR} + \overline{M}_{ON}$$

M_{OR} هي التي يطلق عليها بعزم الربط والذي يمكن التعرف على قيمته العددية من:-

$$M_{OR} = \overline{M}_O \cdot \lambda_R$$

وبالتالي التعرف على قيمته أو معادلته الاتجاهية حيث:

$$\lambda_R = \frac{\overline{M}_{OR}}{|\overline{M}_{OR}|}$$

$$\bar{R} = 100i + 100j \Rightarrow R = 100\sqrt{2} \text{ N}$$

$$\lambda_R = \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|} = \frac{1}{100\sqrt{2}}(100i + 100j) = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j)$$

$$M_{OR} = \bar{M}_O \cdot \lambda_R = (20j + 10k) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j)$$

$$M_{OR} = \frac{20}{\sqrt{2}}$$

$$\lambda_R = \frac{\bar{M}_{OR}}{|\bar{M}_{OR}|} \Rightarrow \bar{M}_{OR} = \frac{20}{\sqrt{2}}(i + j)$$

$$\therefore \bar{M}_{OR} = 10i + 10j \quad (\text{عزم الربط})$$

ولو طلب في السؤال مركبة M_O العمودية على المحصلة $\bar{M}_{ON}$ فإن:-

$$\bar{M}_O = \bar{M}_{OR} + \bar{M}_{ON}$$

$$\bar{M}_{ON} = \bar{M}_O - \bar{M}_{OR} = 20j + 10k - (10i + 10j)$$

$$\therefore \bar{M}_{ON} = -10i + 10j + 10k$$

الآن يمكن التعرف على إحداثيات النقطة P في المستوى x-z التي تمر منها محصلة قوى الربط من

خلال:-

$$\bar{M}_{OR} = \bar{M}_O - \bar{r} \times \bar{R} \quad \dots\dots(1)$$

$$\bar{r} \times \bar{R} = (xi + zk) \times (100i + 100k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & 0 & z \\ 100 & 100 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\bar{r} \times \bar{R} = i(-100z) - j(-100z) + k(100x)$$

$$\bar{r} \times \bar{R} = (-100z)i + (100z)j + (100x)k$$

وبتعويض عن كل كمية بما يساويها في المعادلة (1) ينتج:-

$$10i + 10j = 20j + 10k - [(-100z)i + (100z)j + (100x)k]$$

$$10i + 10j = (100z)i + (20 - 100z)j + (10 - 100x)k$$

وبمساواة أعمدات i أو j مع z على طرفي المعادلة الأخيرة نحصل على (z=0.1 m) . كذلك :

$$0 = 10 - 100x \Rightarrow x = \frac{10}{100} = 0.1 \text{ m}$$

الطريقة الثانية : مشابهة لما هو مذكور في كتاب ج. ل مريام .

$$\vec{R} = 100\mathbf{i} + 100\mathbf{j}$$

$$|\vec{R}| = 100\sqrt{2}$$

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R} = \frac{100}{100\sqrt{2}} = 0.707$$

$$\cos \theta_y = \frac{R_y}{R} = \frac{100}{100\sqrt{2}} = 0.707$$

$$\cos \theta_z = 0.0$$

بما أن عزم الربط M بموازاة اتجاه المحصلة فإن $\cos \theta_x$, $\cos \theta_y$, $\cos \theta_z$ للمحصلة هي نفسها لعزم الربط. من الطريقة الأولى فأن:-

$$\vec{M}_o = 20\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$$

$$\vec{r} \times \vec{R} = (-100z)\mathbf{i} + (100z)\mathbf{j} + (100x)\mathbf{k}$$

$$\text{عزم الربط } \vec{M} = \vec{M}_o - \vec{r} \times \vec{R}$$

$$\vec{M} = (20\mathbf{j} + 10\mathbf{k}) - [(-100z)\mathbf{i} + (100z)\mathbf{j} + (100x)\mathbf{k}]$$

$$\vec{M} = (100z)\mathbf{i} + [(20 - 100z)\mathbf{j} + (10 - 100x)\mathbf{k}]$$

$$\cos \theta_x = 0.707 = \frac{100z}{M} \dots\dots\dots(1)$$

$$\cos \theta_y = 0.707 = \frac{20 - 100z}{M} \dots\dots\dots(1)$$

$$\cos \theta_z = 0.0 = \frac{10 - 100x}{M} \Rightarrow 0 = 100 - 100x \Rightarrow x = \frac{10}{100}$$

$$\boxed{\therefore x = 0.1\text{m}}$$

ويحل المعادلتين (1) و (2) فأن:-

$$\frac{100z}{0.707} = \frac{20 - 100z}{0.707} \Rightarrow 200z = 20 \Rightarrow z = \frac{20}{200} = 0.1\text{m}$$

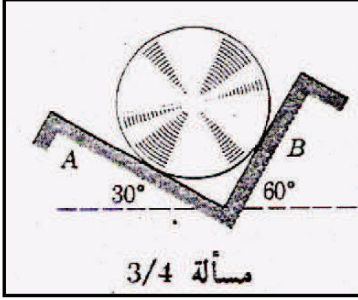
وبتعويض قيم x , z في معادلة عزم الربط نحصل على:-

$$\vec{M} = (100 * 0.1)\mathbf{i} + (20 - 100 * 0.1)\mathbf{j} + (10 - 100 * 0.1)\mathbf{k}$$

$$\boxed{\vec{M} = 10\mathbf{i} + 10\mathbf{j}}$$

الفصل الثامن

حلول مسائل
الاتزان للقوى الثنائية
الأبعاد

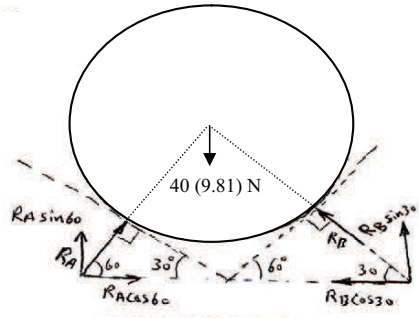


3/4 إذا كانت كتلة الأسطوانة المنتظمة 40 kg وتجلس على الأسطح الملساء A, B التي لها ميل 30° و 60° على التوالي مع الأفق. أحسب قوى التماس في A ، B.

الحل:

في كل مسائل الاتزان وقبل الحل يجب رسم مخطط الجسم الحر لكي يتم من خلاله التعرف على قوى الفعل ورد الفعل المعروفة والمجهولة ومن ثم إيجاد المجاهيل من خلال تطبيق معادلات نيوتن في الاتزان وهي: $(\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma M = 0)$.

كتلة الأسطوانة 40 kg يجب أن تضرب في العجلة الأرضية (9.81 m/sec^2) كي يتم تحويلها إلى وحدات قوة مقاسة بالنيوتن حسب قانون نيوتن الثاني.



مخطط الجسم الحر للأسطوانة

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0.0$$

$$R_A \cos 60 - R_B \cos 30 = 0$$

$$R_A = 1.732 R_B \quad \dots\dots(1)$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0.0$$

$$R_A \sin 60 + R_B \sin 30 - 40(9.81) = 0 \quad \dots\dots(2)$$

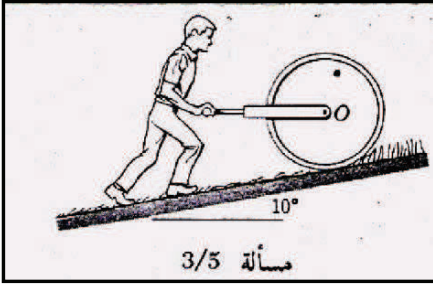
وبتعويض (1) في (2) ينتج:

$$(1.732 R_B) \sin 60 + R_B \sin 30 - 40(9.81) = 0$$

$$R_B = 196.2 \text{ N}$$

وبتعويض قيمة R_B في المعادلة (1) ينتج:-

$$R_A = 1.732 (196.2) = 340 \text{ N}$$



3/5 أوجد قيمة P للقوة الأفقية التي يولدها الفلاح على مقبض الـ 100 kg آلة قص الحشيش لكي يحافظ على وضعها فوق منحدر يميل 10° . أوجد أيضاً القوة المؤثرة من الأرض على الآلة. إن مركز ثقل الآلة في مركزها O .

الحل:

$$\downarrow + \Sigma M_O = 0$$

$$F = 0.0$$

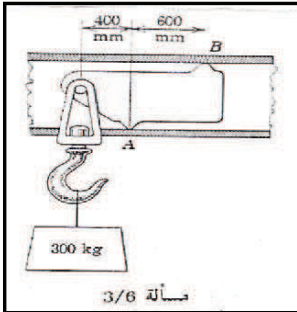
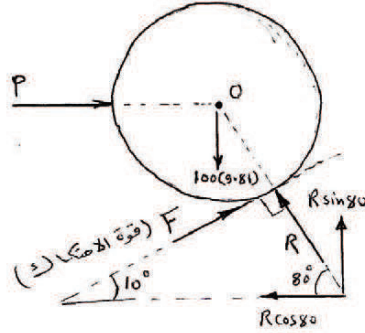
$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$R \sin 80 - 100(9.8) = 0$$

$$R = 996 \text{ N}$$

$$+ \rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$P - 996 \cos 80 = 0 \Rightarrow P = 173 \text{ N}$$



3/6 لكي نحرك موضع صنارة الرفع عندما تكون غير محملة نستعمل الحمالة المنزلقة في الشكل. تؤثر المساقط في A و B على شفاف العارضة الصندوقية الشكل عندما تكون الصنارة محملة وظاهرة من أخدود أفقي في العارضة. أوجد القوى في A و B عندما تكون الصنارة محملة بكتلة 300 kg.

$$\downarrow + \Sigma M_B = 0$$

$$300(9.81)(400 + 600) - R_A(600) = 0$$

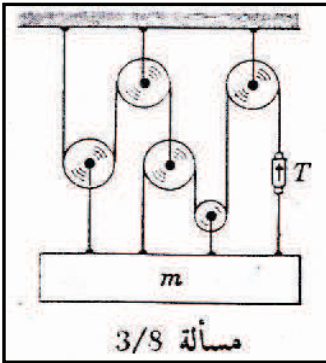
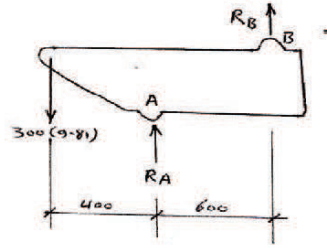
$$R_A = 4905 \text{ N} = 4.91 \text{ kN}$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$-300(9.81) + 4905 + R_B = 0$$

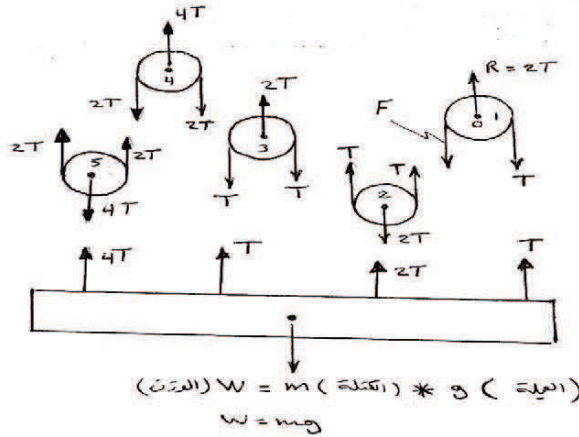
$$R_B = -1962 \text{ N}$$

$$\therefore R_B = 1962 \text{ N} \downarrow$$



3/8 إذا تأثر نابض الميزان بقوة الشد T في الكيبل الأيمن لجزمة كبول البكرات الحاملة لجسم كتلته m . عبر عن m بدلالة T وأهمل ثقل البكرات.

الحل:



نرسم مخطط الجسم الحر لكل بكرة إضافة للجسم الذي كتلته (m) فيبدو كما موضح أعلاه. فلبديء تطبيق معادلات الاتزان على البكرة (1) . لنفرض نصف قطر البكرة (r) ، فإذا أخذنا العزوم عند مركز البكرة فإن قوة الشد على اليسار تساوي قوة الشد على اليمين والتي مقدارها T بمعنى:-

$$+\Sigma M_B = 0$$

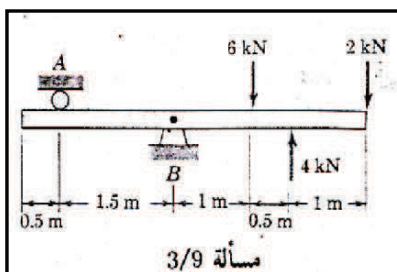
$$Fr - Tr = 0 \Rightarrow F = T$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$R - T - T = 0 \Rightarrow R = 2T$$

وهكذا نطبق معادلات الاتزان على بقية البكرات (2) يليها (3) و (4) و (5) وأخيراً للجسم الذي

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow -mg + 8T = 0 \Rightarrow m = \frac{8T}{g} \quad \text{كتلته (m) فإن :-}$$



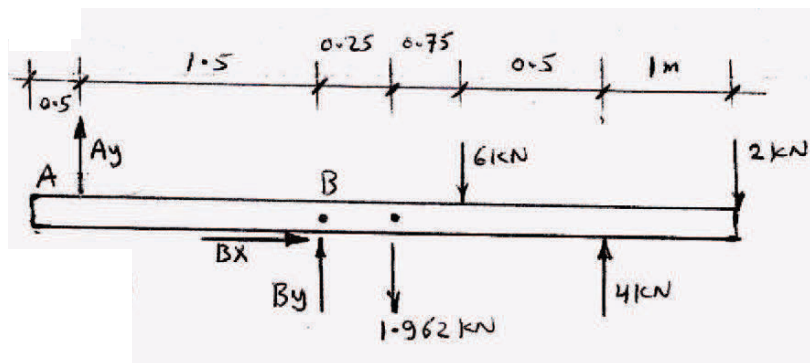
3/9 إذا كانت كتلة العارضة 4.5m المنتظمة

200kg ومحملة في المستوى العمودي

بالقوى المتوازية والمبينة بالشكل.

أحسب قيم رد الفعل A و B.

الحل:



مخطط الجسم الحر للعارضة

$$(وزن العارضة) \quad W = 200 (9.81) = 1962 \text{ N} = 1.962 \text{ kN}$$

لأحظ أن ردود الأفعال A_x ، B_y ، B_x تم تحديد اتجاهها افتراضاً . فيعد تطبيق معادلات الاتزان إذا ظهرت قيمها موجبة فهذا يعني اتجاهها المفترض صحيح. ونعكس اتجاهها المفترض إذا ظهرت القيمة سالبة.

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$B_x = 0.0$$

$$+\Sigma M_B = 0$$

$$-A_y(1.5) - 1.962(0.25) - 6(1) + 4(1.5) - 2(2.5) = 0.0$$

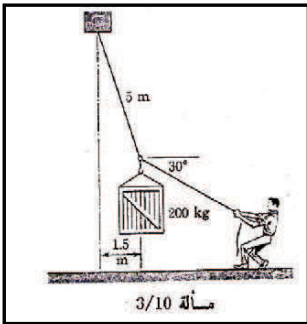
$$A_y = -3.66 \text{ kN}$$

$$A_y = 3.66 \text{ kN} \downarrow$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$-3.66 + B_y - 1.962 - 6 + 4 - 2 = 0$$

$$B_y = 9.622 \text{ kN}$$



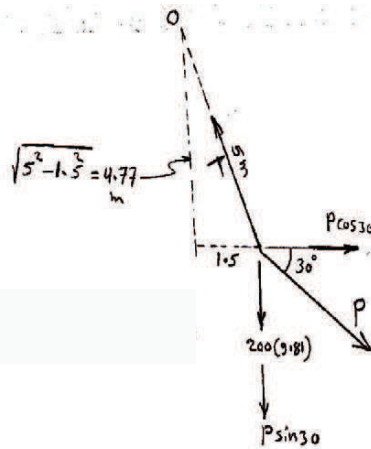
3/10 أحسب قوة السحب P للرجل على الحبل لكي

يرفع حمولة 200 kg في الشكل المبين. اختر

محور المصدر لكي تجد قيمة P بمعادلة واحدة

ويدون استخدام الشد في الحبل العلوي.

الحل:

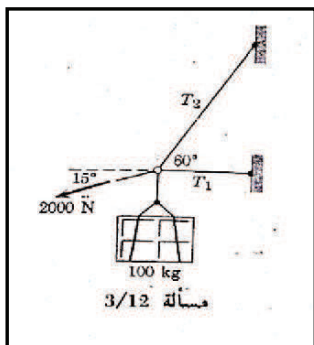


$$+\circlearrowleft \Sigma M_O = 0.0$$

$$-200 (9.81)1.5 - P \sin 30 (1.5)$$

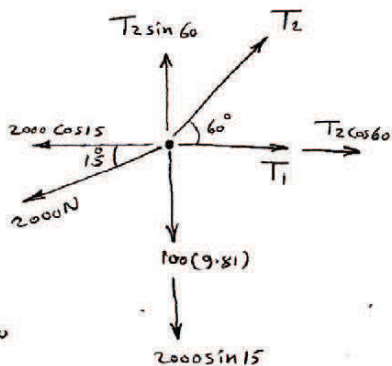
$$+ P \cos 30 (4.77) = 0$$

$$P = 870.46 \text{ N}$$



3/12 أحسب قيم الشد T_2 , T_1 في الكبلين الحاملين
لكتلة 100 kg .

الحل:



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

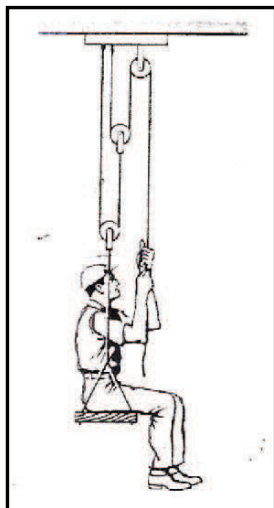
$$T_2 \sin 60 - 100(9.81) - 2000 \sin 15 = 0$$

$$T_2 = 1730$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$1730 \cos 60 + T_1 - 2000 \cos 15 = 0$$

$$\Rightarrow T_1 = 1066.6 \text{ N}$$



3/13 أوجد القوة P التي يسلطها عامل كتلة
80 kg على الحبل لكي يسند نفسه على كرسي.
ماهي القوة R التي يسلطها على مقعد
الكرسي.

الحل:

بعد رسم مخطط الجسم الحر للبكرات وإيجاد قوة الفعل ورد الفعل عليها كما أسلفنا في مسألة 3/8. أخيراً يتم تطبيق معادلة الاتزان على جسم الرجل في شكل a حيث :-

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$4P + P - 80(9.81) = 0$$

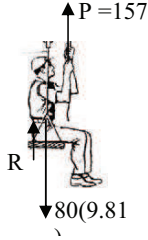
$$P = 157 \text{ N}$$

بتطبيق معادلة الاتزان على شكل b :-

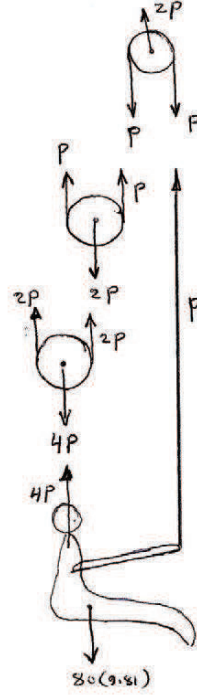
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$R + 157 - 80(9.81) = 0$$

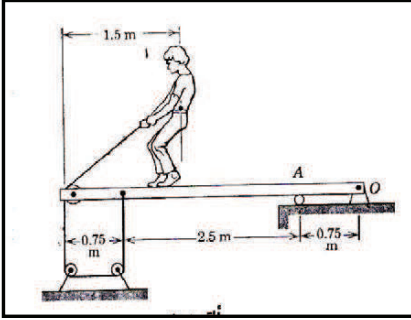
$$R = 628 \text{ N}$$



شكل (b)

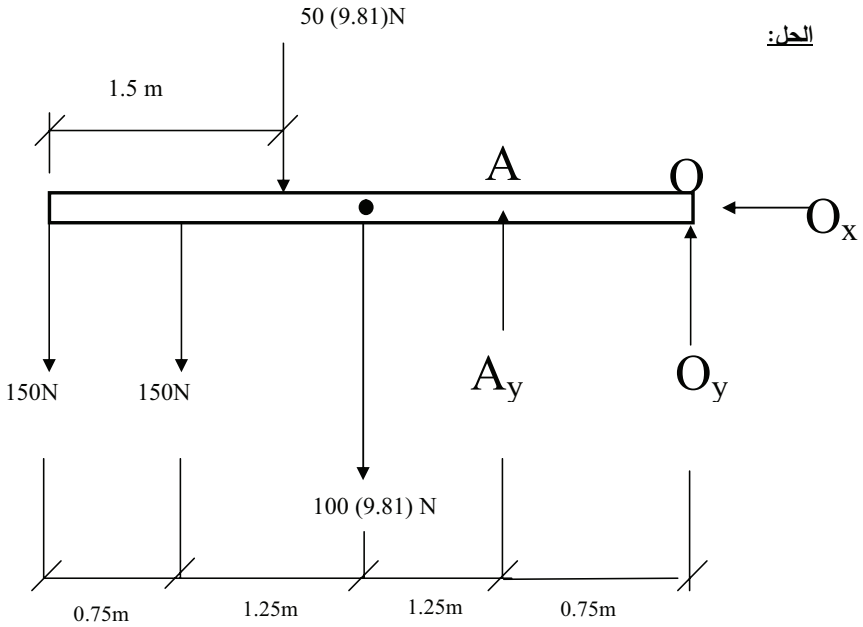


شكل (a)



3/14 لأجل اختبار انحراف العارضة
المنتظمة التي كتلتها 100 kg يسلط
رجل كتلته 50kg قوة سحب تعادل
150N على الحبل الموضح في الشكل.
أحسب قوة تحمل المسار في
المفصل O.

الحل:



$$\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$O_x = 0.0$$

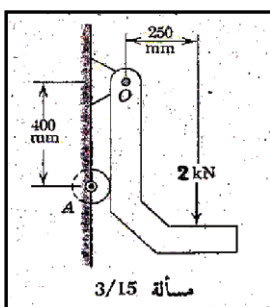
$$\curvearrowright \Sigma M_A = 0.0$$

$$O_y(0.75) + 100(9.81)(1.25) + 50(9.81)(1.75) + 150(2.5) + 150(3.25) = 0.0$$

$$O_y = -3929\text{N} \cong -3.93\text{kN} \Rightarrow O_y = 3.93\text{kN} \downarrow$$

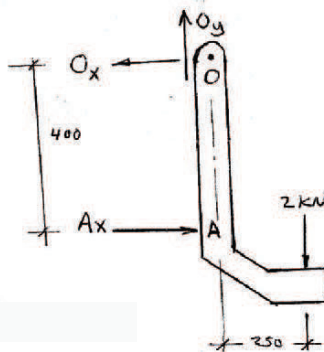
لاحظ أن الإشارة السالبة تعني أن رد الفعل O_y باتجاه الأسفل وليس باتجاه الأعلى كما تم افتراضها ابتداءً . إذا محصلة رد فعل المفصل O هي:-

$$O = \sqrt{O_x^2 + O_y^2} = 3.93 \text{ kN}$$



3/15 لقد تم اختيار مقاومة الانحناء لمسند تحت تأثير حمل 2 kN . أحسب القوة على اسطوانة التدرج A والقوة الكلية في المسمار .

الحل:



$$\curvearrowleft + \Sigma M_A = 0.0$$

$$O_x (400) - 2 (250) = 0 \Rightarrow O_x = 1.25 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

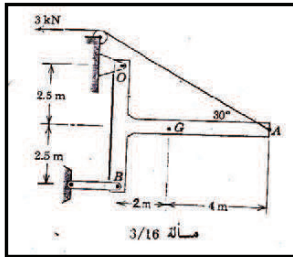
$$O_y - 2 = 0 \Rightarrow O_y = 2 \text{ kN}$$

لاحظ ظهور قيم O_x , O_y موجبة دلالة على صحة

اتجاهات ردود الفعل التي تم اقتراحها ابتداءً عند رسم

الجسم الحر . القوة الكلية على المسمار O هي:-

$$O^2 = O_x^2 + O_y^2 \therefore O = \sqrt{1.25^2 + 2^2} = 2.36\text{kN}$$



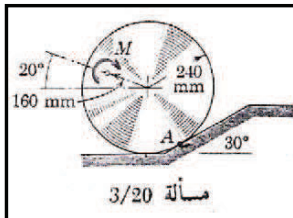
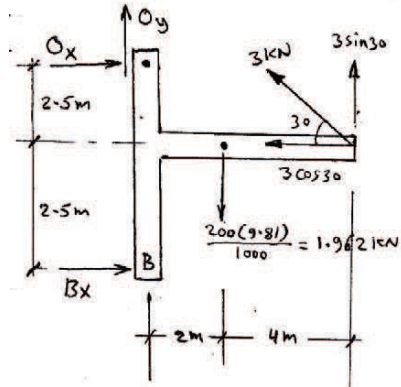
3/16 إذ كان الإطار T يزن 200 kg ومركز ثقله في النقطة G . أحسب القوة الكلية على المسامير في النقطة O عندما تسلط القوة 3 kN على الكيبل.

الحل :

ملاحظة:

الشّد في الكيبل لا يتغير طالما ينتقل عبر بكرة ملساء.

$$\begin{aligned}
 +\uparrow \Sigma F_y &= 0 \\
 Q_y - 1.962 + 3 \sin 30 &= 0.0 \\
 O_y &= 0.462 \text{ kN} \\
 +\curvearrowright \Sigma M_B &= 0.0 \\
 -Q_x(5) - 1.962(2) + 3 \cos 30(2.5) \\
 + 3 \sin 30(6) &= 0 \\
 O_x &= -2.31 \text{ kN} \Rightarrow O_x = 2.31 \text{ kN} \leftarrow \\
 O &= \sqrt{2.31^2 + 0.462^2} = 2.36 \text{ kN}
 \end{aligned}$$



3/20 أحسب قيمة عزم الازدواج M لدحرجة العجلة 40 kg صعوداً فوق السطح المائل. أحسب قوة التلامس R في النقطة A . إن خشونة السطح المائل تمنع الانزلاق .

$$+\Sigma M_A = 0$$

$$-M + 40(9.81) \sin 30(240) = 0$$

$$M = 47088 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M = 47.1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$+\Sigma F_y = 0$$

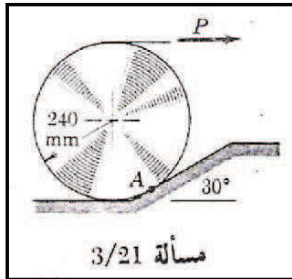
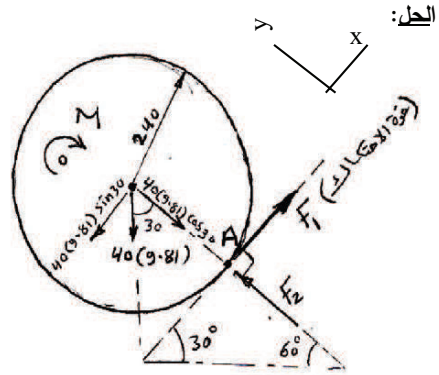
$$F_2 - 40(9.81) \cos 30 = 0$$

$$F_2 = 339.8 \text{ N}$$

$$+\Sigma F_x = 0$$

$$F_1 - 40(9.81) \sin 30 = 0 \Rightarrow F_1 = 196.2 \text{ N}$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{339.8^2 + 196.2^2} = 392.4 \text{ N}$$



3/21 استبدل عزم الازدواج M في المسألة 3/20

بقوة أفقية P وأحسب قيمتها لكي تدرج

العجلة 40 kg إلى أعلى السطح المائل. أيضاً

أحسب قوة التماس R في النقطة A علماً

بعدم وجود انزلاق.

$$+\Sigma M_A = 0$$

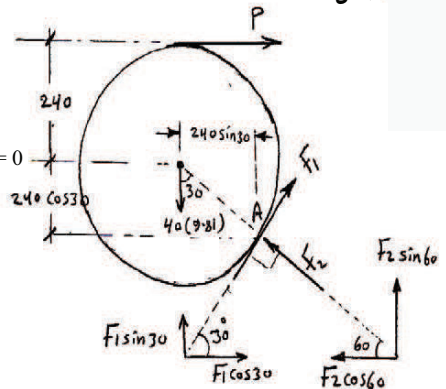
$$40(9.81)(240 \sin 30) - P(240 + 240 \cos 30) = 0$$

$$P = 105 \text{ N}$$

ملاحظة: اختلاف طريقة حل هذا السؤال عن

السؤال 3/20 هو من أجل أن يكون للطلاب

المرونة في الحل بأكثر من طريقة.



$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$F_1 \cos 30 + 105 - F_2 \cos 60 = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

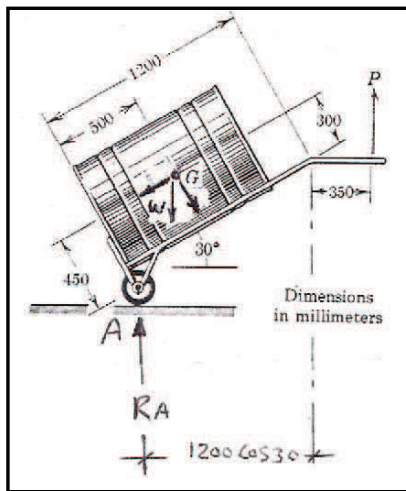
$$F_1 \sin 30 + F_2 \sin 60 - 40(9.81) = 0 \dots\dots\dots(2)$$

وبحل المعادلتين (1) و (2) ينتج:-

$$F_1 = 105.26 \text{ N}$$

$$F_2 = 392.33 \text{ N}$$

$$\therefore R = \sqrt{105.26^2 + 392.33^2} = 406.2 \text{ N}$$

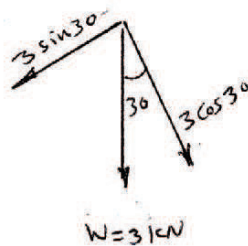


3/22 إذا كانت كتلة برميل الزيت 300 kg عندما يكون مليئاً وأن مركز ثقله في G. أحسب القوة العمودية P اللازمة لتوازن البرميل والعربة في الوضع الموضح في الشكل. أهمل وزن العربة مقارنة بوزن البرميل.

الحل:

$$(وزن البرميل) W = 300(9.81) = 2943 \text{ N} \approx 3 \text{ kN}$$

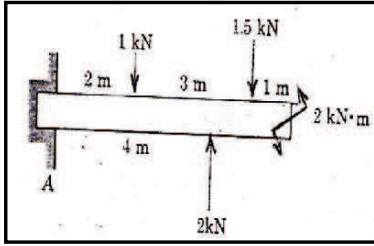
الوزن يحل إلى مركبتين كما موضح في الشكل المجاور:



$$\curvearrowright + \Sigma M_A = 0$$

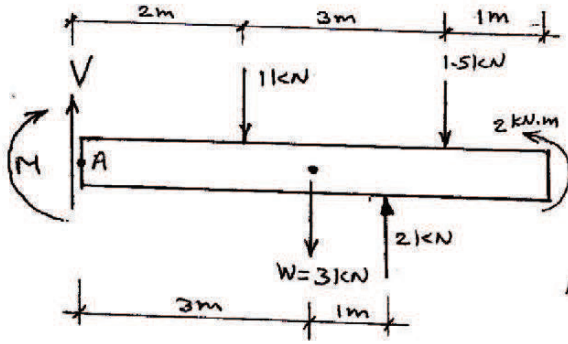
$$P(350 + 1200 \cos 30) - 3 \cos 30(500) + 3 \sin 30(450) = 0.0$$

$$P = 0.449 \text{ kN}$$



3/23 إذا كانت كتلة الكابول المنتظم 50 kg لكل متر طول ويؤثر عليها عزم الازدواج وثلاث قوى كما هو موضح في الشكل . أعزل العارضة إلى يمين المقطع A وأحسب العزم (عزم الازدواج) M وقوة القص V (القوة العمودية) المسلطة من قبل الجدار على الكابول في هذا المقطع.

الحل:



$$W = 50 (9.81)(6) = 2943 \text{ N (وزن الكابولي)}$$

$$W \cong 3 \text{ kN}$$

$$\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$V - 1 - 3 + 2 - 1.5 = 0$$

$$V = 3.5 \text{ kN}$$

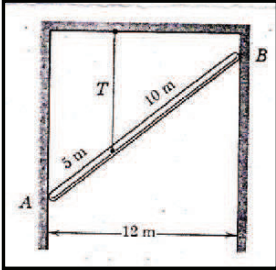
$$\downarrow + \Sigma M_A = 0$$

$$-M - 1(2) - 3(3) + 2(4) - 1.5(5) + 2 = 0$$

$$M = -8.5 \text{ kN.m}$$

$$\therefore M = 8.5 \text{ kN.m} \quad \curvearrowright$$

مع عكس عقرب الساعة



3/24 إذا كانت كتلة القضييب المنتظم (15 m) تساوي 150 kg ومستند عند نهايته الملساء على الجدارين العمودين وبواسطة الشد T في الكيبل العمودي . أحسب ردود الفعل في النقطة A والنقطة B.

الحل:

$$W = 150 (9.81) = 1472 \text{ N}$$

$$\cos \theta = \frac{12}{15} \Rightarrow \theta = 36.87^\circ$$

$$\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$T - 1472 = 0 \Rightarrow T = 1472 \text{ N}$$

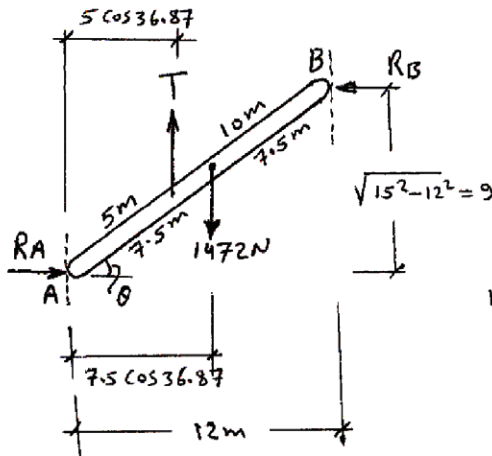
$$\curvearrowleft + \Sigma M_A = 0$$

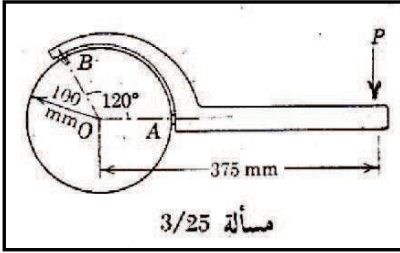
$$1472(5 \cos 36.87) - 1472(7.5 \cos 36.87) + R_B(9) = 0$$

$$R_B = 327 \text{ N}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

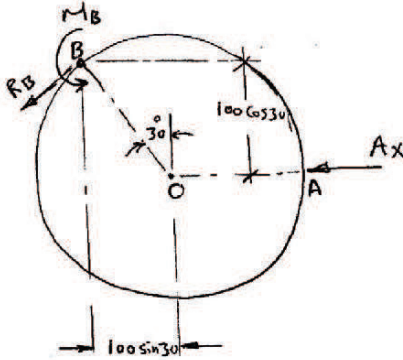
$$R_A - 327 = 0 \Rightarrow R_A = 327 \text{ N}$$





3/25 إذا استعملت صنارة الشد أو مسمار مفتاح الربط لدوران قضبان وحلقات وإذا كان العزم اللازم هو 80 N.m لدوران حلقة ذات قطر 200 mm حول مركزها O وتحت تأثير القوة P . أحسب ، قيمة قوة التلامس R على السطح الأملس في A . يتم تشبيك المسمار في B على محيط الحلقة.

الحل:



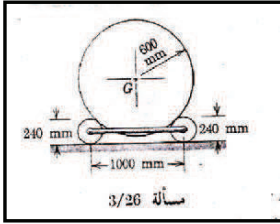
$$\begin{aligned}
 M &= Fd \\
 80 \cdot 10^3 &= P(375) \\
 P &= 213.3 \text{ N} \\
 \text{العزم المسلط على الحلقة كفعل حول} \\
 \text{النقطة B هو بمقدار:} \\
 M_B &= Pd \\
 M_B &= 213.3 (375 + 100 \sin 30) \\
 M_B &= 90652.5 \text{ N.mm}
 \end{aligned}$$

M_B مع عقرب الساعة .. الحلقة تعمل رد فعل على هذا العزم بعزم مساوي له بالمقدار ولكن باتجاه عكس عقرب الساعة كما موضح في مخطط الجسم الحر . وبأخذ:

$$\uparrow + \Sigma M_B = 0$$

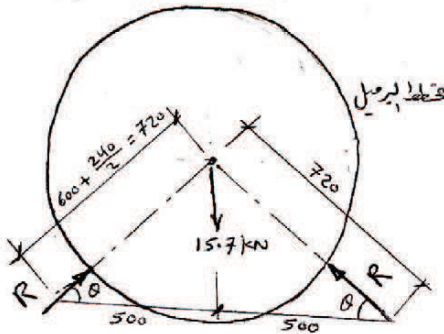
$$- A_x (100 \cos 30) + 90652.6 = 0$$

$$\boxed{A_x = 1047 \text{ N}}$$

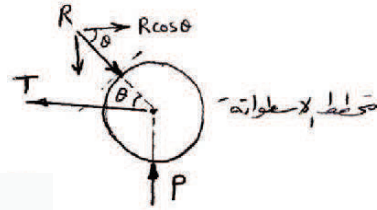


3/26 بتطبيق المركز الهندسي لبرميل نصف قطر 600 mm وكتلته 1600 kg على مركز كتلته G ويجلس على قاعدة مكونة من اسطوانتين طوليتين كل واحدة لها قطر 240 mm. وإذا كانت كلتا الاسطوانتين تستندان على سطح أفقي أملس ولا يمكن إبعادهما عن بعضهما لوجود عارضتين أفقيتين توصل بينهما واحد في كل جهة من الاسطوانتين كما هو موضح في الشكل. أحسب الشد T في كل عارضة ورد الفعل R بين البرميل وكل أسطوانة.

الحل:



$$W = 1600 (9.81) = 15696 \text{ N} \approx 15.7 \text{ kN}$$



في مخطط الجسم الحر للبرميل:-

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$2R \sin \theta - 15.7 = 0$$

$$R = \frac{15.7}{2 \sin 46} = 10.9 \text{ kN}$$

$$\cos \theta = \frac{500}{720}$$

$$\theta = 46.0^\circ$$

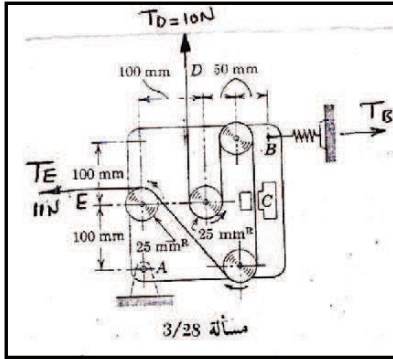
في مخطط الجسم الحر للأسطوانة وبسبب وجود عارضتين أفقيتين فهذا يعني أن الشد T موجود على جانبيين بمعنى $(2T)$:

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$R \cos \theta - 2T = 0$$

$$10.91 \cos 46 - 2T = 0$$

$$T = 3.79 \text{ kN}$$



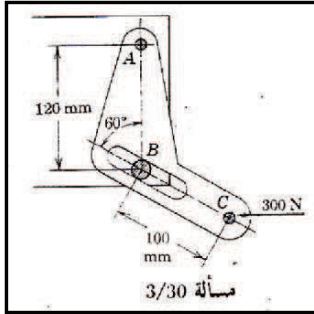
3/28 إذا تعرض الشريط المغناطيسي إلى قوة شد 10.0 N في D ويمر حول بكرات التوجيه ومن خلال رأس إزالة الصوت في C بسرعة ثابتة ويسبب وجود احتكاك بسيط في المضجع الحامل للبكرات ، فأن الشريط في E معرض إلى قوة شد 11.0 N أوجد الشد T في النابض الساند في النقطة B إذا كانت الصفيحة أفقية ومثبتة على مضجع دقيق أبري في A .

الحل:

$$\downarrow + \Sigma M_A = 0$$

$$11(100 + 12.5) + 10(100 - 12.5) - T_B(200) = 0.0$$

$$T_B = 10.6 \text{ N}$$



3/30 إذا استبدل عزم الازدواج في السؤال 3/29 بالقوة 300N الأفقية كما هو موضح هنا. أحسب قيمة القوة المطبقة على المسمار A التي تسند المسند الخفيف.

الحل:

$$\curvearrowleft + \Sigma M_A = 0$$

$$R_B(120 \sin 30) - 300(100 \sin 30 + 120) = 0$$

$$R_B = 850 \text{ N}$$

$$\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$A_y + 850 \cos 30 = 0$$

$$A_y = -736.12 \text{ N}$$

$$A_y = 736.12 \text{ N} \downarrow$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$A_x + 850 \sin 30 - 300 = 0$$

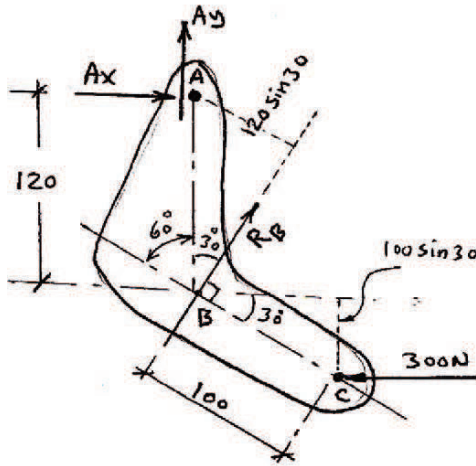
$$A_x = -125 \text{ N}$$

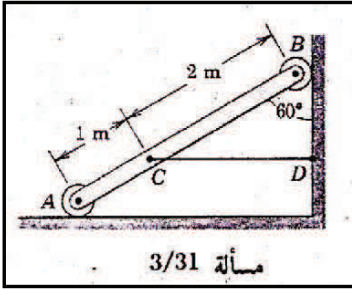
$$A_x = 125 \text{ N} \leftarrow$$

$$\therefore A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$A = \sqrt{125^2 + 736.12^2}$$

$$A = 747 \text{ N}$$





3/31 إذا كان الحبل الأفقي CD يمسك القضيب المنتظم الذي كتلته 50 kg (ومثبت على نهايته اسطوانتان التدرج) في حالة توازن كما هو موضح في الشكل . أوجد قيمة الشد T في الحبل بواسطة كتابة معادلة واحدة للتوازن ثم أوجد القوى في A و B بطريقة الاستشفاف (التمحيص).

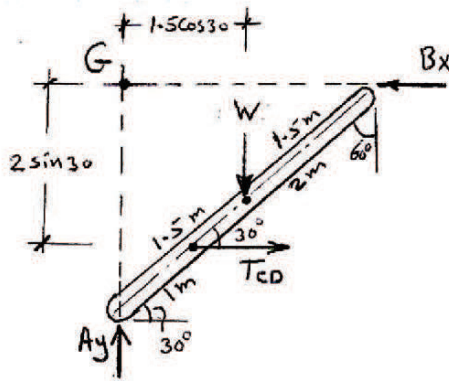
الحل:

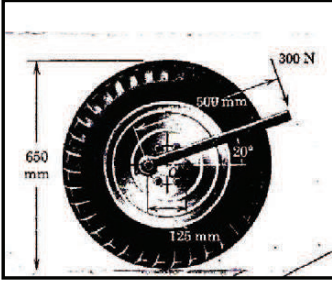
$$W = 50 (9.81) = 490.5 \text{ N}$$

$$\curvearrowleft + \Sigma M_G = 0$$

$$T_{CD}(2 \sin 30^\circ) - 490.5 (1.5 \cos 30^\circ) = 0.0$$

$$T_{CD} = 637 \text{ N}$$





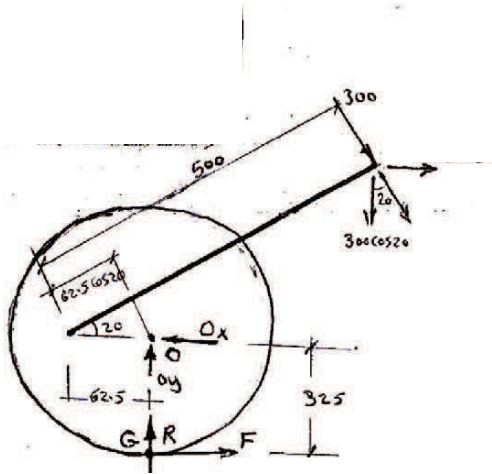
3/32 عندما تسلط القوة 300 N على مفك العجلة كما هو موضح في الشكل فإن العجلة لن تدور بسبب قوة الاحتكاك بينها وبين الأرض. باستخدام معادلة واحدة للتوازن، أوجد المركبة الأفقية O_x لرد الفعل المسلط على العجلة من المضجع الثابت في O . اعتبر المفك والعجلة كجسم واحد.

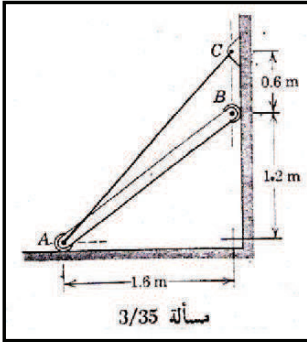
الجواب:

$$\left(\sum M_G = 0 \right)$$

$$O_x (325) - 300 \cos 20 (500 \cos 20 - 62.5) - 300 \sin 20 (500 \sin 20 + 325) = 0.0$$

$$O_x = 510 \text{ N}$$





3/35 لدينا قضيب منتظم مثبت في نهاياته
أسطوانتين التدرج ، كتلته 30kg ومستند على
السطحين الأفقي والعمودي بواسطة السلك AC
أحسب الشد T في السلك وردود الفعل على
الأسطوانتين في B, A .

الحل:

$$AB = \sqrt{1.2^2 + 1.6^2} = 2$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1.2}{1.6}\right) = 36.36^\circ$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1.2 + 0.6}{1.6}\right) = 48.36^\circ$$

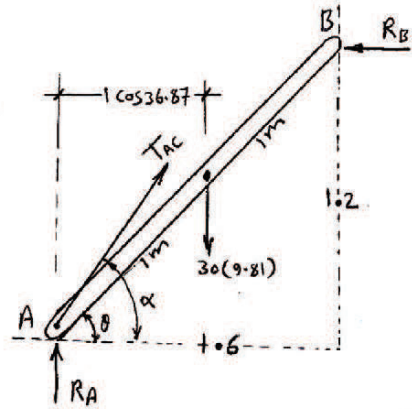
$$\begin{aligned} & \curvearrowright + \Sigma M_A = 0 \\ & R_B(1.2) - 30(9.8)(1 \cos 36.87) = 0 \end{aligned}$$

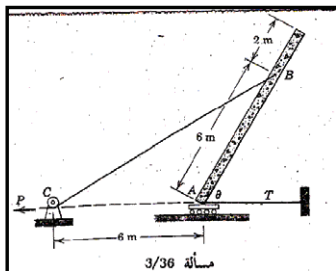
$$\boxed{R_B = 196.2 \text{ N}}$$

$$\begin{aligned} & \rightarrow \Sigma F_x = 0 \\ & T_{AC} \cos \alpha - R_B = 0 \\ & T_{AC} = \frac{196.2}{\cos 48.36} = 295.3 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \uparrow \Sigma F_y = 0 \\ & R_A + T_{AC} \sin \alpha - 30(9.81) = 0 \\ & R_A = 30(9.81) - 295.3 \sin 48.36 \end{aligned}$$

$$\boxed{R_A = 73.6 \text{ N}}$$





3/36 يمثل الشكل المنظر الجانبي لخرسانة كتلتها 25 Mg ترفع ببطء إلى الوضع العمودي بواسطة الشد P في كابل الرفع . أحسب الشد T في كابل التثبيت الأفقي عندما تكون الزاوية $\theta = 60^\circ$ باستخدام معادلة واحدة فقط للتوازن.

الحل:

$$m = 25Mg = 25 * 10^6 \text{ gm} = 25 * 10^3 \text{ kg}$$

$$W = (25 * 10^3)(9.81)N$$

$$W = 245.25kN$$

$$\tan \theta = \frac{6 \sin 60}{6 + 6 \cos 60}$$

$$\theta = 30^\circ$$

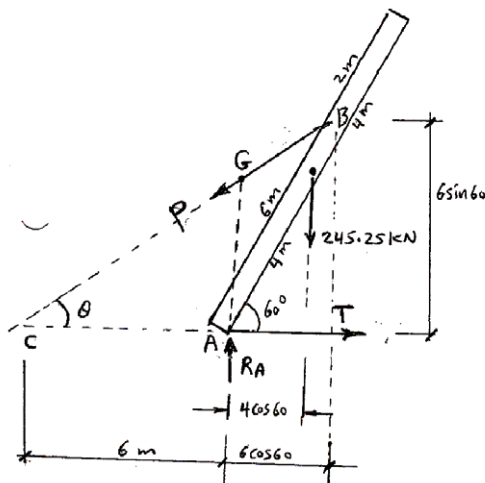
$$\tan 30 = \frac{AG}{6}$$

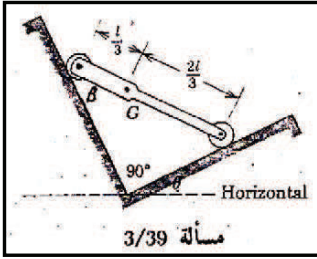
$$AG = 6 \tan 30 = 3.46$$

$$\sum M_G = 0$$

$$T(3.46) - 245.25(4 \cos 60) = 0.0$$

$$T = 141.76kN$$





3/39 إذا كان مركز ثقل القضيب والعجلات المتصلة في نهايته في G وقد وضع فوق الأسطح المائلة الشكل أوجد الزاوية الوحيدة β لقيمة معينة للزاوية θ لكي يكون القضيب في حالة توازن غير مستقر . أيضا اذكر قيمتين إضافيتين لـ β لتوازن مستقر .

الحل:

$$\curvearrowright + \Sigma M_A = 0$$

$$R_1 (\ell \sin \beta) = w \sin(\beta + \theta) \left(\frac{\ell}{3}\right)$$

$$R_1 \sin \beta = \frac{w}{3} \sin(\beta + \theta)$$

$$R_1 \sin \beta = \frac{w}{3} (\sin \beta \cos \theta + \cos \beta \sin \theta)$$

$$R_1 = \frac{w}{3} \left(\cos \theta + \frac{\sin \theta}{\tan \beta} \right) \dots\dots(1)$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$R_2 \cos \theta = R_1 \sin \theta$$

$$R_2 = R_1 \tan \theta \dots\dots(2)$$

$$\rightarrow \Sigma F_y = 0$$

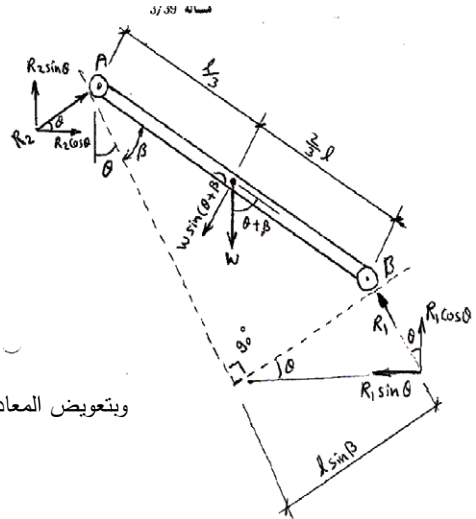
$$R_2 \sin \theta + R_1 \cos \theta = w$$

وبتعويض المعادلة (2) في المعادلة الأخيرة ينتج:-

$$R_1 \tan \theta \sin \theta + R_1 \cos \theta = w$$

$$R_1 (\tan \theta \sin \theta + \cos \theta) = w$$

وبتعويض المعادلة (1) في المعادلة الأخيرة ينتج:-



$$\frac{w}{3}(\cos \theta + \frac{\sin \theta}{\tan \beta})(\tan \theta \sin \theta + \cos \theta) = w$$

$$\frac{w}{3}(\cos \theta + \frac{\sin \theta}{\tan \beta})(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \sin \theta + \cos \theta) = w$$

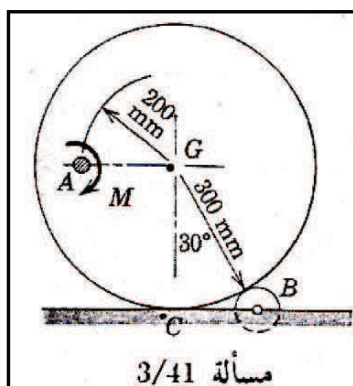
$$\frac{1}{3}(\cos \theta + \frac{\sin \theta}{\tan \beta})(\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta}) = 1$$

$$\frac{1}{3}(\cos \theta + \frac{\sin \theta}{\tan \beta})(\frac{1}{\cos \theta}) = 1$$

$$\frac{1}{3}(1 + \frac{\tan \theta}{\tan \beta}) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{\tan \theta}{\tan \beta} = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\tan \theta}{\tan \beta} = 2$$

$$\tan \beta = \frac{1}{2} \tan \theta$$

$$\beta = \tan^{-1}(\frac{1}{2} \tan \theta)$$



3/41 إذا كانت كتلة العجلة ذات نصف القطر 300

mm تساوي 60kg مع ثقلها في G ومستقرة على سطح أفقي خشن. ويتأثر عزم الازدواج M=50 N.m المسلط على A فأن العجلة تتكئ على الأسطوانة في B والتي تمنعها من التدرج . أحسب قيمة القوة الكلية المسلطة على العجلة بواسطة السطح الأفقي في C.

الحل:

$$\begin{aligned} + \Sigma M_G = 0 \\ F(300) - 50 \cdot 10^3 = 0 \end{aligned}$$

$$F = 166.67 \text{ N}$$

$$+ \Sigma F_x = 0$$

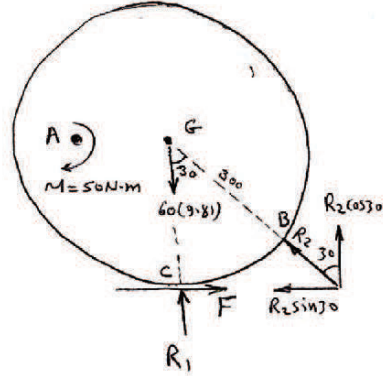
$$166.67 - R_2 \sin 30 = 0$$

$$R_2 = 333.34 \text{ N}$$

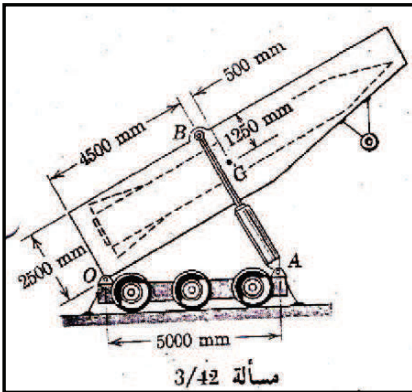
$$+ \Sigma F_y = 0$$

$$R_1 - 60(9.81) + 333.34 \cos 30 = 0$$

$$R_1 = 300 \text{ N}$$

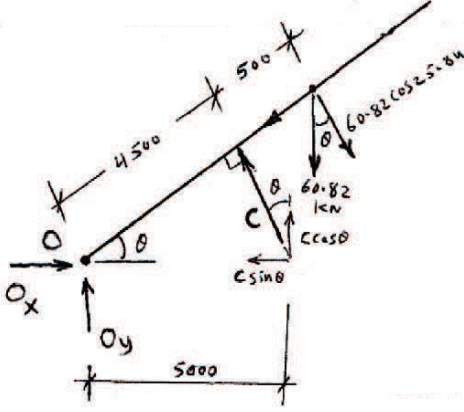


$$R_c = \sqrt{F^2 + R_1^2} = \sqrt{166.67^2 + 300^2} = 343 \text{ N}$$



3/42 تستعمل الحافلة الخاصة لنقل ونصب قذيفة بوضعها العمودي للانطلاق، إن كتلة جسم الحافلة والقذيفة معا 6.20 Mg ومركز ثقلها في G . لقد أميلت هذه الوحدة لموضعها بواسطة اسطوانتين هيدروليكيتين واحدة من كل جهة من الحافلة . أحسب قوة الضغط C في كل عمود قابض للأسطوانتين في الوضع الذي يكون فيه المحور AB للأسطوانة عمودياً على المحور الطولي للحافلة والقذيفة.

الحل:



الكتلة $m = 6.2 \text{ Mg} = 6.2 \cdot 10^6 \text{ gm}$

$m = 6.2 \cdot 10^3 \text{ kg}$

الوزن $w = 6.2 \cdot 10^3 \cdot 9.81 \text{ N}$

$w = 6.2 (9.81) \text{ kN} = 60.82 \text{ kN}$

$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{4500}{5000} \right) = 25.84^\circ$

$\curvearrowright + \Sigma M_o = 0$

$C(4500) - 60.82 \cos 25.84(5000) = 0$

$C = 60.82 \text{ kN}$

3/43 أحسب قيمة F للقوة الكلية المسطرة على المفصل O لنائفة الفذائف الموصوفة في

المسألة 2/42 . الحل البياني مقترح .

الحل: بالرجوع إلى مخطط الجسم في مسألة 3/42 فإن:-

$\rightarrow \Sigma F_x = 0$

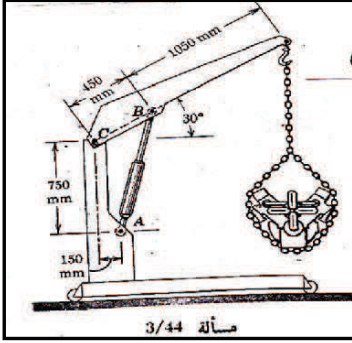
$O_x = C \sin \theta = 60.82 \sin 25.84 = 26.5 \text{ kN}$

$\uparrow \Sigma F_y = 0$

$O_y + 60.82 \cos 25.84 - 60.82 = 0$

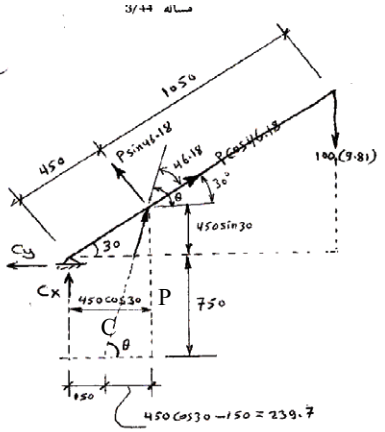
$O_y = 6.08 \text{ kN}$

$O = \sqrt{O_x^2 + O_y^2} = \sqrt{26.5^2 + 6.08^2} = 27.2 \text{ kN}$



3/44 رافعة أرضية متنقلة في ورشة آلية ترفع محركاً كتلته 100 kg في الوضع الموضح في الشكل ، أحسب قيمة القوة المسلطة على المسامير في C وضغط الزيت P المسلط على مكبس قطره 80 mm للأسطوانة الهيدروليكية AB.

الحل:



$$\tan \theta = \frac{750 + 450 \sin 30}{239.7}$$

$$\theta = 76.18^\circ$$

$$(+ \Sigma M_c = 0)$$

$$P \sin 46.18(450) - 981(450 + 1050) \cos 30 = 0$$

$$P = 3925 \text{ N}$$

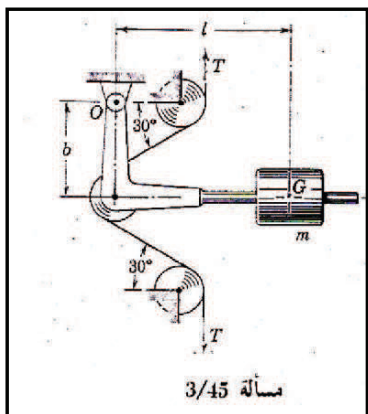
وبتحليل القوى P إلى مركبتين أفقية ورأسية

وتطبيق $\Sigma F_y = 0$ ، $\Sigma F_x = 0$ نحصل على

C_y ، C_x ومنها:-

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}$$

ويترك بقية الحل للطالب



3/45 أوجد البعد ℓ في الشكل الموضح بحيث تحافظ الكتلة m على شد معين T في السير. أهمل كتلة الذراع والبكرة الوسطى مقارنة مع m ، وكذلك أوجد قيمة القوة R الساندة للمسمار في O .

الحل:

الحل:

$$\sum \mathcal{M}_O = 0$$

$$(b) 2T \cos 30 - mg(\ell) = 0$$

$$\ell = \frac{2T \cos 30 b}{mg}$$

$$\ell = \frac{1.732Tb}{mg}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$O_y - mg = 0 \Rightarrow O_y = mg$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

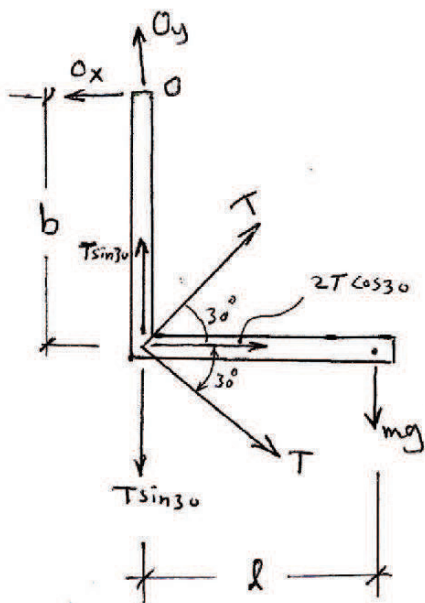
$$-O_x + 2T \cos 30 = 0$$

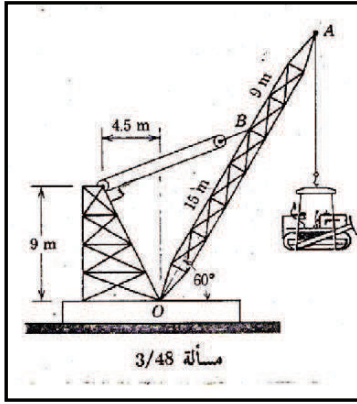
$$O_x = 2T \cos 30$$

$$O = \sqrt{O_x^2 + O_y^2}$$

$$O = \sqrt{(mg)^2 + (2T \cos 30)^2}$$

$$O = \sqrt{(mg)^2 + 3T^2}$$





3/48 ترفع الرافعة 4.20 Mg قاشطة تراب . أن
مركز ثقل العمود OA وكتلته 2Mg في
منتصف طوله . أحسب الشد T في الكبل
عندما يكون مثبتاً في B وأحسب قيمة القوة
المؤثرة على المفصل O لوضع التوازن
للزاوية 60° . أهمل وزن العمود.

الحل:

$$\text{الكتلة } m = 4.2 \text{ Mg} = 4.2 \times 10^6 \text{ gm} = 4.2 \times 10^3 \text{ kg}$$

$$\text{الوزن } w = 4.2 \times 10^3 \times 9.81 \text{ N} = 4.2 \times 9.81 \text{ kN}$$

$$\sin \theta = \frac{10}{15}$$

$$\theta = 41.81^\circ$$

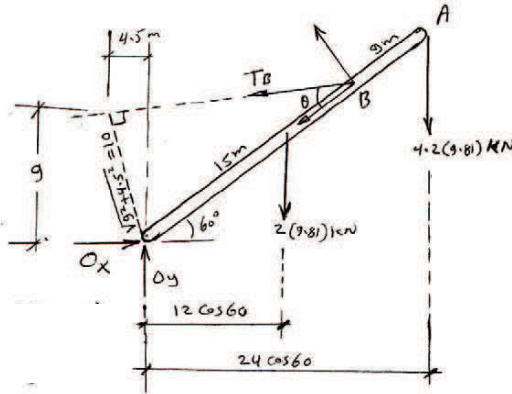
$$\sum M_O = 0$$

$$T_B \sin 41.81(15)$$

$$- 4.2(9.81)(24 \cos 60)$$

$$- 2(9.81)(12 \cos 60) = 0.0$$

$$T_B = 61.21 \text{ kN}$$



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$O_y - 2(9.81) - 4.2(9.81) - 61.21 \cos 71.81 = 0$$

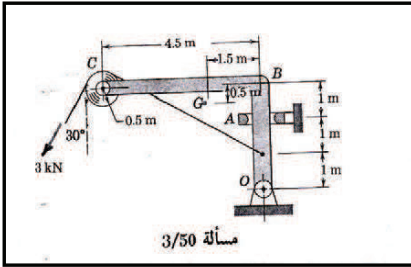
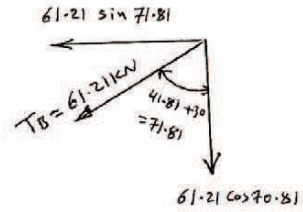
$$O_y = 80 \text{ kN}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$O_x - 61.21 \sin 71.81 = 0$$

$$O_x = 58.15 \text{ kN}$$

$$O = \sqrt{O_x^2 + O_y^2} = 99 \text{ kN}$$

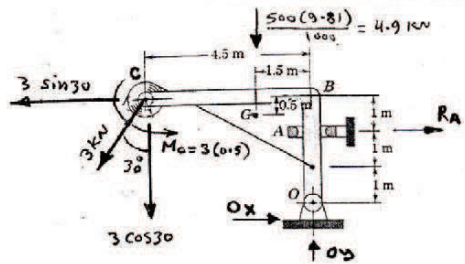


مسألة 3/50

3/50 إذا كانت كتلة العضو OBC والبكرة في C معا يساوي 500kg لهما مركز ثقل واحد في G . أحسب قيمة القوة التي يتحملها مسمار التوصيل في O عندما تسط الحمولة 3 kN تعطي الحلقة في نقطة A إسنادا في الاتجاه الأفقي فقط.

الحل:

طبقاً لمبادئ عزم الازدواج التي سبق التعرف عليها ، يمكن مكافئة القوة 3kN وتحليلها إلى قوة وعزم ازدواج يؤثر عند مركز البكرة - C . كما هو مبين في الشكل المجاور .



$$(+\circlearrowleft) \Sigma M_O = 0.0$$

$$3 \cos 30(4.5) + 3 \sin 30(3) + 4.9(1.5) - R_A(2) + 3(0.5) = 0$$

$$R_A = 12.52 \text{ kN}$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$O_y - 3 \cos 30 - 4.9 = 0.0 \quad \Rightarrow \quad O_y = 7.5 \text{ kN}$$

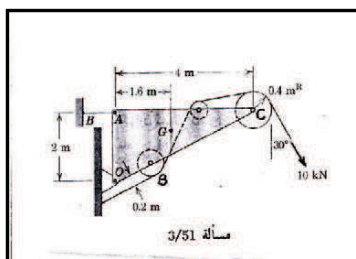
$$+ \rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$O_x + 12.52 - 3 \sin 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad O_x = -11.02 \text{ kN}$$

$$\therefore O_x = 11.02 \text{ kN} \leftarrow$$

$$\therefore O = \sqrt{O_x^2 + O_y^2}$$

$$O = \sqrt{11.02^2 + 7.5^2} = 13.33 \text{ kN}$$



3/51 للهيكل الثلاثي مع بكراته كتلة تساوي 200kg

ومركز ثقله في G . أحسب القوة التي تعمل

على المسمار في O عندما تكون القوة 10

kN مسلطة على الكبل . (ملاحظة: في حالة

استعمال معادلة العزم استفد من تعويض قوة

بقوة أخرى وعزم الازدواج).

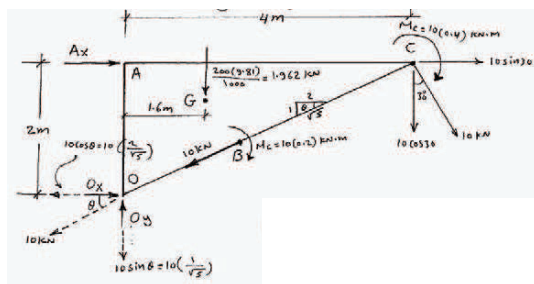
الحل: عندما يتم رسم مخطط الجسم الحر للهيكل الثلاثي ACO فان هنالك قوة فعل 10 kN تؤثر

على البكرة - C وقوة فعل أخرى 10 kN تؤثر على البكرة - B ذلك لأن قوة الشد في الكبل لا

تتغير طالما ينتقل عبر بكرة ملساء .

وبعد مكافئة تلك القوة إلى قوة وعزم ازدواج عند مراكز البكرات B, C, تصبح مخطط الجسم

الحر طبقا لما هو عليه في الشكل المجاور .



القوة 10 kN عند نقطة B يمكن تحليلها عند أي نقطة على خط عملها ، ولغرض سهولة حساب ذراعها يمكن اختيار تلك النقطة في O.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$O_y - 10\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - 1.962 - 10 \cos 30 = 0 \Rightarrow O_y = 15.1 \text{ kN}$$

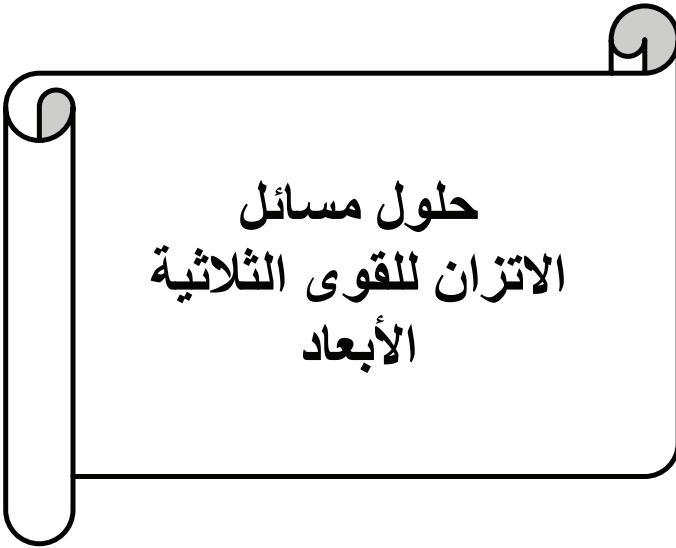
$$\curvearrowleft \Sigma M_A = 0.0$$

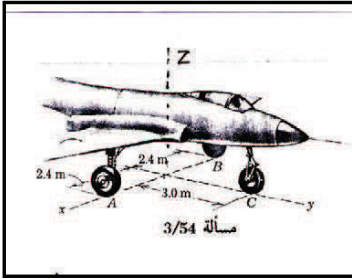
$$O_x (2) - 10\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)(2) - 10(0.2) - 1.962(1.6) - 10 \cos 30(4) - 10(0.4) = 0.0$$

$$O_x = 30.83 \text{ kN}$$

$$O = \sqrt{O_x^2 + O_y^2} = \sqrt{30.83^2 + 15.1^2} = 34.3 \text{ kN}$$

الفصل التاسع





3/54 لفحص توازن طائرة فإن كل عجلة من عجلاتها الثلاثة تتحرك على ميزان ، وأن قراءات القوة هي $B=22.4\text{kN}$ ، $C=3.43\text{kN}$ ، $A=22.0\text{kN}$ ، أحسب احداثيات x-y لمركز النقل للطائرة الذي يمر فيه وزنها.

الحل:

قوى ردود الفعل المعطاة في المسألة عند موضع عجلات السيارة A, B, C هي بالتأكيد باتجاه الأعلى بينما قوة الفعل الناتج من وزن الطائرة باتجاه الأسفل . عليه:-

$$+\uparrow \Sigma F_z = 0$$

$$3.43 + 22.4 + 22 - w = 0 \quad \Rightarrow \quad w = 47.8 \text{ kN}$$

بحساب عزوم جميع القوى حول نقطة الأصل O - يكون:-

$$(\bar{M}_O)_w = \bar{r} \times \bar{w}$$

$$(\bar{M}_O)_w = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ 0 & 0 & -47.83 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-47.83y) - \mathbf{j}(-47.83x) + \mathbf{k}(0.0)$$

$$(\bar{M}_O)_w = (-47.83y)\mathbf{i} + (47.83x)\mathbf{j}$$

$$(\bar{M}_O)_{F_c} = \bar{r} \times \bar{F}_c = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3.43 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(10.29) - \mathbf{j}(0.0) + \mathbf{k}(0.0)$$

$$(\bar{M}_O)_{F_c} = 10.29\mathbf{i}, (\bar{M}_O)_{F_A} = -2.4(22)\mathbf{j} = -52.8\mathbf{j}, (\bar{M}_O)_{F_B} = 2.4(22.4)\mathbf{j} = 53.76\mathbf{j}$$

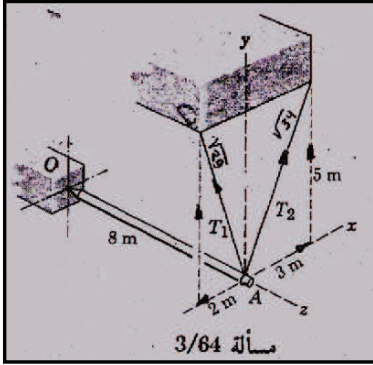
من خلال المعادلات الاتجاهية لتلك العزوم يظهر أن بعض منها يلف حول المحور x- والبعض الآخر يلف حول المحور y وبأخذ:-

$$\Sigma M_{ox} = 0.0$$

$$-47.83y + 10.29 = 0.0 \quad \Rightarrow \quad y = 0.215$$

$$\Sigma M_{oy} = 0.0$$

$$47.83x - 52.8 + 53.76 = 0.0 \quad \Rightarrow \quad x = -0.02$$



3/64 لنذراع التطويل الأفقي والمتجانس كتلته 160 kg ويستند على الكيبلين في المستوى العمودي x-y بواسطة مضجع كروي حلقي في O . أحسب الشد T_1 و T_2 في الكيبلين.

الحل:

عندما يكون المسند في (O) كروي فهذا يعني أن $M_{oz}=0.0$ ، $M_{oy}=0.0$ ، $M_{ox}=0.0$ أي بمعنى آخر أن المسند لا يعطي رد فعل على شكل عزم حول x أو y أو z وإنما ردود الأفعال في (O) تقتصر على شكل قوى باتجاه z,y,x.

$$\bar{T}_2 = \left(\frac{3}{\sqrt{34}} T_2 \right) \bar{i} + \left(\frac{5}{\sqrt{34}} T_2 \right) \bar{j}$$

$$\bar{T}_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{29}} T_1 \right) \bar{i} + \left(\frac{5}{\sqrt{29}} T_1 \right) \bar{j}$$

$$\bar{W} = -160(9.81) \bar{j}$$

ويأخذ العزوم للقوى الثلاث أعلاه حول المسند (O) فأن:-

$$\begin{aligned} \bar{M}_{T_2} = \bar{r}_{OA} \times \bar{T}_2 &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 8 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} \left(\frac{T_2}{\sqrt{34}} \right) \\ &= \left(\frac{T_2}{\sqrt{34}} \right) [\bar{i}(-40) - \bar{j}(-24)] \end{aligned}$$

$$\boxed{\bar{M}_{T_2} = \left(-\frac{40T_2}{\sqrt{34}} \right) \bar{i} + \left(\frac{24T_2}{\sqrt{34}} \right) \bar{j}}$$

$$\overline{M}_{T_1} = \bar{r}_{OA} \times \overline{T}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 8 \\ -2 & 5 & 0 \end{vmatrix} \left(\frac{T_1}{\sqrt{29}} \right) = \frac{T_1}{\sqrt{29}} [i(-40) - j(16)]$$

$$\boxed{\overline{M}_{T_1} = \left(-\frac{40T_1}{\sqrt{29}} \right) i - \left(\frac{16T_1}{\sqrt{29}} \right) j}$$

$$\overline{M}_w = +160(9.81)(4)i = +6.28i$$

ويأخذ المجموع الجبري لعزوم القوى في نقطة (O) حول المحور x:

$$\Sigma M_{OX} = 0.0$$

$$-\frac{40}{\sqrt{34}} T_2 - \frac{40T_1}{\sqrt{29}} + 6.28 = 0.0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

ويأخذ المجموع الجبري لعزوم القوى حول نقطة (O) والتي تلف حول المحور y:

$$\Sigma M_{Oy} = 0.0$$

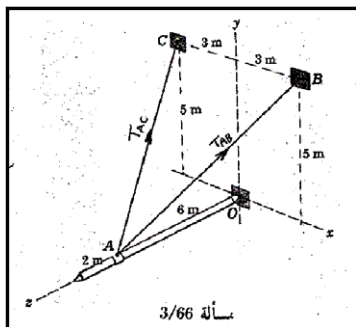
$$\frac{24}{\sqrt{34}} T_2 - \frac{16}{\sqrt{29}} T_1 = 0.0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

ويحل المعادلتين (1) ، (2) نحصل على قيم:-

$$T_1 = 0.507 \text{ kN}$$

$$T_2 = 0.366 \text{ kN}$$

ملاحظة: بإمكان الطالب الاستفادة من إمكانية حاسبات (CASIO fx-5000F) في حل المعادلات الآتية على غرار ما هو عليه في المعادلات (1) ، (2).



3/66 لذاراع التطوير المتجانس الأفقي كتلة 240

kg والمعلق بواسطة كيبلين مثبتين في B و C

وبواسطة مضجع كروي حلقي في O. أحسب

الشدة T في الكيبل AC.

الحل:

كما أسلفنا في المثال السابق لاتوجد عزوم كردود أفعال عند المسند O.

$$\overline{AB} = -6k + 5j + 3i$$

$$\overline{AB} = 3i + 5j - 6k \Rightarrow |\overline{AB}| = \sqrt{70}$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} \Rightarrow \lambda_{AB} = \frac{1}{\sqrt{70}} (3i + 5j - 6k)$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\overline{T}_{AB}}{|\overline{T}_{AB}|} \Rightarrow \overline{T}_{AB} = \frac{T_{AB}}{\sqrt{70}} (3i + 5j - 6k)$$

$$(\text{وزن الذراع}) \quad \overline{W} = -240(9.81)j$$

$$\overline{AC} = -3i + 5j - 6k \Rightarrow |\overline{AC}| = \sqrt{70}$$

$$\lambda_{AC} = \frac{\overline{AC}}{|\overline{AC}|} = \frac{1}{\sqrt{70}} (-3i + 5j - 6k)$$

$$\lambda_{AC} = \frac{\overline{T}_{AC}}{|\overline{T}_{AC}|}$$

$$\overline{T}_{AC} = \frac{T_{AC}}{\sqrt{70}} (-3i + 5j - 6k)$$

بأخذ عزوم القوى حول المسند (O):-

$$\overline{M}_{TAB} = \overline{r}_{OA} \times \overline{T}_{AB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} \left(\frac{T_{AB}}{\sqrt{70}} \right) = \frac{T_{AB}}{\sqrt{70}} [\mathbf{i}(-30) - \mathbf{j}(-18)]$$

$$\overline{M}_{TAB} = \frac{T_{AB}}{\sqrt{70}} (-30\mathbf{i} + 18\mathbf{j})$$

$$\overline{M}_{TAC} = \overline{r}_{OA} \times \overline{T}_{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 6 \\ -3 & 5 & -6 \end{vmatrix} \left(\frac{T_{AC}}{\sqrt{70}} \right)$$

$$\overline{M}_{TAC} = \left(\frac{T_{AC}}{\sqrt{70}} \right) [\mathbf{i}(-30) - \mathbf{j}(+18)] = \left(\frac{T_{AC}}{\sqrt{70}} \right) (-30\mathbf{i} - 18\mathbf{j})$$

$$\overline{M}_w = 240(9.81)(4)\mathbf{i} = 9.42\mathbf{i} \quad (\text{kN})$$

$$\Sigma M_{ox} = 0$$

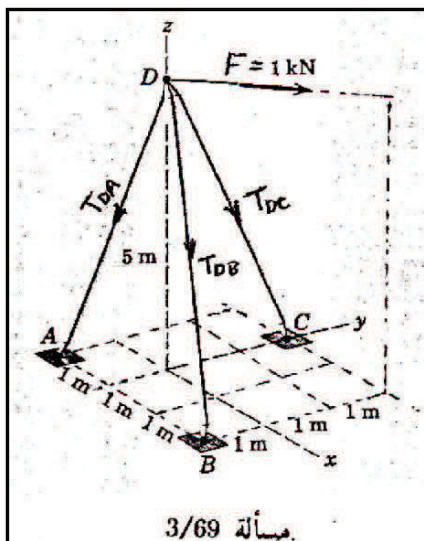
$$-\frac{30}{\sqrt{70}} T_{AB} - \frac{30}{\sqrt{70}} T_{AC} + 9.42 = 0 \quad \dots\dots(1)$$

$$\Sigma M_{oy} = 0$$

$$\frac{18}{\sqrt{70}} T_{AB} - \frac{18}{\sqrt{70}} T_{AC} = 0.0 \quad \dots\dots(2)$$

ويحل المعادلتين (1) ، (2) ينتج قيمة :-

$$T_{AC} = 1.31 \text{ kN} = T_{AB}$$



3/69 أحسب القوى في كل ذراع من الأذرع الثلاثة لثلاثي القوائم في نهاية كل ذراع مضجع كروي حلقي وقابل لحمل شد أو ضغط. أهمل أوزان الأذرع.

الحل: تخيل لو أسقطنا القوة 1 kN على المستوى xy لأمكن تحليل القوة إلى مركبتين باتجاه x, y. وعليه فأن المعادلة الاتجاهية للقوة 1 kN ستكون:-

$$\vec{F} = \vec{F}_x i + \vec{F}_y j$$

$$\vec{F} = 1 \cos 45^\circ i + 1 \sin 45^\circ j$$

$$\vec{F} = 0.707i + 0.707j$$

لو اعتبرنا أن جميع الأذرع تتعرض إلى

قوة شد بالاتجاهات المبينة في الشكل أعلاه وطبقنا معادلات الاتزان على جميع القوى المرتبطة في المفصل D بعد الاتيان بمعادلاتها الاتجاهية ، لأمكن معرفة قيم واتجاهات القوى للأذرع طبقا لما هو مبين أدناه:-

$$\vec{DB} = -5k + 2i - j$$

$$\vec{DB} = 2i - j - 5k$$

لنأتي بالمعادلات الاتجاهية للشد T_{DB} :-

$$|\vec{DB}| = \sqrt{30}$$

$$\lambda_{DB} = \frac{\vec{DB}}{|\vec{DB}|} = \frac{1}{\sqrt{30}}(2i - j - 5k)$$

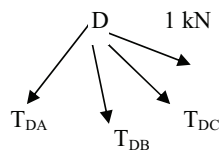
$$\lambda_{DB} = \frac{T_{DB}}{T_{DB}} \Rightarrow \vec{T}_{DB} = \frac{T_{DB}}{\sqrt{30}}(2i - j - 5k)$$

لنأتي بالمعادلات الاتجاهية للشد T_{DA} :

$$\vec{DA} = -5k - i - j \Rightarrow \vec{DA} = -i - j - 5k \Rightarrow |\vec{DA}| = \sqrt{27}$$

$$\lambda_{DA} = \frac{\vec{DA}}{|\vec{DA}|} = \frac{1}{\sqrt{27}}(-i - j - 5k) \Rightarrow \lambda_{DA} = \frac{\vec{T}_{DA}}{T_{DA}}$$

$$\vec{T}_{DA} = \frac{T_{DA}}{\sqrt{27}}(-i - j - 5k)$$



لنأتي بالمعادلة الاتجاهية لقوى الشد T_{DC} :-

$$\overline{DC} = -5k + 2j \Rightarrow \overline{DC} = 2j - 5k \Rightarrow |\overline{DC}| = \sqrt{29}$$

$$\lambda_{DC} = \frac{\overline{DC}}{|\overline{DC}|} = \frac{1}{\sqrt{29}} (2j - 5k)$$

$$\lambda_{DC} = \frac{\overline{T}_{DC}}{T_{DC}} \Rightarrow \boxed{\overline{T}_{DC} = \frac{T_{DC}}{\sqrt{29}} (2j - 5k)}$$

ويأخذ المجموع الجبري للقوى باتجاه x يساوي صفراً . أي :-

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\frac{2}{\sqrt{30}} T_{DB} - \frac{1}{\sqrt{27}} T_{DA} = -0.707 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\frac{2}{\sqrt{29}} T_{DC} - \frac{1}{\sqrt{30}} T_{DB} - \frac{1}{\sqrt{27}} T_{DA} = -0.707 \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\Sigma F_z = 0$$

$$\frac{-5}{\sqrt{29}} T_{DC} - \frac{5}{\sqrt{30}} T_{DB} - \frac{5}{\sqrt{27}} T_{DA} = 0.0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

ويحل المعادلات الثلاث أعلاه بالاستفادة من الإمكانيات المتوفرة في حاسبات (CASIO fx-5000)

نحصل على قيم :-

$$T_{DC} = -1.269 \text{ kN} \Rightarrow T_{DC} = 1.269 \text{ kN} \quad (\text{ضغط})$$

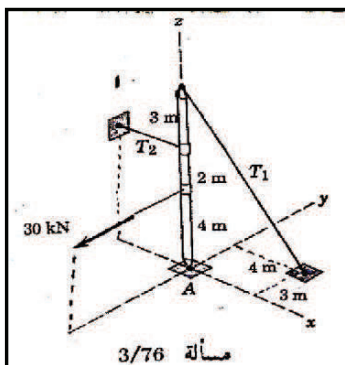
$$T_{DB} = -0.860 \text{ kN} \Rightarrow T_{DB} = 0.860 \text{ kN} \quad (\text{ضغط})$$

$$T_{DA} = 2.04 \text{ kN} \quad (\text{شد})$$

ملاحظة: في بداية الحل تم افتراض أن جميع الأذرع هي بحالة شد، لذا بعد تطبيق معادلات الاتزان

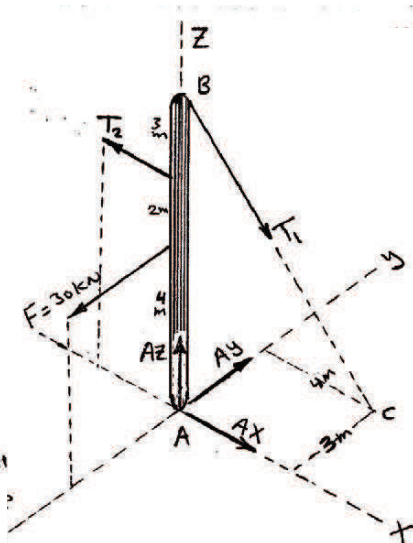
وعندما تظهر قيم البعض منها سالبة فهذا يعني أن تلك الأذرع ليست بحالة شد إنما هي

بحالة ضغط.



3/76 إذا كان وزن السارية مهملاً بالمقارنة مع الوزن المطبق عليها 30 kN أحسب الشدين T_1 و T_2 والقوة A المؤثرة على المفصل الكروي في A .

الحل:



$$\overline{BC} = -9\mathbf{k} + 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

$$\overline{BC} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 9^2} = \sqrt{106}$$

$$\overline{T} = \frac{T_1}{\sqrt{106}} (4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 9\mathbf{k})$$

المسند (A) له ثلاث قوى كرد فعل هما A_z , A_y , A_x وليس له أي رد فعل على شكل عزم.

بحساب العزم حول A - فأن:-

$$\begin{aligned} \overline{M}_{T_1} &= \overline{r}_{AB} \times \overline{T}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 9 \\ 4 & 3 & -9 \end{vmatrix} \frac{T_1}{\sqrt{106}} \\ &= [i(-27) - j(-36)] \frac{T_1}{\sqrt{106}} \end{aligned}$$

$$\overline{M}_{T_1} = \left(-\frac{27}{\sqrt{106}} T_1 \right) \mathbf{i} + \left(\frac{36}{\sqrt{106}} T_1 \right) \mathbf{j}$$

$$\overline{M}_{30} = 30(4)\mathbf{i} = 120\mathbf{i}$$

$$\overline{M}_{T_2} = -6T_2\mathbf{j}$$

$$\Sigma M_{Ax} = 0.0$$

$$-\frac{27}{\sqrt{106}}T_1 + 120 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = 45.76 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_{Ay} = 0.0$$

$$\frac{36}{\sqrt{106}}T_1 - 6T_2 = 0.0$$

$$\frac{36}{\sqrt{106}}(45.76) - 6T_2 = 0.0 \quad \Rightarrow \quad T_2 = 26.66 \text{ kN}$$

ولغرض التعرف على قيم ردود الأفعال A_z, A_y, A_x في المسند A فأن:-

$$\bar{T} = \frac{T_1}{\sqrt{106}}(4i + 3j - 9k) = \frac{45.76}{\sqrt{106}}(4i + 3j - 9k)$$

$$\bar{T} = 17.77i + 13.33j - 40k$$

$$\bar{T}_2 = -26.66i$$

$$\bar{F} = -30j$$

$$\Sigma F_x = 0.0$$

$$A_x + 17.77 - 26.66 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 8.89 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0.0$$

$$A_y + 13.33 - 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 16.67 \text{ kN}$$

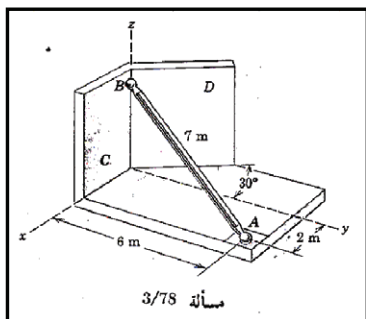
$$\Sigma F_z = 0.0$$

$$A_z - 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_z = 40 \text{ kN}$$

$$\therefore A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

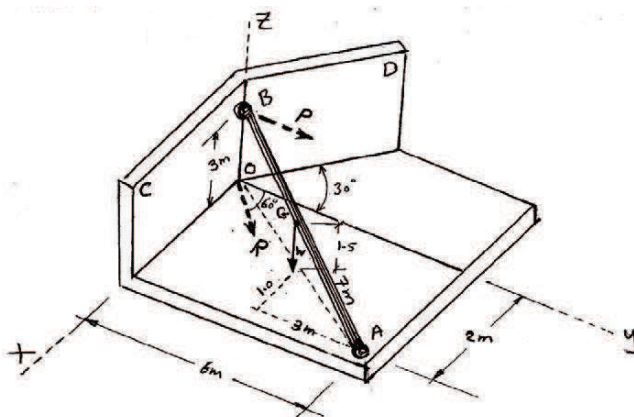
$$A = \sqrt{8.89^2 + 16.67^2 + 40^2}$$

$$A = 44.23 \text{ kN}$$



3/78 يسند أحد الجدارين العمودين. النهاية B لمحور متجانس كتلته 200 kg والمذكور في المثال 3/3 دور هذا الجدار زاوية 30° كما هو موضح هنا. أما النهاية A للمحور فهي مستندة على مضجع كروي حلقي في المستوى الأفقي x-y. أحسب قيم القوى P و R المطبقة على نهاية الكرة B للعمود بواسطة الجدران العمودية C و D على التوالي.

الحل:



$$OA = \sqrt{6^2 + 2^2} = 6.32 \text{ m}$$

$$OB = \sqrt{7^2 - 6.32^2} = 3 \text{ m}$$

إذاً الارتفاع في المستوي xy لغاية نقطة G موضع الوزن W هو بمقدار 1.5m. يُلاحظ من الشكل أن المسند الكروي عند B له إثنان من ردود الفعل هما (R) عمودي على السطح D. إسقاطي R على المستوى xy موضح بالشكل أعلاه لذا سوف يتحلل إلى مركبتين باتجاه x, y, وبذلك تكون معادلته الاتجاهية هي:-

$$\bar{R} = R_x i + R_y j = R \sin 60^\circ i + R \cos 60^\circ j$$

$$\therefore \bar{R} = (0.866R)i + 0.5Rj$$

بالإضافة إلى رد الفعل R هنالك رد فعل آخر هو P عمودي على السطح (C) بمعنى إنه باتجاه المحور

$$\boxed{\bar{P} = P_j}$$

y وبذلك فأن معادلته الاتجاهية تكون:-

$$W = -200(9.81)k = -1.962 \text{ k}$$

المسند A لايعطي أي رد فعل على شكل عزم. أي أن $M_{AX}=0$, $M_{AY}=0$, $M_{AZ}=0$. بينما يعطي رد فعل على شكل قوى ، وإذا ما أخذ مجموع العزوم في نقطة A باتجاه x أو y أو z يساوي صفراً فأن عزم جميع تلك القوى المارة في A تتساوي صفراً.

إذاً بحساب عزوم القوى الغير مارة في A يكون:-

$$\bar{M}_W = \bar{r}_{AG} \times \bar{W} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -3 & 1.5 \\ 0 & 0 & -1.962 \end{vmatrix}$$

$$\bar{M}_W = i(3 * 1.962) - j(1.962)$$

$$\boxed{\bar{M}_W = 5.88i - 1.962j}$$

$$\bar{M}_R = \bar{r}_{AB} \times \bar{R} = (-2i - 6j + 3k) \times (0.866Ri + 0.5Rj)$$

$$\bar{M}_R = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -6 & 3 \\ 0.866R & 0.5R & 0 \end{vmatrix} = \boxed{-1.5Ri + 2.598Rj + 4.2Rk}$$

$$\bar{M}_P = \bar{r}_{AB} \times \bar{P} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -6 & 3 \\ 0 & P & 0 \end{vmatrix} = -3Pi - 2Pk$$

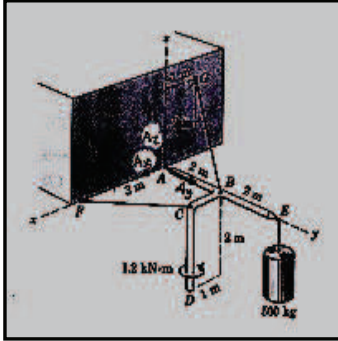
$$\Sigma M_{Ay} = 0.0$$

$$-1.962 + 2.598R = 0 \Rightarrow \boxed{R = 0.755 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_{Ax} = 0.0$$

$$5.886 - 1.5R - 3P = 0$$

$$5.886 - 1.5(0.755) - 3P = 0 \Rightarrow \boxed{P = 1.584 \text{ kN}}$$



3/79 إذا كان الهيكل المتين العديم الوزن قد ثبت إلى الجدار العمودي بواسطة مضجع كروي حلقي في النقطة A وبواسطة كبل BG و CF ويحمل الهيكل بالإضافة إلى الكتلة 500kg فهناك تأثير عزم الازدواج 1.2kN.m مطبق على الساق العمودي CD. احسب مركبة القوة في الاتجاه y المؤثرة على المضجع الكروي الحلقي في A (اقتراح: استخدام معادلة متجه واحدة التي تحذف جميع المجاهيل عدا A_y).

الحل: محتوى حل المسألة 2/105 سيساعد في فهم طبيعة حل هذه المسألة . عندما يؤخذ العزم حول الخط FG . وبأخذ العزم للقوى المتبقية حول أي نقطة على الخط FG فإن قوى الشد في الكيبلين BG , CF إضافة إلى رد الفعل A_x , A_z ستساوي صفراً كونها تمر بالخط FG . وبأخذ العزم للقوى المتبقية حول أي نقطة على الخط FG ولتكن F ومساواتها بالصفر بسبب الاتزان يكون:-

$$M_{FG} = \bar{M}_F \cdot \lambda_{FG} = 0.0$$

$$\overline{FG} = -4i + 2k \quad \Rightarrow \quad |\overline{FG}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

$$\lambda_{FG} = \frac{\overline{FG}}{|\overline{FG}|} = \frac{1}{\sqrt{20}}(-4i + 2k) \quad \bar{M}_c = 1.2k \quad , \quad \bar{w} = -\frac{500(9.81)}{1000}k = -4.905k$$

$$\bar{M}_w = \bar{r} \times \bar{w} = (-3i + 4j) \times (-4.905k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4.904 \end{vmatrix}$$

$$\bar{M}_w = i(-19.62) - j(14.715) + k(0.0)$$

$$\bar{M}_w = -19.62i - 14.715j$$

$$\bar{M}_{Ay} = -3A_y k$$

$$\therefore \bar{M}_F = \bar{M}_c + \bar{M}_w + \bar{M}_{Ay} = 1.2k - 19.62i - 14.715j - 3A_y k$$

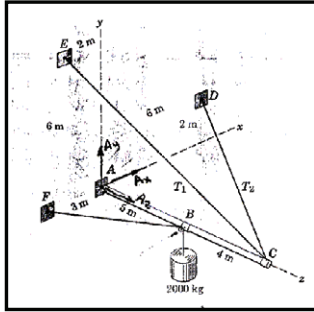
$$\bar{M}_F = -19.62i - 14.715j + (1.2 - 3A_y)k$$

وبالرجوع إلى المعادلة العامة أعلاه يكون:-

$$[-19.62\mathbf{i} - 14.715\mathbf{j} + (1.2 - 3A_y)\mathbf{k}] \cdot \frac{1}{\sqrt{20}}(-4\mathbf{i} + 2\mathbf{k}) = 0.0$$

$$(19.62 * 4) + 2(1.2 - 3A_y) = 0.0$$

$A_y = 13.48\text{kN}$



3/80 إذا كانت كتلة ذراع التطويل الذي طوله 9m تساوي 600kg مع مركز الثقل في المنتصف ومركّز على مضجع كروي حلقي في A بالإضافة إلى الكيلين T_1 , T_2 . أما الكيل الذي يحمل الكتلة 2000kg فإنه يمر من فوق بكرة محزوزة (sheave) في B ومثبت على السطح الأفقي x-y في F. أحسب قوة الشد T_1 . (ملاحظة: اكتب معادلة عامة تحذف فيها كل المجاهيل إلا T_1).

الحل: حساب قيمة T_1 بأخذ العزوم حول الخط AD وتحديدًا عند أي نقطة على الخط ولتكن A- يمكن حذف كل المجاهيل عدا T_1 . طبقاً للمعادلة العامة التالية:-

$$M_{AD} = \bar{M}_A \cdot \lambda_{AD} = 0.0$$

يقصد بالمجاهيل الأخرى هي T_2 , A_y , A_z , A_x .

$$\overline{AD} = 6i + 2j \Rightarrow |\overline{AD}| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$$

$$\lambda_{AD} = \frac{\overline{AD}}{|\overline{AD}|} = \frac{1}{\sqrt{40}} (6i + 2j)$$

نحسب المعادلة الاتجاهية للشد T_1 وعزومه حول نقطة A -

$$\overline{CE} = -9k + 6j - 2i \Rightarrow |\overline{CE}| = \sqrt{9^2 + 6^2 + 2^2} = 11$$

$$\lambda_{CE} = \frac{1}{11} (-2i + 6j - 9k)$$

$$\lambda_{CE} = \frac{\overline{T_1}}{T_1} \Rightarrow \overline{T_1} = \frac{T_1}{11} (-2i + 6j - 9k)$$

$$(\bar{M}_A)_{T_1} = \bar{r}_{AC} \times \overline{T_1} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 9 \\ -2 & 6 & -9 \end{vmatrix} \frac{T_1}{11}$$

$$(\bar{M}_A)_{T_1} = \frac{T_1}{11} (-54i - 18j)$$

عزم الوزن (2000 kg) يمثل نفس قيمة الشد في الكيل BF عليه

$$W_1 = \frac{2000(9.81)}{1000} = 19.62 \text{ kN} = T_{BF}$$

$$(\bar{M}_A)_{W_1} = \bar{r}_{AB} \times \bar{w}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -19.62 & 0 \end{vmatrix} = 98.1i$$

$$\bar{BF} = -3i - 5k \Rightarrow |\bar{BF}| = \sqrt{34}$$

$$\lambda_{BF} = \frac{\bar{BF}}{|\bar{BF}|} = \frac{1}{\sqrt{34}}(-3i - 5k)$$

$$\lambda_{BF} = \frac{\bar{T}_{BF}}{T_{BF}} \Rightarrow \bar{T}_{BF} = \frac{19.62}{\sqrt{34}}(-3i - 5k)$$

$$(\bar{M}_A)_{T_{BF}} = \bar{r}_{AB} \times \bar{T}_{BF} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & -5 \end{vmatrix} \frac{19.62}{\sqrt{34}} = -50.5j$$

عزم وزن ذراع التطويل ($w_2 = 600 \text{ kg}$) عند منتصف الذراع أي على مسافة (4.5) من نقطة -A.

$$w_2 = \frac{600(9.81)}{1000} = 5.886 \text{ kN}$$

$$(\bar{M}_A)_{w_2} = 5.886(4.5)i = 26.487i$$

$$\therefore \bar{M}_A = (\bar{M}_A)_{T_1} + (\bar{M}_A)_{w_1} + (\bar{M}_A)_{T_{BF}} + (\bar{M}_A)_{w_2}$$

$$\bar{M}_A = \frac{T_1}{11}(-54i - 18j) + 98.1i - 50.5j + 26.487i$$

$$\bar{M}_A = (98.1 + 26.487 - \frac{54}{11}T_1)i + (-50.5 - \frac{18}{11}T_1)j$$

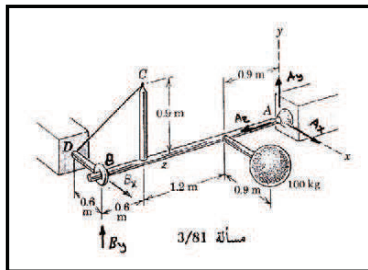
وبالرجوع إلى المعادلة العامة فإن :-

$$\bar{M}_A \cdot \lambda_{AD} = 0.0$$

$$\left[(98.1 + 26.487 - \frac{54}{11}T_1)i + (-50.5 - \frac{18}{11}T_1)j \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{40}}(6i + 2j) = 0.0$$

$$6(98.1 + 26.487 - \frac{54}{11}T_1) + 2(-50.5 - \frac{18}{11}T_1) = 0.0$$

$$T_1 = 19.75 \text{ kN}$$



3/81 إن الهيكل المكون من أنابيب ملحومة ليس

له وزن ومستند في A بواسطة مضجج كروي
حلقي وعلى حلقة لمساء في B وبواسطة سلك
من الدعامة في C إلى النقطة المثبتة D .
ويحمل الهيكل الكرة التي كتلتها 100kg
الملحومة بالدعامة الأفقية.

أحسب القوة المطبقة على الهيكل بواسطة الحلقة
المثبتة في B.

(ملاحظة: يمكن حل المسألة بدون استعمال القوة في A)

الحل: يتم أولاً إيجاد المعادلة الاتجاهية لقوة شد الكابل CD والذي سيرمز له T حيث:

$$\overline{CD} = -0.9\mathbf{i} + 0.6\mathbf{k} - 0.6\mathbf{j}$$

$$\overline{CD} = -0.6\mathbf{i} - 0.9\mathbf{j} + 0.6\mathbf{k} \Rightarrow |\overline{CD}| = \sqrt{1.53}$$

$$\lambda_{CD} = \frac{\overline{CD}}{|\overline{CD}|} = \frac{1}{\sqrt{1.53}}(-0.6\mathbf{i} - 0.9\mathbf{j} + 0.6\mathbf{k})$$

$$\lambda_{CD} = \frac{\overline{T}}{T} \Rightarrow \overline{T} = \frac{T}{\sqrt{1.53}}(-0.6\mathbf{i} - 0.9\mathbf{j} + 0.6\mathbf{k})$$

وبأخذ عزوم جميع القوى حول نقطة الأصل - A يكون:-

$$(\overline{M}_A)_T = \vec{r}_{AC} \times \overline{T} = (0.9\mathbf{j} + 2.1\mathbf{k}) \times \frac{T}{\sqrt{1.53}}(-0.6\mathbf{i} - 0.9\mathbf{j} + 0.6\mathbf{k})$$

$$(\overline{M}_A)_T = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0.9 & 2.1 \\ -0.6 & -0.9 & 0.6 \end{vmatrix} \frac{T}{\sqrt{1.53}}$$

$$(\overline{M}_A)_T = \frac{T}{\sqrt{1.53}}[i(0.9 * 0.6 + 0.9 * 2.1) - j(0.6 * 2.1) + k(0.6 * 0.9)]$$

$$(\overline{M}_A)_T = \frac{T}{\sqrt{1.53}}(2.43\mathbf{i} - 1.26\mathbf{j} + 0.54\mathbf{k})$$

عزم الوزن (w=100*9.81=981 N) حول نقطة A - هو :-

$$(\bar{M}_A)_w = \bar{r} \times \bar{w} = (0.9i + 0.9k) \times (-981j) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0.9 & 0 & 0.9 \\ 0 & -981 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(\bar{M}_A)_w = i(981 \cdot 0.9) - j(0.0) + k(-0.9 \cdot 981)$$

$$(\bar{M}_A)_w = 882.9i - 882.9k$$

عند الحلقة - B هناك إثنان من ردود الأفعال B_x, B_y عزمها حول نقطة A - هو:

$$(\bar{M}_A)_{B_x} = (2.7B_x)j$$

$$(\bar{M}_A)_{B_y} = (-2.7B_y)i$$

ويتطبيق معادلات الاتزان يمكن الحصول على القيم المطلوبة في المسألة.

$$\Sigma M_z = 0.0$$

$$\frac{T}{\sqrt{1.53}}(0.54) - 882.9 = 0.0 \quad \Rightarrow \quad T = 2022 \text{ N}$$

$$\Sigma M_y = 0.0$$

$$\frac{2022}{\sqrt{1.53}}(1.26) + 2.7B_x = 0.0 \quad \Rightarrow \quad B_x = 762.8 \text{ N}$$

$$\Sigma M_x = 0.0$$

$$-\frac{2022}{\sqrt{1.53}}(2.43) + 882.9 - 2.7B_y = 0.0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 1798 \text{ N}$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{762.8^2 + 1798^2} = 1953 \text{ N}$$

ملاحظة مهمة: لو افترضنا أن المطلوب في المسألة هو إيجاد رد الفعل B_x فقط من خلال كتابة معادلة

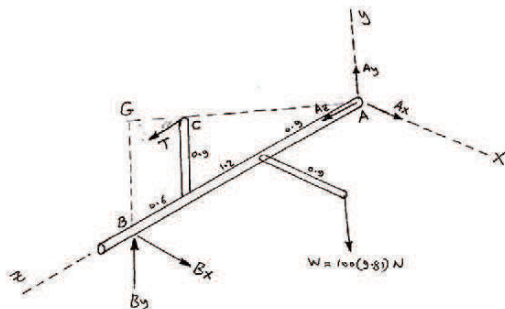
عامة تحذف كل المجاهيل عدا B_x . فيمكن إيجاد ذلك من خلال حساب العزم حول الخط AG المبين

في الشكل المجاور وتحديداً عند أي نقطة على الخط ولتكن A - ومساواته بالصفر طبقاً للمعادلة

العامة:-

$$M_{AG} = \bar{M}_A \cdot \lambda_{AG} = 0.0$$

عندها سيكون عزوم ردود الأفعال عند A والشد في الكيبل - T إضافة إلى رد الفعل By مساوية للصفر وبالتالي سيكون رد الفعل Bx هو المجهول الوحيد الذي يمكن حسابه تبعاً لما يأتي:-



من النسبة والتناسب نحصل على طول GB:

$$\frac{GB}{2.7} = \frac{0.9}{2.1} \Rightarrow GB = 1.157 \text{ m}$$

$$\overline{AG} = 1.157\mathbf{j} + 2.7\mathbf{k} \Rightarrow |\overline{AG}| = \sqrt{8.63}$$

$$\lambda_{AG} = \frac{1}{\sqrt{8.63}}(1.157\mathbf{j} + 2.7\mathbf{k})$$

من الحل السابق:-

$$(\overline{M}_A)_w = 882.9\mathbf{i} - 882.9\mathbf{k}$$

$$(\overline{M}_A)_{Bx} = (2.7B_x)\mathbf{j}$$

$$\therefore \overline{M}_A = 882.9\mathbf{i} + (2.7B_x)\mathbf{j} - 882.9\mathbf{k}$$

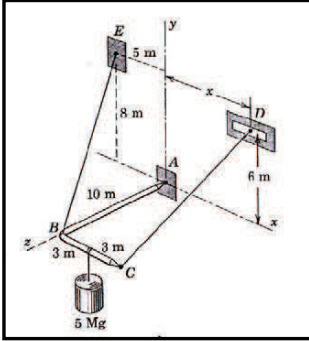
وبالرجوع إلى المعادلة العامة:-

$$\overline{M}_A \cdot \lambda_{AG} = 0.0$$

$$[882.9\mathbf{i} + (2.7B_x)\mathbf{j} - 882.9\mathbf{k}] \cdot \frac{1}{\sqrt{8.63}}(1.157\mathbf{j} + 2.7\mathbf{k}) = 0.0$$

$$1.157(2.7B_x) - 2.7(882.9) = 0.0$$

$$B_x = 763 \text{ N}$$



3/82 إذا كان القضيب المنثني ABC مربوطاً إلى السطح العمودي x-y بواسطة مضجع كروي حلقي في النقطة A ومسند بكبلين BE و CD وإذا أهملنا وزن القضيب بالمقارنة مع الكتلة المعلقة 5Mg فإن هنالك موقعاً واحداً للنقطة D على امتداد الشق الأفقي الذي يمر منه الكيبل بحيث يكون القضيب بالوضع الموضح في الشكل. أوجد x .

الحل: تؤخذ العزوم حول الخط AE وتحديدأ عند أي نقطة على الخط ولتكن A . وبذلك تكون المعادلة العامة:-

$$M_{AE} = \bar{M}_A \cdot \lambda_{AE} = 0.0$$

وبموجب ذلك ستصفر عزوم القوى عند المستند A والشد T_{BE} . ولحساب متطلبات المعادلة

العامة نتبع الآتي:-

$$w = 5Mg = 5 \cdot 10^6 \text{ gm} = 5 \cdot 10^3 \text{ kg} = 5 \cdot 10^3 (9.81) \text{ N} = 49.05 \text{ kN}$$

$$\therefore \bar{w} = -49.05 \text{ j}$$

$$(\bar{M}_A)_w = \bar{r}_{AB} \times \bar{w} = (3\text{i} + 10\text{k}) \times (-49.05\text{j}) = \begin{vmatrix} \text{i} & \text{j} & \text{k} \\ 3 & 0 & 10 \\ 0 & -49.05 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(\bar{M}_A)_w = 490.5\text{i} - 147.15\text{k}$$

$$\overline{CD} = -6\text{i} - 10\text{k} + 6\text{j} + x\text{i} = (x-6)\text{i} + 6\text{j} - 10\text{k}$$

$$|\overline{CD}| = \sqrt{(x-6)^2 + 136}$$

$$\bar{T}_{CD} = \frac{T_{CD}}{\sqrt{(x-6)^2 + 136}} [(x-6)\text{i} + 6\text{j} - 10\text{k}]$$

$$(\bar{M}_A)_{T_{CD}} = \begin{vmatrix} \text{i} & \text{j} & \text{k} \\ 6 & 0 & 10 \\ (x-6) & 6 & -10 \end{vmatrix} \frac{T_{CD}}{\sqrt{(x-6)^2 + 136}}$$

$$(M_A)_{T_{CD}} = \frac{T_{CD}}{\sqrt{(x-6)^2 + 136}} (-60i + (10x)j + 36k)$$

$$\overline{AE} = -5i + 8j \Rightarrow |\overline{AE}| = \sqrt{89}$$

$$\lambda_{AE} = \frac{1}{\sqrt{89}} (-5i + 8j)$$

بالرجوع إلى المعادلة العامة:-

$$\overline{M}_A \cdot \lambda_{AE} = 0.0$$

$$\left[\left(-\frac{60T_{CD}}{\sqrt{(x-6)^2 + 136}} + 490.5 \right) i + \frac{10 \times T_{CD}}{\sqrt{(x-6)^2 + 136}} j - 147.15k \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{89}} (-5i + 8j) = 0.0$$

$$\frac{60(5)}{\sqrt{(x-6)^2 + 136}} T_{CD} - 5(490.5) + \frac{80x}{\sqrt{(x-6)^2 + 136}} T_{CD} = 0.0$$

$$\frac{T_{CD}}{\sqrt{(x-6)^2 + 136}} (300 + 80x) = 5(490.5) \dots\dots\dots(1)$$

لو تأملنا الشد في الكيبل BE نجد عدم وجود مركبة عزم ناتجة منه تدور حول المحور - Z لذا مرة أخرى بأخذ العزم حول نقطة A - يكون:-

$$\Sigma M_z = 0.0$$

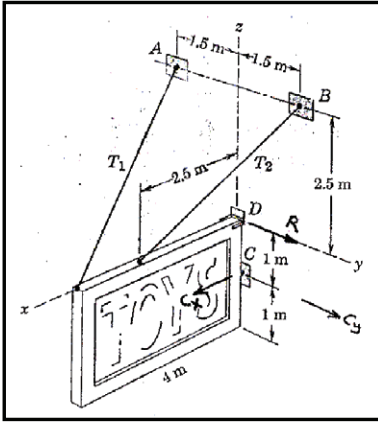
$$\frac{T_{CD}}{\sqrt{(x-6)^2 + 136}} (36) - 147.15 = 0 \Rightarrow \frac{T_{CD}}{\sqrt{(x-6)^2 + 136}} = \frac{147.15}{36} \dots\dots(2)$$

وبتعويض المعادلة (2) في (1) ينتج:-

$$\frac{147.15}{36} (300 + 80x) = 5(490.5)$$

$$300 + 80x = 600$$

$$x = 3.75 \text{ m}$$



3/83 إذا كانت اللوحة المستطيلة هي 100kg مع مركز ثقلها في المستطيل وإذا كان المسند في نقطة C هو مضجع كروي حلقي وفي الزاوية D فإن المفصل يطبق قوة في اتجاه - y فقط، احسب الشد T1 و T2 في الأسلاك الحاملة للوحة ، والقوة الكلية في C والقوة الجانبية في D.

الحل:

بأخذ العزم حول نقطة C يكون:-

$$\bar{w} = -100(9.81)\mathbf{k} = -981\mathbf{k}$$

$$(\bar{M}_c)_w = 981(2)\mathbf{j} = 1962\mathbf{j}$$

$$(\bar{M}_c)_R = -R(1)\mathbf{i} = -R\mathbf{i}$$

$$\lambda_{T_2} = \frac{\bar{T}_2}{T_2}$$

$$\bar{T}_2 = \frac{T_2}{\sqrt{14.75}} (-2.5\mathbf{i} + 1.5\mathbf{j} + 2.5\mathbf{k})$$

$$\bar{T}_1 = \frac{T_1}{\sqrt{24.5}} (-4\mathbf{i} - 1.5\mathbf{j} + 2.5\mathbf{k})$$

$$(\bar{M}_c)_{T_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2.5 & 0 & 1 \\ -2.5 & 1.5 & 2.5 \end{vmatrix} \frac{T_2}{\sqrt{14.75}} = \frac{T_2}{\sqrt{14.75}} (-1.5\mathbf{i} - 8.75\mathbf{j} + 3.75\mathbf{k})$$

$$(\bar{M}_c)_{T_1} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0 & 1 \\ -4 & -1.5 & 2.5 \end{vmatrix} \frac{T_1}{\sqrt{24.5}}$$

$$(\bar{M}_c)_{T_1} = \frac{T_1}{\sqrt{24.5}} (1.5\mathbf{i} - 14\mathbf{j} - 6\mathbf{k})$$

$$\Sigma M_y = 0.0$$

$$\frac{8.75}{\sqrt{14.75}} T_2 + \frac{14}{\sqrt{24.5}} T_1 = 1962 \dots \dots \dots (1)$$

$$\Sigma M_z = 0.0$$

$$\frac{3.75}{\sqrt{14.75}} T_2 - \frac{6}{\sqrt{24.5}} T_1 = 0.0 \dots \dots \dots (2)$$

وبحل المعادلتين (1) ، (2) ينتج:-

$$T_2 = 430.6 \text{ N} , T_1 = 346.8 \text{ N}$$

$$\Sigma M_x = 0.0$$

$$-R - \frac{1.5}{\sqrt{14.75}} (430.6) + \frac{1.5}{\sqrt{24.5}} (346.8) = 0.0$$

$$\boxed{R = 63.1 \text{ N}}$$

$$\Sigma F_x = 0.0$$

$$c_x - \frac{2.5}{\sqrt{14.74}} (430.6) - \frac{4}{\sqrt{24.5}} (346.8) = 0.0$$

$$c_x = 560 \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = 0.0$$

$$c_y + \frac{1.5}{\sqrt{14.74}} (430.6) - \frac{1.5}{\sqrt{24.5}} (346.8) + 63.1 = 0.0$$

$$c_y = -126.18 \text{ N}$$

$$\Sigma F_z = 0.0$$

$$c_z + \frac{2.5}{\sqrt{14.74}} (430.6) + \frac{2.5}{\sqrt{24.5}} (346.8) - 981 = 0.0$$

$$c_z = 525.5 \text{ N}$$

إذا اعتبرنا المسند - C مقيد الحركة باتجاه y فإن:-

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = \sqrt{560^2 + 126.18^2 + 525.5^2} = 778 \text{ N}$$

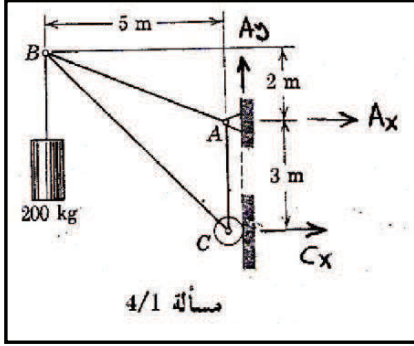
أما إذا اعتبرنا المسند - C غير مقيد الحركة باتجاه y فأن:-

$$c = \sqrt{560^2 + 525.5^2} = 768 \text{ N}$$

الفصل العاشر

حلول مسائل
تحليل المسنمات بطريقة
المفاصل

4/1 احسب القوة في كل عضو للسنام المحمل.



الجواب:

في طريقة المفاصل المستخدمة في تحليل المسنمات يتم قطع المفصل مع الأعضاء المرتبطة به. عند قطع المفصل يجب أن نضع في الاعتبار أن عدد الأعضاء المجهولة المرتبطة بالمفصل يجب أن لا تزيد عن إثنان يتم إيجادها من خلال تطبيق معادلات الاتزان $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma F_x = 0$

في بداية حل السؤال ، يجب التعرف على ردود الأفعال عند المساند A , C المشار إليها في الشكل.

$$+\Sigma M_A = 0$$

$$C_x (3) + \frac{200(9.81)}{1000} (5) = 0 \Rightarrow C_x = -3.327 \text{ kN}$$

$$\therefore C_x = 3.27 \text{ kN} \leftarrow$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$-3.27 + A_x = 0 \Rightarrow A_x = 3.27 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$A_y - \frac{200(9.81)}{1000} = 0 \Rightarrow A_y = 1.962 \text{ kN}$$

لاحظ في البداية تم افتراض اتجاه ردود الأفعال في (C) ، (A) ، فإذا ظهر قيمة رد الفعل موجبة كان هذا الاتجاه صحيح أما إذا كان سالب فيجب أن نعكس إتجاهه الذي تم افتراضه ابتداءً. نقطع المفصل (C) فيكون مخطط الجسم الحر له كما يبدو في الشكل المجاور. الأعضاء المجهولة يتم افتراضها في البداية على إنها شد ثم يتم التأكد من حالتها (شد أو ضغط) من خلال تطبيق معادلات الاتزان تبعاً لما يأتي:-

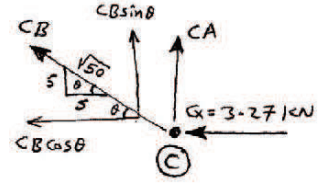
$$\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$-3.27 - CB \left(\frac{5}{\sqrt{50}} \right) = 0$$

$$CB = -4.62 \text{ kN} = 4.62 \text{ kN} \quad (\text{ضغط})$$

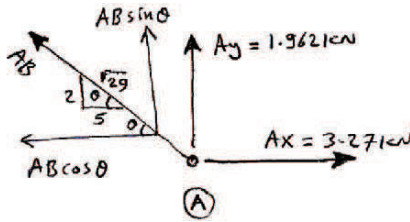
$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$CA - 4.62 \frac{5}{\sqrt{50}} = 0 \Rightarrow CA = 3.27 \text{ kN} \quad \text{شد}$$



لاحظ بعد ما تأكدنا أن (CB) هي بحالة ضغط وليست شد فلا حاجة من عكس اتجاهها في الشكل بل يكفي أن نضع في اعتبارنا أن جميع مركباتها هي باتجاه عكس الاتجاه الذي رُسمت به في الشكل وهذا ما تم العمل به في حسابنا للقوة في العضو CA.

الآن ولغرض التعرف على حالة القوة في العضو AB نعمل على قطع المفصل A -

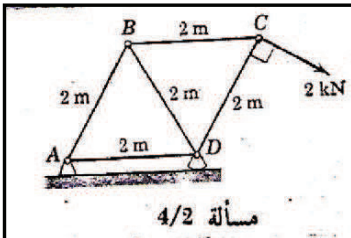


$$\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$3.27 - AB \left(\frac{5}{\sqrt{29}} \right) = 0$$

$$AB = 3.52 \text{ kN} \quad (\text{شد})$$

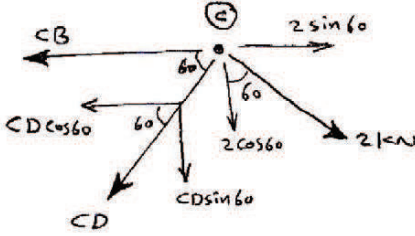
ملاحظة: يمكن تحليل المسنم من البداية بقطع المفصل B- دون الحاجة إلى إيجاد ردود الأفعال عند المستند C, A. وهذا ما سيتم عمله في السؤال 4/2.



4/2 احسب القوة في كل عضو للسنام.

الحل:

بما أن جميع الأضلاع متساوية إذاً جميع زوايا المستم 60° وهو من خاصية المثلثات المتساوية الأضلاع.



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$-2 \cos 60 - CD \sin 60 = 0$$

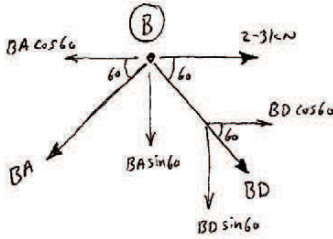
$$CD = -1.15 \text{ kN} = 1.15 \text{ kN (ضغط)}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$2 \sin 60 - (-1.15 \cos 60) - CB = 0$$

$$CB = 2.3 \text{ kN (شد)}$$

بعد ما عرفنا قيم القوى عند الأعضاء المرتبطة بالمفصل - C ، يمكن الآن البدء بقطع المفصل - B كون الأعضاء المجهولة المرتبطة به لاتزيد عن إثتان:



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$-BA \sin 60 - BD \sin 60 = 0 \quad \dots (1)$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

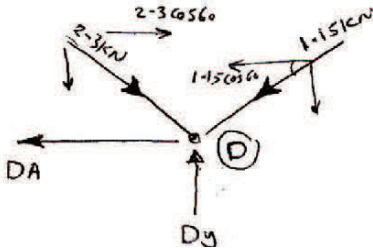
$$-BA \cos 60 + BD \cos 60 + 2.3 = 0 \quad \dots (2)$$

وبحل المعادلتين (1) و (2) نحصل على قيم :-

$$BA = 2.3 \text{ kN (شد)}$$

$$BD = -2.3 \text{ kN} = 2.3 \text{ kN (ضغط)}$$

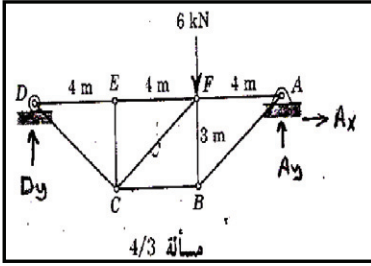
الآن لم يبقى غير العضو DA والذي يمكن التعرف على قيمته من خلال قطع المفصل - D.



$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$-DA + 2.3 \cos 60 - 1.15 \cos 60 = 0.0$$

$$DA = 0.575 \text{ kN (شد)}$$



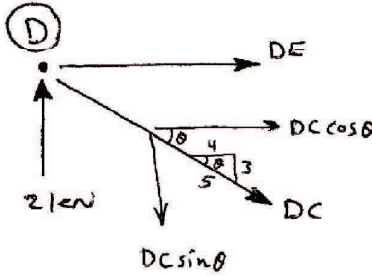
4/3 أحسب القوة في العضو CF للسنام المحمل.

الحل:

إذا بدئنا بقطع أي مفصل فسند هناك أكثر من مجهولين. لذا يجب في البداية حساب ردود الأفعال في D أو A كي يكون بالإمكان البدء بقطع المفصل - D يليه المفصل - E ويليه المفصل - C كي تصل إلى معرفة القوة عند العضو CF.

$$\uparrow + \Sigma M_A = 0$$

$$-D_y(12) + 6(4) = 0.0 \Rightarrow D_y = 2 \text{ kN}$$



الآن نقطع المفصل - D :-

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$2 - DC \sin \theta = 0$$

$$2 - DC \left(\frac{3}{5}\right) = 0$$

$$DC = 3.33 \text{ kN} \quad (\text{شد})$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

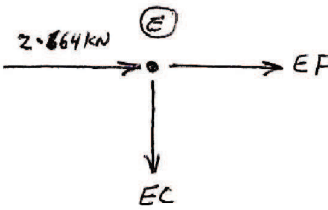
$$DE + 3.33 \left(\frac{3}{5}\right) = 0.0$$

$$DE = -2.664 \text{ kN} = 2.664 \text{ kN} \quad (\text{ضغط})$$

الآن نقطع المفصل - E

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$EC = 0.0$$



الآن بعد الإتيان بالقوة عند الأعضاء DC, EC ، يمكن قطع المفصل - C حيث عدد الأعضاء المرتبطة به أصبحت إثنان فقط ومنه سيتم حساب القوة عند العضو CF المطلوب في المسألة.

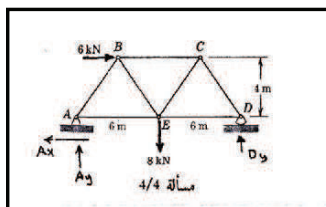
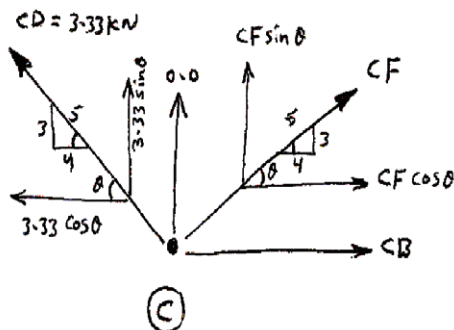
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$CF \sin \theta + 3.33 \sin \theta = 0$$

$$CF \left(\frac{3}{5}\right) + 3.33 \left(\frac{3}{5}\right) = 0$$

$$CF = -3.33 \text{ kN}$$

$$CF = 3.33 \text{ kN} \quad (\text{ضغط})$$



4/4 أحسب القوى في كل عضو للسنام المحمل .

إن جميع المثلثات متساوية الساقين

الحل:

من غير الممكن بدء تحليل أو قطع أي عقدة قبل إيجاد ردود الأفعال عند المسندين (A, D) ذلك لأن كل عقدة يرتبط بها أكثر من مجهولين. لذا فلمعرفة ردود الأفعال.

$$\curvearrowleft + \Sigma M_A = 0$$

$$D_y (12) - 8(6) - 6(4) = 0 \Rightarrow D_y = 6 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$A_y - 8 + 6 = 0 \Rightarrow A_y = 2 \text{ kN}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$-A_x + 6 = 0 \Rightarrow A_x = 6 \text{ kN}$$

بقطع المفصل - A :

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

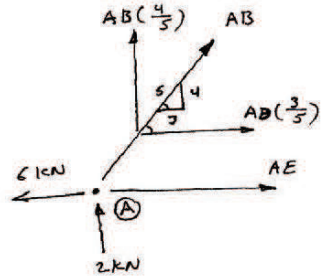
$$2 + AB\left(\frac{4}{5}\right) = 0 \Rightarrow AB = -2.5 \text{ kN}$$

(ضغط)

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$AE + (-2.5)\left(\frac{3}{5}\right) = 0$$

$$AE = 1.5 \text{ kN (شد)}$$



بقطع المفصل - B :

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

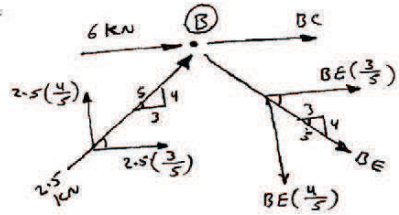
$$2.5\left(\frac{4}{5}\right) - BE\left(\frac{4}{5}\right) = 0$$

$$BE = 2.5 \text{ kN (شد)}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$6 + 2.5\left(\frac{3}{5}\right) + 2.5\left(\frac{3}{5}\right) + BC = 0$$

$$BC = -9 \text{ kN (شد)}$$



بقطع المفصل - D :

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

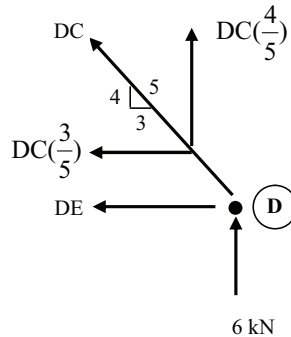
$$6 + DC\left(\frac{4}{5}\right) = 0$$

$$DC = -7.5 \text{ kN (شد)}$$

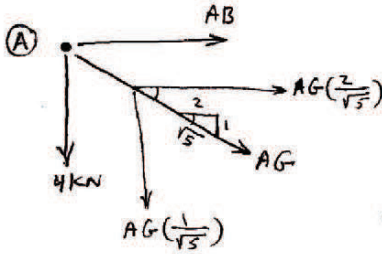
$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$-DE - (-7.5)\left(\frac{3}{5}\right) = 0$$

$$DE = 4.5 \text{ kN (شد)}$$



الآن نقطع المفصل - A :-



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$-4 - AG\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0$$

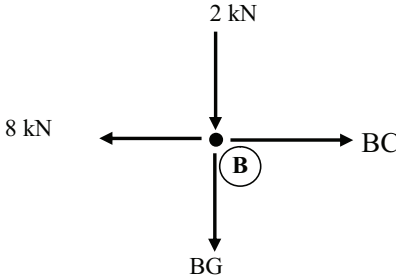
$$AG = -8.94 \text{ kN}$$

$$AG = 8.94 \text{ kN} \quad (\text{ضغط})$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$AB - 8.94\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0$$

$$AB = 8 \text{ kN} \quad (\text{شد})$$



الآن نقطع المفصل - B :-

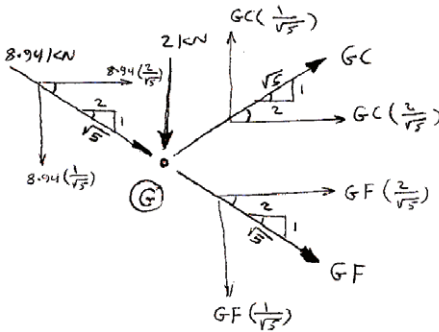
$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$BC - 8 = 0 \Rightarrow BC = 8 \text{ kN} \quad (\text{شد})$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$-2 - BG = 0$$

$$BG = -2 \text{ kN} = 2 \text{ kN} \quad (\text{ضغط})$$



الآن نقطع المفصل - G :-

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$GC\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + GF\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + 8.94\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0$$

$$GC + GF = -8.94 \quad \dots (1)$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$- 8.94 \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) - 2 + GC \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) - GF \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 0$$

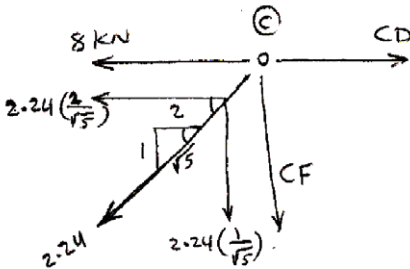
$$\frac{1}{\sqrt{5}} GC - \frac{1}{\sqrt{5}} GF = 6 \quad \dots (2)$$

وبحل المعادلتين (1) ، (2) نحصل على قيم:-

$$GC = 2.24 \text{ kN} \quad (\text{شد})$$

$$GF = - 11.12 \text{ kN} = 11.12 \text{ kN} \quad (\text{ضغط})$$

الآن نقطع المفصل - C - :-



$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

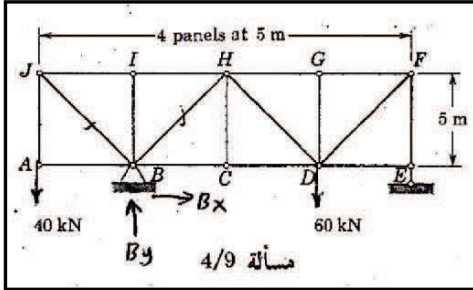
$$- CF - 2.24 \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 0$$

$$CF = - 1.0 \text{ kN}$$

$$CF = 1.0 \text{ kN}$$

(ضغط)

4/9 احسب القوى في الذراعين BH و JB



للسنام المحمل .

الحل:

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

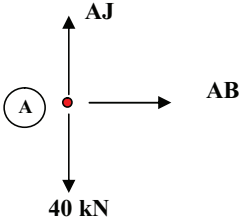
$$B_x = 0.0$$

$$\curvearrowright + \Sigma M_E = 0$$

$$- B_y (15) + 60 (5) + 40 (20) = 0$$

$$B_y = 73.33 \text{ kN}$$

نبدأ بقطع المفصل - A :-



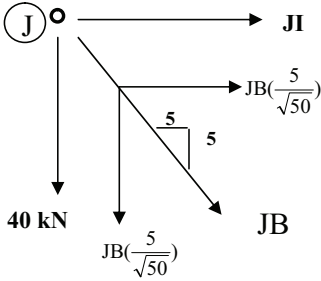
$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$AJ = 40 \text{ kN} \quad (\text{شد})$$

$$\Sigma F_x = 0.0$$

$$AB = 0.0$$

نقطع المفصل - J :-



$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$- 40 - JB \left(\frac{5}{\sqrt{50}} \right) = 0$$

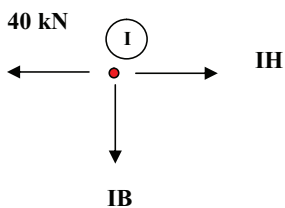
$$JB = -56.6 \text{ kN}$$

$$JB = 56.6 \text{ kN} \quad (\text{ضغط})$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$JI + (-56.6) \left(\frac{5}{\sqrt{50}} \right) = 0$$

$$JI = 40 \text{ kN} \quad (\text{شد})$$



نقطع المفصل - I -

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$IB = 0.0$$

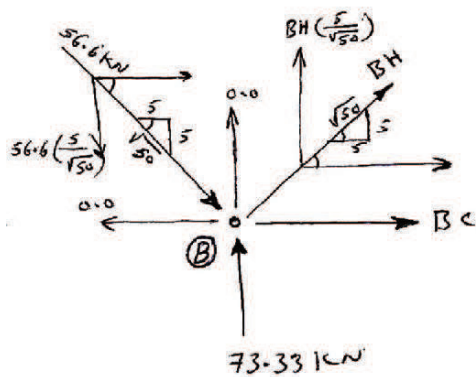
نقطع المفصل - B -

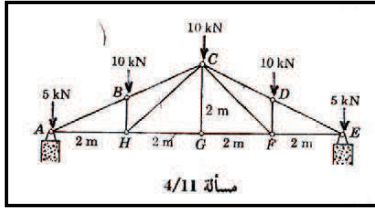
$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$73.33 - 56.6\left(\frac{5}{\sqrt{50}}\right) + BH\left(\frac{5}{\sqrt{50}}\right) = 0$$

$$BH = -47.1 \text{ kN}$$

$$BH = 47.1 \text{ kN (ضغط)}$$





4/11 يؤثر حمل من الثلج على العقد العلوي لسنام
برات السقفي (pratt truss).
أهمّل أي مركبات أفقية لردود الفعل في الدعام
وأحسب القوى في الأتّرع CH, BC, BH.

الحل:

لاحظ أن المسنم متماثل من ناحية التحميل.

بمعنى لا حاجة من استخدام معادلات الاتزان في إيجاد ردود الأفعال، وإن استخدمنا معادلات الاتزان فنجد
أن قيم ردود الأفعال ومن خلال التماثل نتوزع مناصفتا بين المسندين (E, A) أي :-

$$A_y = E_y = \frac{10(3) + 5(2)}{2} = 20 \text{ kN}$$

بأخذ المفصل - A

لاحظ أن الأعضاء AB, BC تميل بنسبة 2 : 4

أي بنسبة 1 : 2.

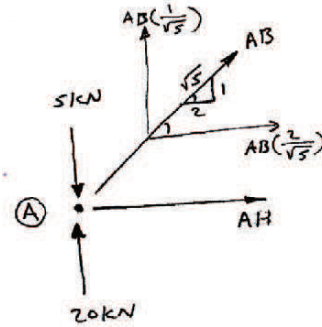
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$20 - 5 + AB\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0.0$$

$$AB = -33.54 \text{ kN (ضغط)}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$AH + (-33.54)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0.0 \Rightarrow AH = 30 \text{ kN (شد)}$$



بأخذ المفصل - B

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

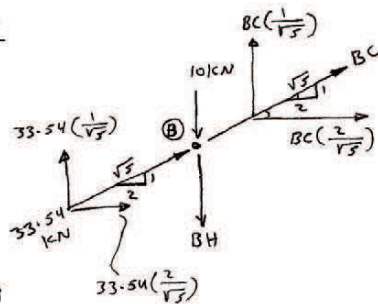
$$BC\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + 33.54\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0.5$$

$$BC = -33.54 \text{ kN (ضغط)}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$33.54\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - 10 - BH + (-33.54)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0.0$$

$$BH = -10 \text{ kN (ضغط)}$$

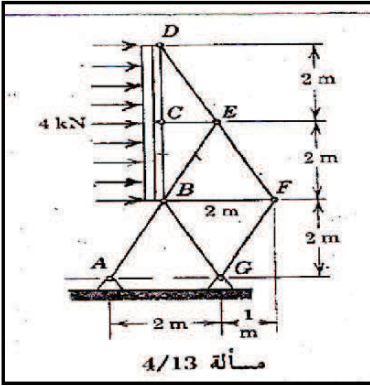
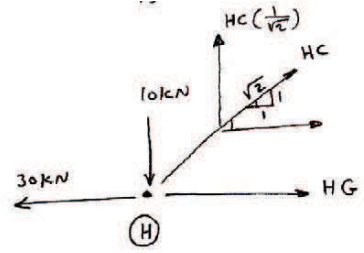


بأخذ المفصل - H :-

$$\rightarrow \Sigma F_y = 0$$

$$HC + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 10 = 0$$

$$HC = 10\sqrt{2} \text{ kN} \quad (\text{شد})$$



4/13 لقد صمم سنام لوحة الإعلانات بحيث يستطيع مقاومة قوة أفقية للرياح مقدارها 4 kN . إذا كانت $\frac{5}{8}$ هذه القوة يؤثر في التوصيلة المركزية C والبقية موزعة بالتساوي بين D و B . احسب القوى في الذراعين BC و BE .

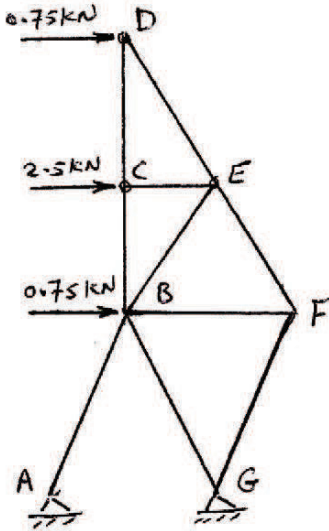
الحل:

القوى المركزية عند المفصل C هي :-

$$4\left(\frac{5}{8}\right) = 2.5 \text{ kN}$$

الباقى من $\left(\frac{5}{8}\right)$ والذي مقداره $\left(\frac{3}{8}\right)$ مركز بالتساوي بين المفصلين D ، B بمعنى كل منهم بمقدار :-

$$\frac{1}{2} \left[4\left(\frac{3}{8}\right) \right] = 0.75 \text{ kN}$$



نقطع المقطع - D:

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

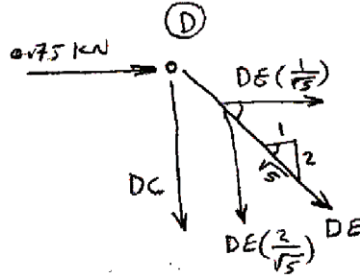
$$0.75 + DE\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0$$

$$DE = -1.677 \text{ kN} = 1.677 \text{ kN} \text{ ضغط}$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$DC + (-1.677 * \frac{2}{\sqrt{5}}) = 0$$

$$DC = 1.5 \text{ kN} \quad (\text{شد})$$



نقطع المفصل - C:

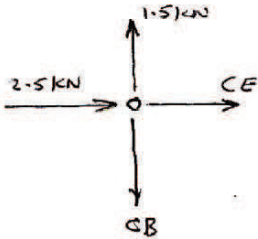
$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$1.5 - CB = 0 \Rightarrow CB = 1.5 \text{ kN} \quad (\text{شد})$$

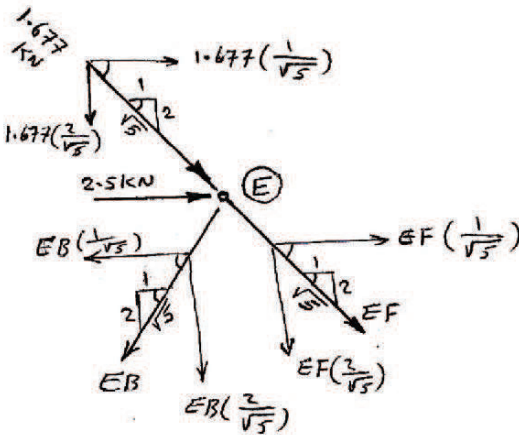
$$\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$2.5 + CE = 0 \Rightarrow CE = -2.5 \text{ kN}$$

$$CE = 2.5 \text{ kN} \quad (\text{ضغط})$$



نقطع المفصل - E:



$$\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$1.677\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2.5 + EF\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - EB\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0$$

$$EF\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - EB\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -3.25 \quad \dots\dots(1)$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$-1.677\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - EF\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - EB\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0.0$$

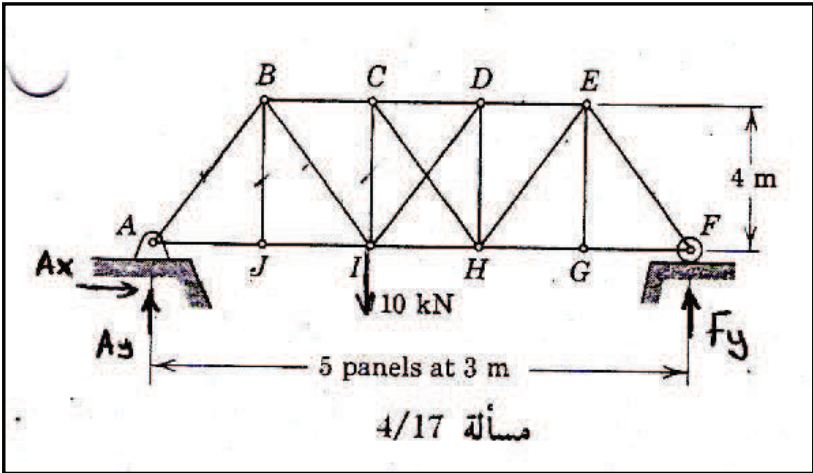
$$-EF - EB = 1.677 \quad \dots\dots(2)$$

بحل المعادلتين (1) ، (2) نحصل على قيم :-

$$EF = -4.47 \text{ kN} = 4.47 \quad (\text{ضغط})$$

$$EB = 2.79 \text{ kN} \quad (\text{شد})$$

4/17 أحسب القوى في الأتزرع AB ، BJ ، BI ، CI و علماً بأن الذراعين CH و DI مكونان من الكيبل ويسندان قوى شد فقط.



نوجد ردود الأفعال عند المسند A - حيث:

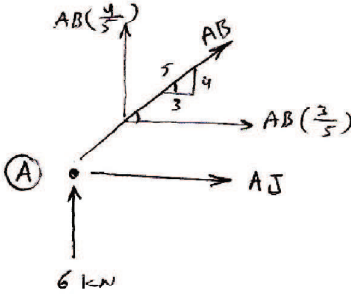
$$+\Sigma M_F = 0$$

$$-A_y(15) + 10(9) = 0 \Rightarrow A_y = 6 \text{ kN}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$A_x = 0.0$$

نقطع المفصل - A -



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

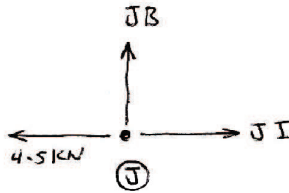
$$AB\left(\frac{4}{5}\right) + 6 = 0$$

$$AB = -7.5 \text{ kN} = 7.5 \text{ kN (ضغط)}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$AJ + (-7.5 * \frac{3}{5}) = 0$$

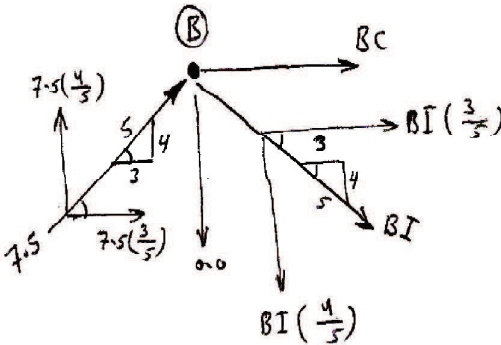
$$AJ = 4.5 \text{ kN (شد)}$$



نقطع المفصل - J -

$$\therefore JI = 4.5 \text{ kN (شد)}$$

$$JB = 0.0$$



نقطع المفصل - B -

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$7.5\left(\frac{4}{5}\right) - BI\left(\frac{4}{5}\right) = 0$$

$$BI = 7.5 \text{ kN (شد)}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$BC + 7.5\left(\frac{3}{5}\right) + 7.5\left(\frac{3}{5}\right) = 0$$

$$BC = -9 \text{ kN} = 9 \text{ kN (ضغط)}$$

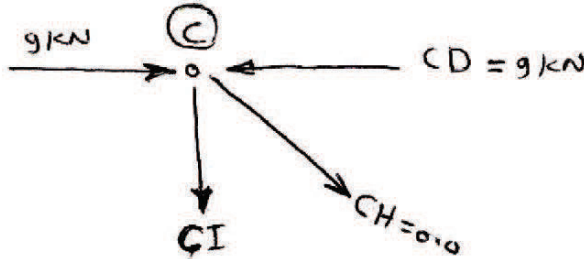
تجدر الإشارة قبل البدء بقطع المفصل - C إلى أنه لو كان الضلعان DI, CH صليبان فسيكون المسنم غير محدد سكونياً داخلياً بمعنى لا يمكن حساب قيمة CI بطريقة المفاصل (يمكن التعرف مستقبلاً على طرق الحساب الأخرى). ولكن بما أن الضلعان DI, CH هما كيبيل كما مذكور في السؤال فهذا يعني أنهما لا يقاومان سوى قوى الشد . وبما أن التحميل غير متماثل فإن أحد هذين الكيبيلين سيكون بحالة شد والثاني سيكون مرتخي أي الشد عنده صفراً. ومن خلال المعاينة سنفرض في البداية أن الكيبيل CH هو الذي يكون مرتخي . فإذا ظهر الشد في الكيبيل DI موجب كانت فرضيتنا صحيحة وإلا سنعيد الحسابات بافتراض العكس.

نقطع المفصل - C بافتراض أن CH مرتخي بمعنى $CH = 0.0$:-

$$\text{إذا } CI = 0.0$$

نتحقق من فرضيتنا بإيجاد قيمة الشد

عند الكيبيل DI وذلك بقطع المفصل - I :-

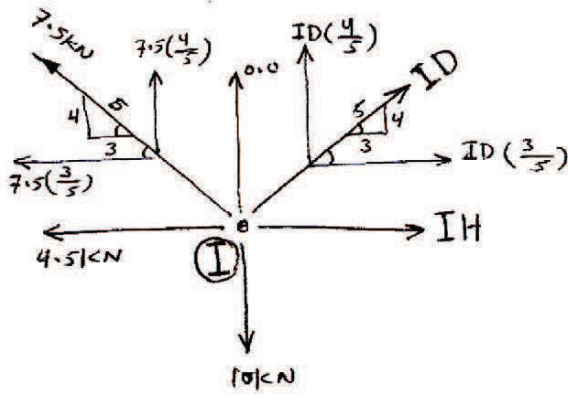


لاحظ في مخطط المفصل (I) :

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

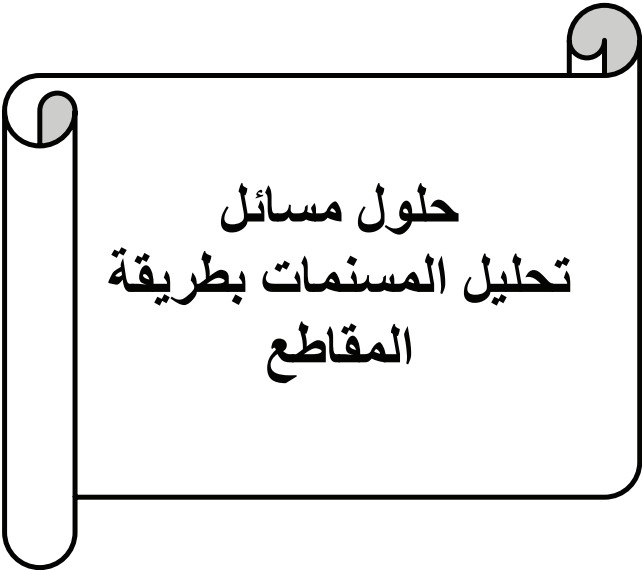
$$7.5\left(\frac{4}{5}\right) + ID\left(\frac{4}{5}\right) - 10 = 0$$

$$ID = 5 \text{ kN (شد)}$$

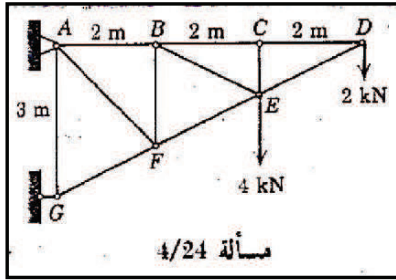


إذاً بما أن الشد في الكيبل ID ظهر موجب إذاً فرضية ارتخاء الكيبل الآخر CH هي صحيحة وبالتالي فإن قيمة $CI = 0.0$.

الفصل الحادي عشر

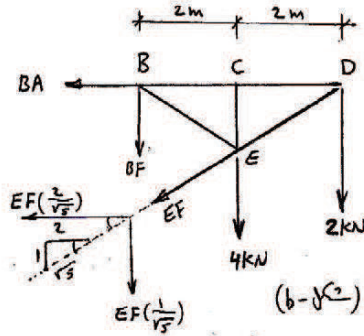
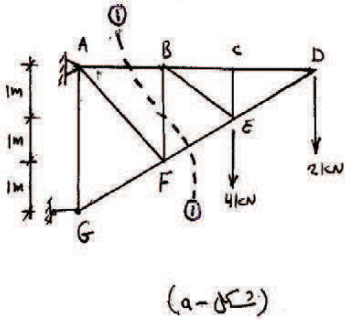


حلول مسائل
تحليل المسنمات بطريقة
المقاطع



4/24 أحسب القوى في الأضلاع EF, AB و BF للسان المحمل.

الحل:



بتمرير المقطع (1-1) في المسمن (شكل-ا) وأخذ جزء المسمن إلى يمين المقطع 1-1 كما هو عليه في (شكل-ب) يمكن الحصول على قيم القوى في الأعضاء المطلوبة في السؤال حيث أن:-

$$\sum M_D = 0$$

$$BF(4) + 4(2) = 0 \Rightarrow BF = -2 \text{ kN}$$

$$\therefore \boxed{BF = 2 \text{ kN}} \text{ (ضغط)}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

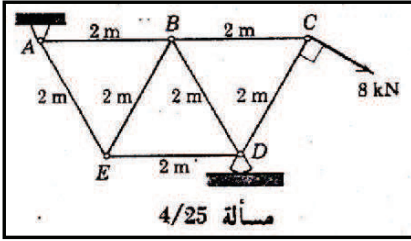
$$-EF\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - (-2) - 4 - 2 = 0 \Rightarrow EF = -8.94 \text{ kN}$$

$$\therefore \boxed{EF = 8.94 \text{ kN}} \text{ (ضغط)}$$

لاحظ أن BF بعد أن تعرفنا عليه على أنه بحالة ضغط لم يتم تغير اتجاهه في (شكل-ب) ولكن عندما تم أخذه بنظر الاعتبار عند احتساب EF أخذنا بنظر الاعتبار الاتجاه الصحيح إلى BF.

$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

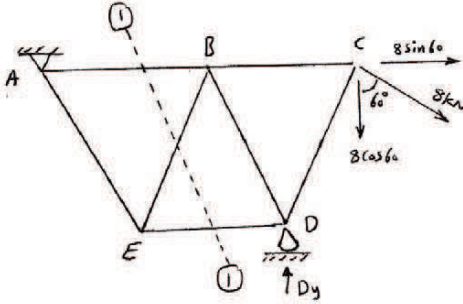
$$-BA - (-8.94)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{BA = 8 \text{ kN}} \text{ (شد)}$$



4/25 احسب القوى في الأضلاع ED و EB
للسنم المحمل والمكون من
مثلثات متساوية الأضلاع.

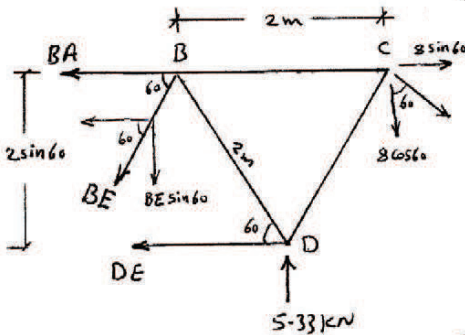
الحل:

بما أن جميع المسنم متساوية الأضلاع إذاً
جميع زواياه 60° .



لغرض إيجاد الأضلاع المطلوبة في
السؤال يفضل تمرير المقطع 1-1 في
تلك الأعضاء أو الأضلاع. عندها
يمكن تطبيق معادلات الاتزان على
جزء المسنم إلى يمين المقطع أو إلى
يسار المقطع ، أيهما أسهل.

فإذا فكرنا بأخذ جزء المسنم إلى يمين المقطع كما يظهر في الشكل المجاور ، فمن المؤكد سوف نستحق
معرفة رد الفعل عند المسند D. والذي مقداره:



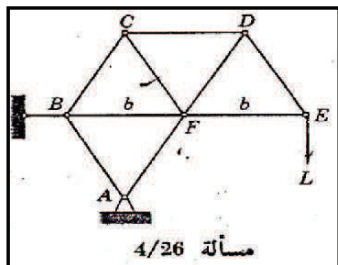
$$\begin{aligned} \curvearrowright + \Sigma M_A &= 0 \\ Dy (3) - 8 \cos 60 (4) &= 0.0 \\ Dy &= 5.33 \text{ kN} \end{aligned}$$

في جزء المسنم إلى يمين المقطع 1-1:

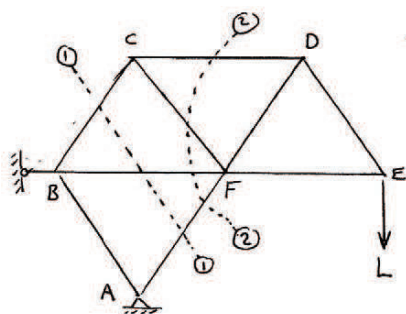
$$\begin{aligned} \curvearrowright + \Sigma M_B &= 0 \\ 5.33 (1) - 8 \cos 60 (2) - DE (2 \sin 60) &= 0.0 \\ DE &= -1.54 \text{ kN} \\ \therefore DE &= 1.54 \text{ kN (ضغط)} \end{aligned}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

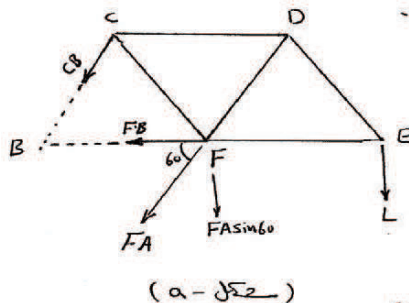
$$- BE \sin 60 + 5.33 - 8 \cos 60 = 0 \quad BE = 1.5 \text{ kN}$$



4/26 أوجد القوة في الضلع CE بدلالة
الحمل المطبق. قيمة جميع الزوايا
الداخلية 60°.

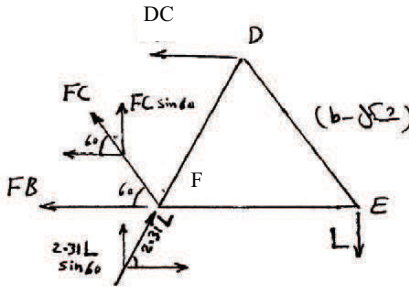


الحل: سيتم إيجاد CF من خلال تمرير
مقطعين هما 1-1 والغرض منه إيجاد
القوة في العضو AF.
ومن ثم تمرير المقطع الآخر 2-2 لغرض
إيجاد القوة في العضو المطلوب CF.



بأخذ جزء المسنن إلى يمين المقطع 1-1
فأنه يبدو كما موضح في (شكل-أ).

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 \\ -L(2b) - FA \sin 60 (b) = 0 \\ \therefore FA = -\frac{2L}{\sin 60} = -2.31L \\ \therefore FA = 2.31L \quad (\text{ضغط}) \end{aligned}$$



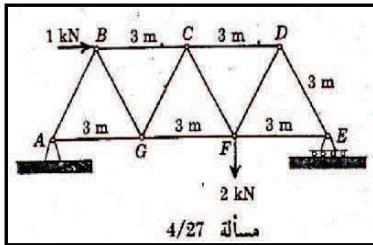
من تمرير المقطع 2-2 فإن جزء المسنم إلى يمين المقطع سيكون كما في (شكل-ب). ومنه:-

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$FC \sin 60 + 2.31 L \sin 60 - L = 0$$

$$FC = -1.155 L$$

$$\therefore FC = 1.155 L \text{ (ضغط)}$$



4/27 احسب القوى في الأضلاع CD ، BC

و CG للسنام المحمل والمكون من مثلثات متساوية الأضلاع.

الحل:

$$(+\Sigma M_A = 0$$

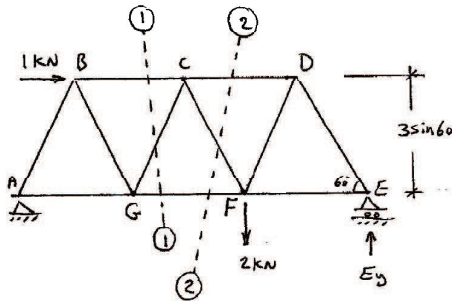
$$E_y(9) - 2(6) - 1(3 \sin 60) = 0$$

$$E_y = 1.622 \text{ kN}$$

بتمرير المقطع 1-1 وأخذ جزء المسنم إلى

يمين المقطع ، يمكن الحصول على CG

CB, (شكل-أ):

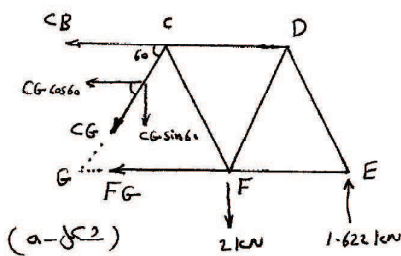


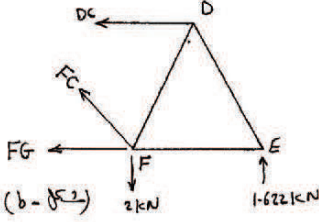
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$- CG \sin 60 - 2 + 1.622 = 0$$

$$CG = -0.436 \text{ kN}$$

$$\therefore CG = 0.436 \text{ kN (ضغط)}$$





$$\sum M_G = 0$$

$$CB (3 \sin 60) - 2 (3) + 1.622 (6) = 0.0$$

$$CB = -1.436 \text{ kN}$$

$$\therefore CB = 1.436 \text{ kN} \quad (\text{ضغط})$$

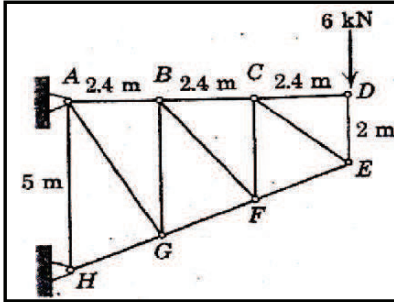
بتمرير المقطع 2-2 وملاحظة (شكل b) فإن:-

$$\sum M_F = 0$$

$$DC (3 \sin 60) + 1.622 (3) = 0.0$$

$$DC = -1.873 \text{ kN}$$

$$\therefore DC = 1.873 \text{ kN} \quad (\text{ضغط})$$



4/28 أحسب القوى في الأضلاع AB, GB و

GF. ثم أوجد كل قوة باستعمال إحدى

معادلات الاتزان بحيث تكون القوة المجهول

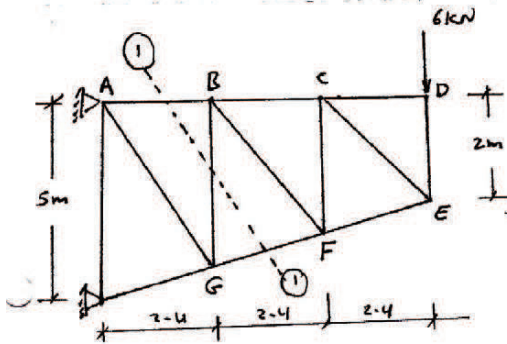
الوحيد في تلك المعادلة.

الحل: بتمرير المقطع 1-1:-

$$\sum M_G = 0$$

$$BA (4) - 6 (4.8) = 0.0$$

$$BA = 7.2 \text{ kN} \quad (\text{شد})$$



$$\sum M_B = 0$$

$$-6(4.8) - \text{FG}(\frac{7.2}{7.8})(4) = 0.0$$

$$FG = -7.8 \text{ kN}$$

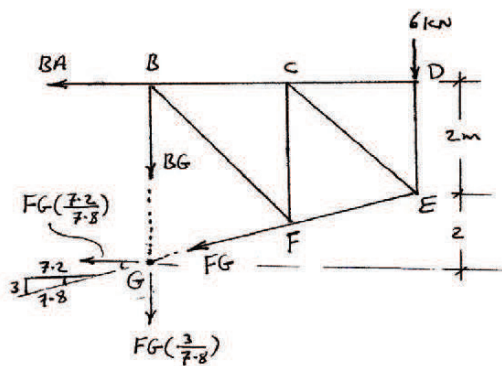
$$\therefore FG = 7.8 \text{ kN (ضغط)}$$

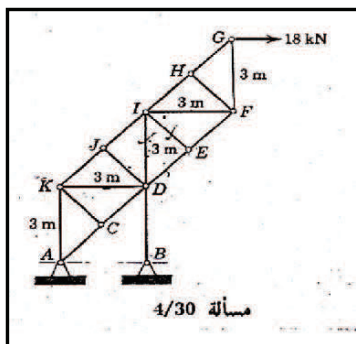
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$-\text{BG} - (-7.8 * \frac{3}{7.8}) - 6 = 0$$

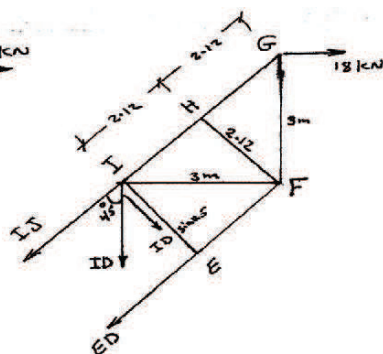
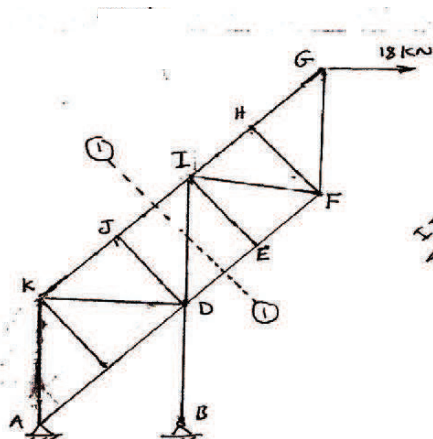
$$BG = -3\text{kN}$$

$$\therefore BG = 3 \text{ kN (ضغط)}$$





4/30 احسب القوى في الأضلاع DE, DI
و EI للسنام المحمل الموضح في
الشكل.

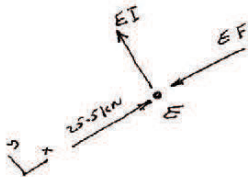


$$\curvearrowright + \Sigma M_G = 0$$

$$ID \sin 45 (4.24) + 25.5 (2.12) = 0.0$$

$$ID = -18 \text{ kN}$$

$$\therefore ID = 18 \text{ kN (ضغط)}$$



$$GI = \sqrt{3^2 + 3^2} = 4.24 \text{ m}$$

$$\curvearrowright + \Sigma M_I = 0$$

$$-ED (2.12) - 18(3) = 0$$

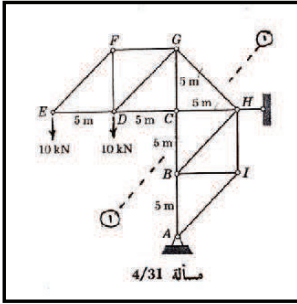
$$ED = -25.5 \text{ kN}$$

$$\therefore ED = 25.5 \text{ kN (ضغط)}$$

: EI يمكن الحصول على EI

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$EI = 0.0$$



4/31 أحسب القوى في الأضلاع CB, CH و GH للسانم الظفري. أوجد كل قوة في معادلة العزوم بحيث تكون القوة المجهول الوحيد في تلك المعادلة.

الحل:

بتمرير المقطع 1-1 وتطبيق معادلات الاتزان على جزء المسنم إلى يسار المقطع ينتج:-

$$\curvearrowleft \Sigma M_c = 0$$

$$10(10) + 10(5) - GH\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(5) = 0$$

$$GH = 42.42 \text{ kN} \quad (\text{شد})$$

$$+ \rightarrow \Sigma F_x = 0$$

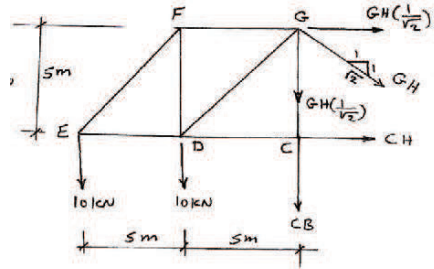
$$CH + 42.42\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.0$$

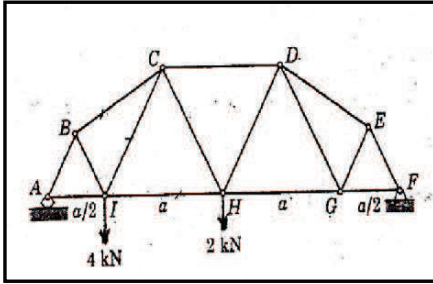
$$CH = -30 \text{ kN} \quad (\text{ضغط})$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$-10 - 10 - CB - 42.42\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.0$$

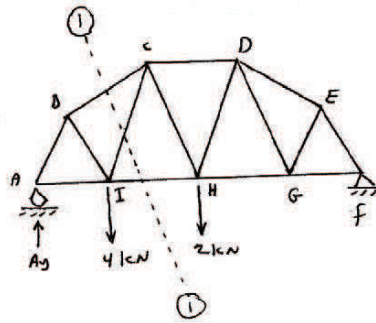
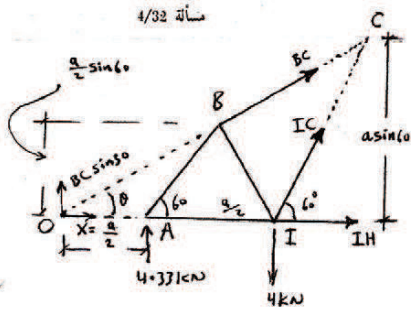
$$CB = -50 \text{ kN} \quad (\text{ضغط})$$





4/32 أحسب القوى BC ، CI و HI لسانم
المسألة (4/10) المعادة هنا . أوجد كل قوة
من إحدى معادلات التوازن بحيث تكون القوة
المجهول الوحيد في تلك المعادلة.

الحل:



بالتاكيد سنحتاج إلى رد الفعل عند المسند A حيث:-

$$\sum M_c = 0$$

$$HI(a \sin 60) + 4\left(\frac{a}{2}\right) - 4.33(a) = 0$$

$$HI = 2.69 \text{ kN (شد)}$$

$$\tan \theta = \frac{a \sin 60}{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2}}$$

$$\theta = 30^\circ$$

$$\sum M_I = 0$$

$$-BC \sin 30(a) - 4.33\left(\frac{a}{2}\right) = 0$$

$$BC = -4.33 \text{ kN}$$

$$\therefore BC = 4.33 \text{ kN (ضغط)}$$

$$\sum M_f = 0$$

$$-Ay(3a) + 4\left(\frac{5}{2}a\right) + 2\left(\frac{3}{2}a\right) = 0$$

$$Ay = 4.33 \text{ kN}$$

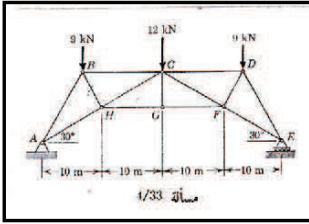
من تناسب المثلثات فأن :-

$$\frac{a \sin 60}{a + x} = \frac{\frac{a}{2} \sin 60}{\frac{a}{4} + x} \Rightarrow x = \frac{a}{2}$$

$$\sum M_o = 0$$

$$IC \sin 60\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) - 4(a) + 4.33\left(\frac{a}{2}\right) = 0$$

$$IC = 2.12 \text{ kN (شد)}$$



4/33 يتكون السنام السقفي من مثلثات قائمة -30°
60° ومحمل كما هو موضح في الشكل . أحسب
القوى في الضلعين BH و HG.

الحل:

المسند متماثل شكلاً وتحملاً وعليه فإن
الأحمال كفعل تنتوزع مناصفة بين المسندين
(A, E) وبذلك يكون :

$$A_y = E_y = \frac{9 + 12 + 9}{2} = 15 \text{ kN}$$

وبتمرير المقطع 1-1 وأخذ جزء المسند إلى
يمين المقطع يكون:-

$$\tan 30 = \frac{CG}{10}$$

$$CG = 5.77 \text{ m}$$

$$\sum M_C = 0.0$$

$$15(20) - 9(10 + 5.77 \tan 30) - GH(5.77) = 0.0$$

$$GH = 31.2 \text{ kN}$$

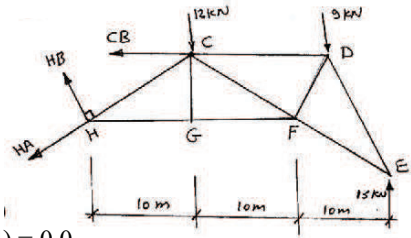
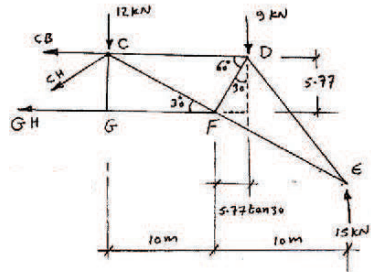
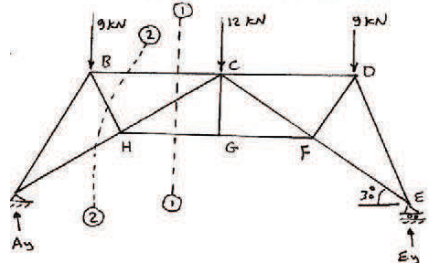
وبتمرير المقطع 2-2 وأخذ جزء المسند إلى
يمين المقطع يكون :-

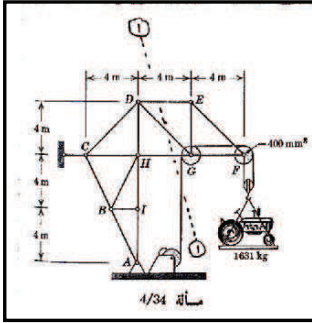
$$HC = \sqrt{10^2 + 5.77^2} = 11.54 \text{ m}$$

$$\sum M_C = 0.0$$

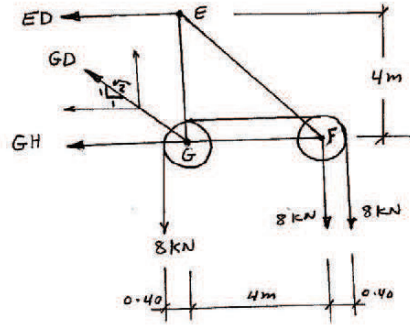
$$15(20) - 9(10 + 5.77 \tan 30) - HB(11.54) = 0.0$$

$$HB = 15.60 \text{ kN} \quad (\text{شد})$$





4/34 يمثل السنام البسيط الموضح في الشكل نموذجاً لرافعة . أحسب القوة في الأضلاع DE ، DG و HG تحت تأثير ثقل الآلة التي مقدار كتلتها 1631 kg .



وزن المركبة سيتوزع مناصفة بين الكيبلين الحاملين لها بحيث تكون حصة كل كيبل

بمقدار $\left(\frac{1632(9.81)}{2 \times 10^3} \right) = 8 \text{ kN}$. ويتميز المقطع 1-1 وأخذ جزء المسنم إلى يمينه يحصل:-

$$\sqrt{+} \Sigma M_G = 0.0$$

$$ED(4) + 8(0.4) - 8(4) - 8(4.4) = 0$$

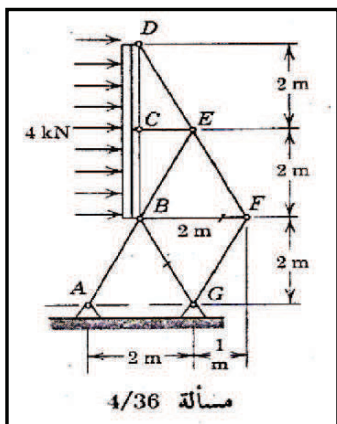
$$ED = 16 \text{ kN} \quad (\text{شد})$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$GD\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 8(3) = 0.0 \quad \Rightarrow \quad GD = 33.9 \text{ kN} \quad (\text{شد})$$

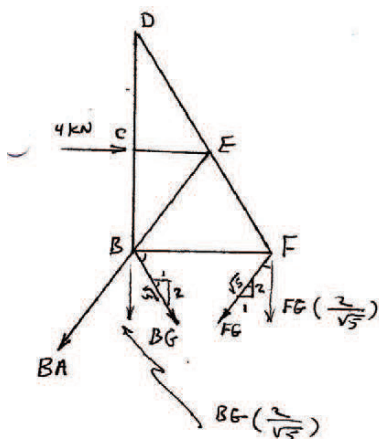
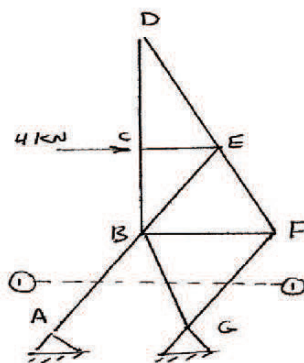
$$+ \rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$-16 - 33.8\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - GH = 0 \quad \Rightarrow \quad GH = -40 \text{ kN} \quad (\text{ضغط})$$



4/36 أوجد القوى في الضلعين BF و BG
 لسانام لوحة الإعلانات في المسألة (4/13)
 المعاد هنا علما بأن محصلة قوة الريح 4kN
 تمر من نقطة C.

الحل:



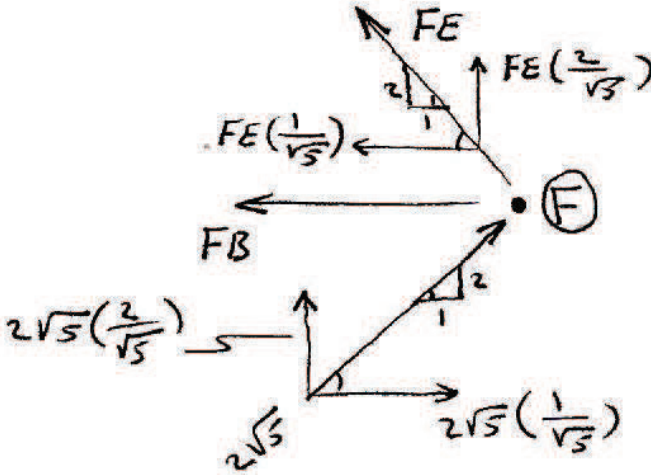
$$\begin{aligned} \curvearrowright + \Sigma M_B &= 0 \\ -FG\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)(2) - 4(2) &= 0.0 \\ FG &= -2\sqrt{5} \text{ kN} \\ FG &= 2\sqrt{5} \text{ kN (ضغط)} \end{aligned}$$

$$\curvearrowright \Sigma M_E = 0.0$$

$$(BG \frac{2}{\sqrt{5}})(1) + (BG \frac{1}{\sqrt{5}})(2) + 2\sqrt{5}(\frac{2}{\sqrt{5}})(1) + 2\sqrt{5}(\frac{1}{\sqrt{5}})(2) = 0.0$$

$$BG = -2\sqrt{5} \text{ kN}$$

$$BG = 2\sqrt{5} \text{ kN (ضغط)}$$



نقطع المفصل F

$$\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$FE(\frac{2}{\sqrt{5}}) + 2\sqrt{5}(\frac{2}{\sqrt{5}}) = 0$$

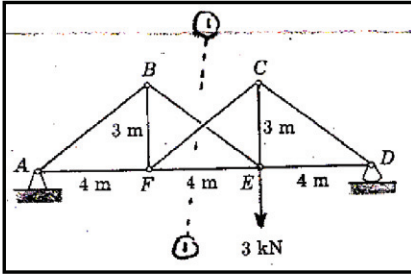
$$FE = -2\sqrt{5} \text{ kN}$$

$$FF = 2\sqrt{5} \text{ kN (ضغط)}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$-FB + 2\sqrt{5}(\frac{1}{\sqrt{5}}) + 2\sqrt{5}(\frac{1}{\sqrt{5}}) = 0.0$$

$$FB = 4 \text{ kN (شد)}$$



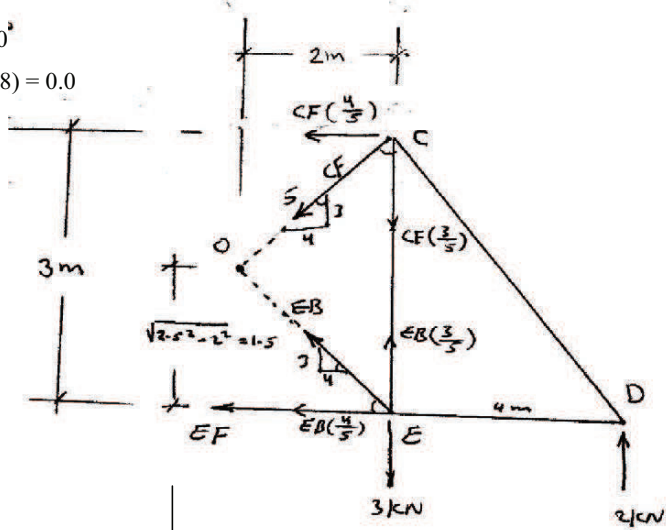
4/38 يتمكّن كل من الضلعين BE و FC من أسناد قوى ضغط وشد. احسب القوى في الأضلاع BE, CF و EF.

الحل:

$$\rightarrow \Sigma M_A = 0.0$$

$$D_y(12) - 3(8) = 0.0$$

$$D_y = 2 \text{ kN}$$



$$\left(\uparrow \right) \Sigma M_E = 0.0$$

$$CF\left(\frac{4}{5}\right)(3) + 2(4) = 0.0$$

$$CF = -3.33 \text{ kN}$$

$$\therefore CF = 3.33 \text{ kN (ضغط)}$$

$$\left(\uparrow \right) \Sigma M_D = 0.0$$

$$-3(2) + 2(6) - EF(1.5) = 0$$

$$EF = 4 \text{ kN (شد)}$$

$$\left(\uparrow \right) \Sigma M_C = 0.0$$

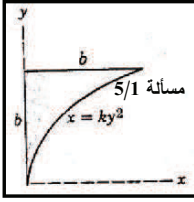
$$-4(3) - EB\left(\frac{4}{5}\right)(3) + 2(4) = 0.0$$

$$EB = -1.667 \text{ kN}$$

$$EB = 1.667 \text{ kN (ضغط)}$$

الفصل الثاني عشر

حلول مسائل
المركز الهندسي للمساحات
بطريقة التكامل



5/1 عين إحداثيات المركز الهندسي للمساحة المظللة

الحل:

أيجاد المركز الهندسي بالتكامل يتم من خلال أخذ شريحة رأسية أو أفقية بحيث تستطيع الشريحة من حركتها من أوطأ نقطة إلى أعلى نقطة في الشكل ضمن تكامل محدد من مسح الشكل بالكامل. عندها قيمة الإحداثي y للمركز الهندسي $\bar{y}$ يحسب تبعاً للقانون التالي:-

$$\bar{y} = \frac{\int y_c dA}{\int dA}$$

حيث أن dA = مساحة الشريحة ، y_c = المسافة من مركز

الشريحة إلى المحور x.

$$\bar{y} = \frac{\int_0^b y(ky^2 dy)}{\int_0^b ky^2 dy} = \frac{k \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^b}{k \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^b} = \frac{3}{4} b$$

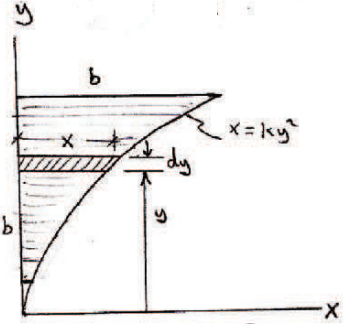
$$\bar{x} = \frac{\int X_c dA}{\int dA}$$

أما الإحداثي x للمركز الهندسي $\bar{x}$ فيحسب من خلال القانون التالي:-

حيث أن x_c تمثل المسافة من مركز الشريحة إلى المحور y.

$$\bar{x} = \frac{\int_0^b \frac{x}{2} (x dy)}{\int_0^b x dy} = \frac{\int_0^b \left(\frac{ky^2}{2} \right) (ky^2 dy)}{\int_0^b ky^2 dy} = \frac{\frac{k^2}{2} \int_0^b y^4 dy}{k \int_0^b y^2 dy}$$

$$\bar{x} = \frac{k \left[\frac{y^5}{5} \right]_0^b}{2 \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^b} = \frac{k}{2} * \frac{b^5}{5} * \frac{3}{b^3} = \frac{3}{10} kb^2 = \frac{3}{10} \left(\frac{1}{b} \right) b^2 = \frac{3}{10} b$$

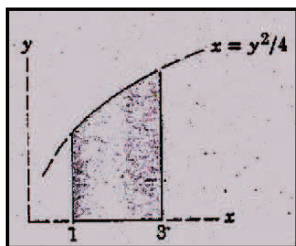


$$x = ky^2$$

عند نقطة (b,b) فإن:

$$b = kb^2$$

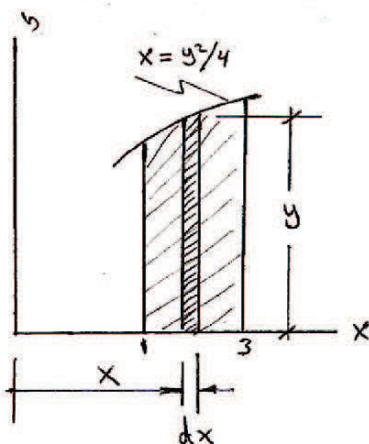
$$k = 1/b$$



مسألة 5/2

5/2 حدد المركز الهندسي للمساحة المظللة.

الحل:



حركة الشريحة ضمن تكامل محدد يجب أن تكون محصورة ضمن دالتين ثابتتين، لذا حتى لا يتعقد حل المسألة بفضل أخذ شريحة رأسية وليست أفقية.

$$x = \frac{y^2}{4} \Rightarrow y = 2x^{\frac{1}{2}}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x_c dA}{\int dA} = \frac{\int_1^9 x(y dx)}{\int_1^9 y dx} = \frac{2 \int_1^9 x \cdot x^{\frac{1}{2}} dx}{2 \int_1^9 x^{\frac{1}{2}} dx}$$

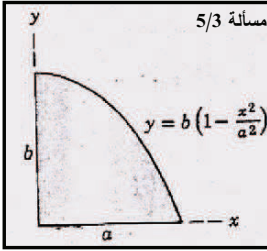
$$\bar{x} = \frac{\int_1^9 x^{\frac{3}{2}} dx}{\int_1^9 x^{\frac{1}{2}} dx} = \frac{\left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_1^9}{\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^9} = \frac{3 \left(3^{\frac{5}{2}} - 1^{\frac{5}{2}} \right)}{5 \left(3^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right)} = 2.09$$

$$\bar{y} = \frac{\int y_c dA}{\int dA} = \frac{\int_1^9 \frac{y}{2} (y dx)}{2 \int_1^9 x^{\frac{1}{2}} dx} = \frac{\frac{1}{2} \int_1^9 4x dx}{2 \int_1^9 x^{\frac{1}{2}} dx}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_1^9 x dx}{\int_1^9 x^{\frac{1}{2}} dx} = \frac{\left[\frac{x^2}{2} \right]_1^9}{\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^9} = \frac{\frac{1}{2} (8)}{\frac{2}{3} (4.196)} = 1.43$$

5/3 عين إحداثيات المركز الهندسي للمساحة المظللة.

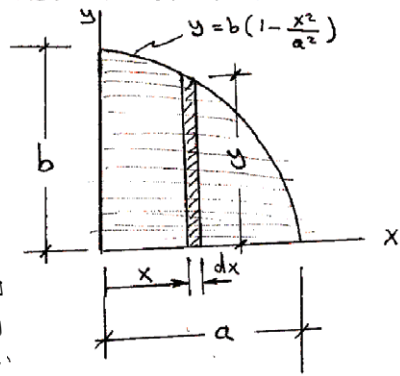
الحل:



بما أن:-

$$\bar{y} = \frac{\int y_c dA}{\int dA}, \quad \bar{x} = \frac{\int x_c dA}{\int dA}$$

لذا لتبسيط الحل سوف نعمل على حساب قيم التكاملات ومن ثم تعويضها في القوانين أعلاه لإيجاد $\bar{x}$, $\bar{y}$:-



$$\int dA = \int_0^a y dx = \int_0^a b(1 - \frac{x^2}{a^2}) dx$$

$$\int dA = \int_0^a b dx - \frac{b}{a^2} \int_0^a x^2 dx = bx \Big|_0^a - \frac{b}{a^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a$$

$$\int dA = ba - \frac{b}{a^2} \left[\frac{a^3}{3} \right] = \frac{2}{3} ba$$

$$\int x_c dA = \int_0^a x(y) dx = \int_0^a xb(1 - \frac{x^2}{a^2}) dx = \int_0^a xbdx - \frac{b}{a^2} \int_0^a x^3 dx$$

$$\int x_c dA = b \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a - \frac{b}{a^2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^a = \frac{ba^2}{2} - \frac{b}{a^2} \left(\frac{a^4}{4} \right) = \frac{ba^2}{4}$$

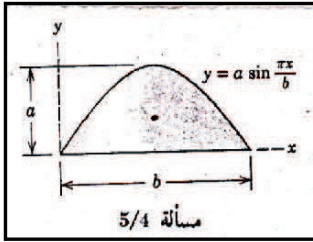
$$\int y_c dA = \int_0^a \frac{y}{2} (y) dx = \frac{1}{2} \int_0^a y^2 dx = \frac{b^2}{a} \int_0^a (1 - \frac{x^2}{a^2}) dx$$

$$\int y_c dA = \frac{b^2}{2} \int_0^a (1 - 2\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4}) dx = \frac{b^2}{a} \left[x - 2\frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^5}{5a^4} \right]_0^a$$

$$\int y_c dA = \frac{b^2}{2} \left[a - \frac{2}{3} \frac{a^3}{a^2} + \frac{a^5}{5a^4} \right] = \frac{b^2}{2} \left[\frac{8a}{15} \right] = \frac{4ab^2}{15}$$

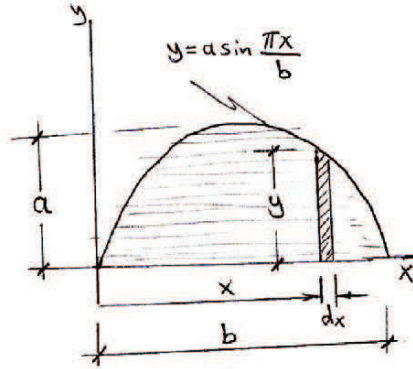
$$\therefore \bar{x} = \frac{\int x_c dA}{dA} = \frac{\frac{ba^2}{4}}{\frac{2ba}{3}} = \frac{ba^2}{4} * \frac{3}{2ba} = \frac{3}{8}a$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{\int y_c dA}{dA} = \frac{\frac{4ab^2}{15}}{\frac{2ba}{3}} = \frac{4ab^2}{15} * \frac{3}{2ba} = \frac{2}{5}b$$



5/4 عين الإحداثي y للمركز الهندسي للمساحة الموضحة تحت منحنى الجيب.

الحل:



$$\int dA = \int_0^b y dx = \int_0^b (a \sin \frac{\pi x}{b}) dx$$

$$\int dA = \frac{ab}{\pi} [-\cos \frac{\pi x}{b}]_0^b$$

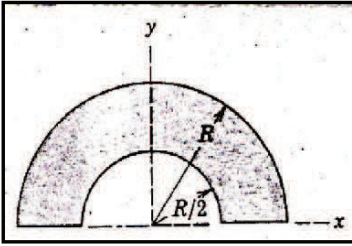
$$\int dA = \frac{-ab}{\pi} [\cos \pi - \cos 0.0] \\ = -\frac{ab}{\pi} [-1 - 1] = \frac{2ab}{\pi}$$

$$\int y_c dA = \int_0^b (\frac{y}{2})(y dx) = \frac{a^2}{2} \int_0^b \sin^2 (\frac{\pi x}{b}) dx = \frac{a^2}{2} \int_0^b (\frac{1 - \cos \frac{2\pi x}{b}}{2}) dx$$

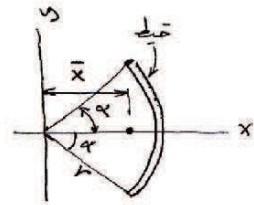
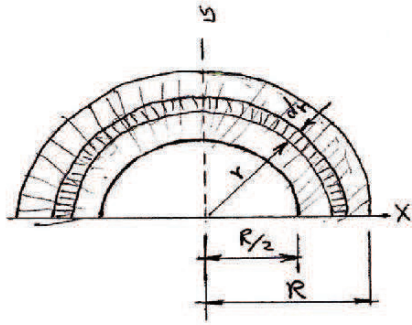
$$\int y_c dA = \frac{a^2}{4} \int_0^b dx - \frac{a^2}{4} * \frac{b}{2\pi} [\sin \frac{2\pi x}{b}]_0^b$$

$$\int y_c dA = \frac{a^2}{4} x]_0^b - \frac{ba^2}{8\pi} [\sin 2\pi - \sin 0.0] = \frac{ba^2}{4}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y_c dA}{\int dA} = \frac{\frac{ba^2}{4}}{\frac{2ab}{\pi}} = \frac{ba^2}{4} * \frac{\pi}{2ab} = \frac{a\pi}{8}$$



5/5 عين الإحداثي y للمركز الهندسي للمساحة بالتكامل المباشر.



$$\int dA = \int_{\frac{R}{2}}^R \pi r dr$$

$$\int dA = \pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_{\frac{R}{2}}^R$$

$$\int dA = \frac{\pi}{2} \left[R^2 - \frac{R^2}{4} \right]$$

$$\int dA = \frac{\pi}{2} \left[\frac{3R^2}{4} \right] = \frac{3\pi R^2}{8}$$

$$y_c = \frac{r \sin \alpha}{\alpha} = \frac{r \sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{r(1)}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2r}{\pi}$$

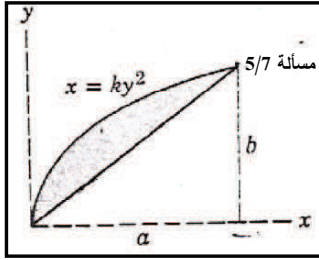
$$\bar{x} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$$

$$\int y_c dA = \int_{\frac{R}{2}}^R \left(\frac{2r}{\pi} \right) (\pi r dr) = 2 \int_{\frac{R}{2}}^R r^2 dr$$

$$\int y_c dA = 2 \left[\frac{r^3}{3} \right]_{\frac{R}{2}}^R = \frac{2}{3} \left[R^3 - \frac{R^3}{8} \right] = \frac{2}{3} \left[\frac{7R^3}{8} \right] = \frac{7}{12} R^3$$

$$\bar{y} = \frac{\int y_c dA}{\int dA} = \frac{\frac{7}{12} R^3}{\frac{3\pi R^2}{8}} = \frac{7}{12} R^3 * \frac{8}{3\pi R^2}$$

$$\bar{y} = \frac{14R}{9\pi}$$



5/7 احسب إحداثيات المركز الهندسي لمساحة القطعة المرسومة.

الحل:

بالنسبة للدالة $x = ky^2$ وعند النقطة

(a, b) فإن قيمة k هي:-

$$a = kb^2 \Rightarrow k = \frac{a}{b^2}$$

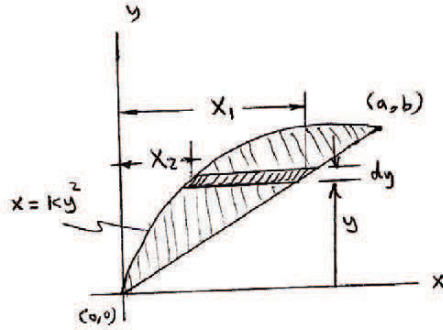
ولإيجاد دالة الخط المستقيم المار

بالنقطتين $(0, 0)$ ، (a, b) فإن:-

$$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$(y - 0.0) = \frac{b - 0.0}{a - 0.0} (x - 0.0)$$

$$y = \frac{b}{a}x \quad \therefore \quad x = \frac{a}{b}y$$



$$x_c = \frac{x_1 - x_2}{2} + x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad dA = (x_1 - x_2)dy$$

$$\int dA = \int_0^b (x_1 - x_2)dy = \int_0^b \left(\frac{a}{b}y - ky^2\right)dy$$

$$\int dA = \frac{a}{b} \int_0^b ydy - \frac{a}{b^2} \int_0^b y^2 dy = \frac{a}{b} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^b - \frac{a}{b^2} \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^b$$

$$\int dA = \frac{a}{b} \cdot \frac{b^2}{2} - \frac{a}{b^2} \cdot \frac{b^3}{3} = \frac{ab}{6}$$

$$\int x_c dA = \int_0^b \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)(x_1 - x_2)dy = \frac{1}{2} \int_0^b (x_1^2 - x_2^2)dy$$

$$\int x_c dA = \frac{1}{2} \int_0^b \left(\frac{y^2 a^2}{b^2} - k^2 y^4\right)dy = \frac{a^2}{2b^2} \int_0^b y^2 dy - \frac{a^2}{2b^4} \int_0^b y^4 dy$$

$$\int x_c dA = \frac{a^2}{2b^2} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^b - \frac{a^2}{2b^4} \left[\frac{y^5}{5} \right]_0^b = \frac{a^2 b}{6} - \frac{a^2 b}{10} = \frac{a^2 b}{15}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x_c dA}{\int dA} = \frac{\frac{a^2 b}{15}}{\frac{ab}{6}} = \frac{a^2 b}{15} * \frac{6}{ab} = \frac{2}{5} a$$

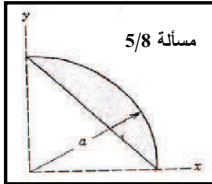
$$\int y_c dA = \int_0^b y(x_1 - x_2) dy = \int_0^b y \left(\frac{a}{b} y - ky^2 \right) dy =$$

$$\int y_c dA = \frac{a}{b} \int_0^b y^2 dy - \frac{a}{b^2} \int_0^b y^3 dy$$

$$\int y_c dA = \frac{a}{b} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^b - \frac{a}{b^2} \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^b = \frac{ab^3}{3b} - \frac{ab^4}{4b^2} = \frac{ab^2}{3} - \frac{ab^2}{4}$$

$$\int y_c dA = \frac{ab^2}{12}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y_c dA}{\int dA} = \frac{\frac{ab^2}{12}}{\frac{ab}{6}} = \frac{b}{2}$$



5/8 أحسب إحداثيات المركز الهندسي لمساحة المقطع الدائرية.

الحل: لإيجاد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (0, a)، (a, 0) فإن:-

$$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$(y - 0) = \frac{a - 0}{0 - a} (x - a)$$

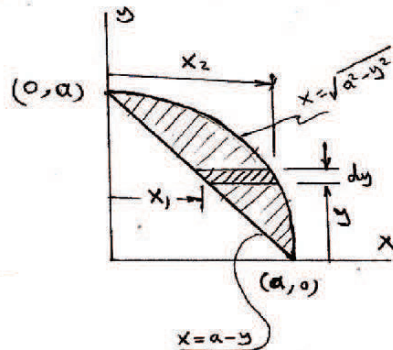
$$y = -(x - a) \Rightarrow y = a - x$$

معادلة المستقيم:-

معادلة الدائرة هي:-

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$\therefore x = \sqrt{a^2 - y^2}$$



$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{\int y_c dA}{\int dA} = \frac{\int_0^a y(x_2 - x_1) dy}{\int_0^a (x_2 - x_1) dy}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a y[\sqrt{a^2 - y^2} - (a - y)] dy}{\int_0^a [\sqrt{a^2 - y^2} - (a - y)] dy} = \frac{\int_0^a y(a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} dy - \int_0^a (ay - y^2) dy}{\int_0^a (a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} dy - \int_0^a (a - y) dy}$$

سوف نأخذ كل حد من حدود البسط والمقام ونعمل له تكامل:

$$\int_0^a y(a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} dy = -\frac{1}{2} \frac{(a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}{3/2} \Bigg|_0^a = -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right) \left\{ [a^2 - a^2]^{\frac{3}{2}} - [a^2 - 0]^{\frac{3}{2}} \right\}$$

$$= -\frac{1}{3} \left[-a^{2(\frac{3}{2})} \right] = \frac{a^3}{3}$$

$$\int_0^a (ay - y^2) dy = \left[\frac{ay^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^a = \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{3a^3 - 2a^3}{6} = \frac{a^3}{6}$$

$$\int_0^a (a - y) dy = \left[ay - \frac{y^2}{2} \right]_0^a = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

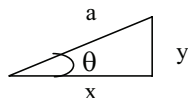
$$\int_0^a (a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} dy = \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} dy$$

$$= \int_0^a \sqrt{a^2 - (a \sin \theta)^2} (a \cos \theta d\theta)$$

$$= a^2 \int_0^a \sqrt{1 - \sin^2 \theta} (\cos \theta d\theta)$$

$$= a^2 \int_0^a \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^a (1 + \cos 2\theta) d\theta$$



$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$x = \sqrt{a^2 - y^2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{a} \dots \dots (1)$$

$$y = a \sin \theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = a \cos \theta$$

$$dy = a \cos \theta d\theta$$

$$\int_0^a (a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{a^2}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^a$$

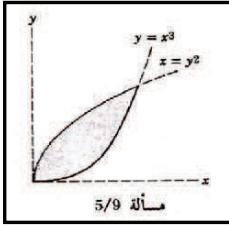
من المعادلة (1) وبتعويض قيمة $\theta = \sin^{-1} \frac{y}{a}$ في المعادلة الأخيرة فأن:-

$$\begin{aligned} \int_0^a (a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} dy &= \frac{a^2}{2} \left[\sin^{-1} \left(\frac{y}{a} \right) + \frac{1}{2} \sin 2 \left(\sin^{-1} \frac{y}{a} \right) \right]_0^a \\ &= \frac{a^2}{2} \left\{ \left[\sin^{-1} \left(\frac{a}{a} \right) + \frac{1}{2} \sin 2 \sin^{-1} \frac{a}{a} \right] - \left[\sin^{-1} \frac{0}{a} + \frac{1}{2} \sin 2 \sin^{-1} \frac{0}{a} \right] \right\} \\ &= \frac{a^2}{2} \left\{ \left[\frac{\pi}{2} + 0.0 \right] - [0.0 - 0.0] \right\} = \frac{\pi a^2}{4} \\ \therefore \int_0^a (a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} dy &= \frac{\pi a^2}{4} \end{aligned}$$

وبالرجوع إلى معادلة $(\bar{x} = \bar{y})$ وتعويض عن كل كمية بما يساويها ينتج:-

$$\begin{aligned} \bar{x} = \bar{y} &= \frac{\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{6}}{\frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2}} = \frac{\frac{2a^3 - a^3}{6}}{\frac{\pi a^2 - 2a^2}{4}} \\ \therefore \bar{x} = \bar{y} &= \frac{a^3}{6} * \frac{4}{a^2(\pi - 2)} = \frac{2}{3} * \frac{a}{(\pi - 2)} \end{aligned}$$

5/9 حدد المركز الهندسي للمساحة المحددة بالمنحنيين.



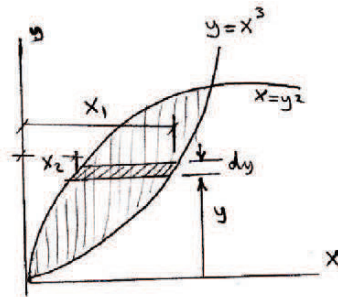
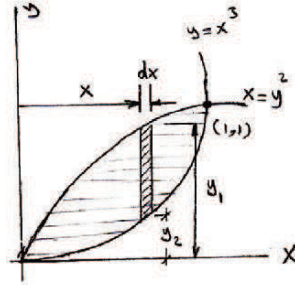
$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 x_2 dA}{\int_0^1 dA} = \frac{\int_0^1 x(y_1 - y_2) dx}{\int_0^1 (y_1 - y_2) dx}$$

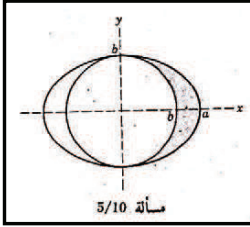
$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 x(x^{\frac{1}{2}} - x^3) dx}{\int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x^3) dx} = \frac{\int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} - x^4) dx}{\int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x^3) dx}$$

$$\bar{x} = \frac{\left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1}{\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1} = \frac{\frac{2}{5} - \frac{1}{5}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{8-3}{12}} = \frac{1}{5} * \frac{12}{5} = \frac{12}{25}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y_2 dA}{\int dA} = \frac{\int_0^1 y(x_1 - x_2) dy}{\int_0^1 (x_1 - x_2) dy} = \frac{\int_0^1 y(y^{\frac{1}{3}} - y^2) dy}{\int_0^1 (y^{\frac{1}{3}} - y^2) dy} = \frac{\int_0^1 (y^{\frac{4}{3}} - y^3) dy}{\int_0^1 (y^{\frac{1}{3}} - y^2) dy}$$

$$\bar{y} = \frac{\left[\frac{y^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1}{\left[\frac{y^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{y^3}{3} \right]_0^1} = \frac{\frac{3}{7} - \frac{1}{4}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}} = \frac{3}{7}$$

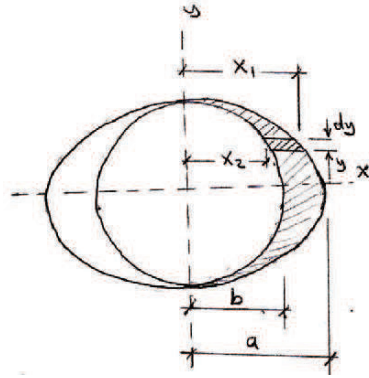




5/10 حدد المركز الهندسي للمساحة المحصورة

بين قطع الناقص والدائرة.

الحل:



معادلة الدائرة: $x^2 + y^2 = b^2$

$$x = \sqrt{b^2 - y^2} = x_2$$

معادلة القطع المكافئ هي:-

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

$$x^2 = a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \Rightarrow x = a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} = x_1$$

$$dA = (x_1 - x_2)dy$$

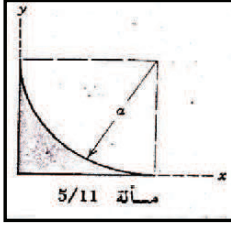
$$x_c = \frac{x_1 - x_2}{2} + x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x_c dA}{\int dA} = \frac{\int_{-b}^b \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)(x_1 - x_2)dy}{\int_{-b}^b (x_1 - x_2)dy} = \frac{\frac{1}{2} \int_{-b}^b (x_1^2 - x_2^2)dy}{\int_{-b}^b (x_1 - x_2)dy}$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{2} \int_{-b}^b \left[a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) - (b^2 - y^2)\right]dy}{\int_{-b}^b \left(a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} - \sqrt{b^2 - y^2}\right)dy} = \frac{4}{3\pi} (a + b)$$

بما أن الشكل متماثل حول المحور x فإن: $\bar{y} = 0.0$.

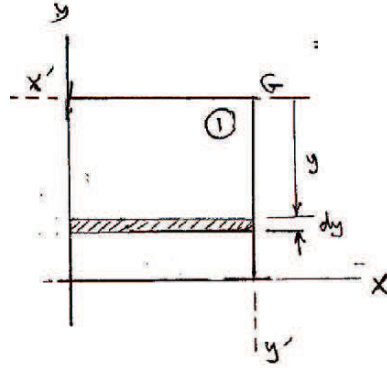
5/11 حدد المركز الهندسي للمساحة الموضحة في الشكل بالتكامل المباشر.



الحل:

المركز الهندسي للمساحة المظللة في المسألة يمكن إيجاده من خلال حساب المركز بالنسبة للإحداثيات x' , y' حيث نقطة الأصل ولتكن G .
الإحداثي هذا سنسميه (G_x, G_y) .
حيث :-

$$G_y = G_x = \frac{\int x_c dA_1 - \int x_c dA_2}{\int dA_1 - \int dA_2}$$



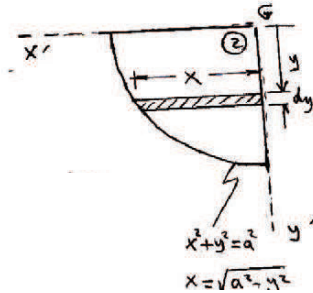
بمعنى نحاول إيجاد $(\int x_c dA_1)$ للمركبة-1 التي تمثل المربع بالكامل وكذلك $(\int dA_1)$ لتلك المركبة وتطرح منها $(\int x_c dA_2)$ ، $(\int dA_2)$ للمركبة الثانية التي تمثل ربع الدائرة. وبعد تطبيق القانون أعلاه والحصول على G_x أو G_y يكون:-

$$\bar{y} = \bar{x} = a - G_x$$

$$\int dA_1 = \int_0^a ady = ay \Big|_0^a = a^2$$

$$\int x_c dA_1 = \int_0^a \frac{a}{2} (ady) = \frac{a^2}{2} \int_0^a dy = \frac{a^3}{2}$$

$$\int dA_2 = \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} dy = \frac{\pi a^2}{4}$$



نتيجة التكامل الأخير سبق وإن تم التعرف عليه في السؤال (5/8) .

$$\begin{aligned}\int x_c dA_2 &= \int_0^a \left(\frac{x}{2}\right)(x dy) = \frac{1}{2} \int_0^a x^2 dy = \frac{1}{2} \int_0^a (a^2 - y^2) dy \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^a a^2 dy - \int_0^a y^2 dy \right] = \frac{1}{2} \left[a^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_0^a = \frac{1}{2} \left[a^3 - \frac{a^3}{3} \right] = \frac{a^3}{3}\end{aligned}$$

$$\therefore x_G = y_G = \frac{\int x_c dA_1 - \int x_c dA_2}{\int dA_1 - \int dA_2}$$

$$x_G = y_G = \frac{\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}}{a^2 - \frac{\pi a^2}{4}} = \frac{\frac{3a^3 - 2a^3}{6}}{\frac{4a^2 - \pi a^2}{4}}$$

$$x_G = y_G = \frac{2a}{3(4 - \pi)}$$

$$\therefore \bar{x} = \bar{y} = a - \frac{2a}{3(4 - \pi)} = \frac{3a(4 - \pi) - 2a}{3(4 - \pi)}$$

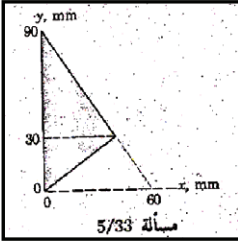
$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{12a - 3\pi a - 2a}{3(4 - \pi)} = \frac{a(10 - 3\pi)}{3(4 - \pi)}$$

الفصل الثالث عشر

حلول مسائل
المركز الهندسي للمساحات
بطريقة الأشكال الهندسية

5/33 احسب الإحداثي y للمركز الهندسي للمساحة المثلثية.

الحل:



لإيجاد الإحداثي y للمركز الهندسي للشكل المجاور المظلل والذي يرمز له بـ $(\bar{y})$ ، يجب أولاً تقسيم الشكل إلى أشكال هندسية منتظمة معلومة المركز والمساحات تسمى بالمركبات. مثال على ذلك المركبة (1)، (2) في الشكل المجاور.

نوجد مساحة تلك المركبات (A_1, A_2) إضافة إلى إيجاد بعد مركز كل مركبة عن المحور x والذي يرمز لها بـ (y_1, y_2) :

$$\frac{60}{90} = \frac{ab}{60} \Rightarrow ab = 40 \text{ mm} \text{ هو: } (ab) \text{ من تناسب المثلثات فأن طول}$$

$$A_1 = \frac{1}{2}(40)(60) = 1200 \text{ mm}^2 \text{ (مساحة المركبة -1)}$$

$$y_1 = \left(\frac{60}{3} + 30\right) = 50 \text{ mm} \text{ (بعد مركز المركبة -1 عن المحور x)}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(30)(40) = 600 \text{ mm}^2 \text{ (مساحة المركبة -2)}$$

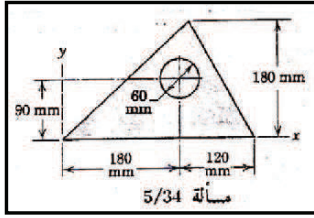
$$y_2 = \frac{2}{3}(30) = 20 \text{ mm} \text{ (بعد مركز المركبة -2 عن المحور x)}$$

من القانون التالي يمكن إيجاد الإحداثي $(\bar{y})$ للمركز الهندسي لأي شكل يتكون من عدد (n) من المركبات حيث:

$$\bar{y} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + \dots + y_n A_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}$$

وبما أن الشكل المطلوب في السؤال يتكون من مركبتين ، إذًا:

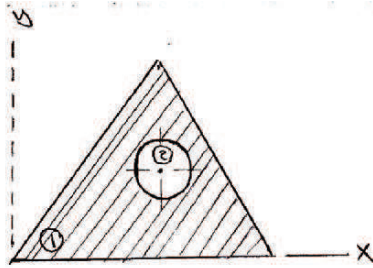
$$\bar{y} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{50(1200) + 20(600)}{1200 + 600} = 40 \text{ mm}$$



5/34 أحسب الإحداثي y للمركز الهندسي الموضج.

الحل:

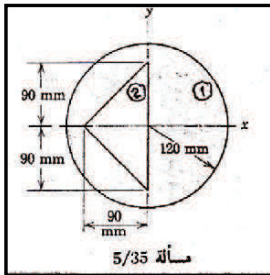
تقسم الشكل إلى مركبة (1) تضم المثلث الكبير ثم تطرح منه المركبة-2 الذي تمثل الدائرة.



$$(للمثلث) \quad A_1 = \frac{1}{2}(180+120)(180) = 27000 \text{ mm}^2, \quad y_1 = \left(\frac{1}{3} * 180\right) = 60 \text{ mm}$$

$$(للدائرة) \quad A_2 = \frac{\pi}{4}(60)^2 = 2827 \text{ mm}^2, \quad y_2 = 90 \text{ mm}$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2}{A_1 - A_2} = \frac{60(27000) - 90(2827)}{27000 - 2827} = 56.5 \text{ mm}$$



5/35 احسب الإحداثي x للمركز الهندسي للمساحة المظلة الموضحة.

الحل: نقسم الشكل إلى مركبة (1) تمثل كل الدائرة ثم نطرح منها المثلث الذي ستمثله بالمركبة (2) كما هو عليه في الشكل المجاور.

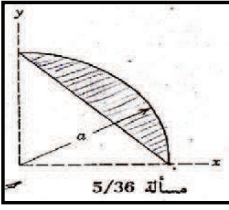
$$(للدائرة) \quad A_1 = \pi r^2 = \pi(120)^2 = 45239 \text{ mm}^2$$

لأن مركز المركبة (1) يقع على نقطة الأصل، فإن:-

$$X_1 = 0.0$$

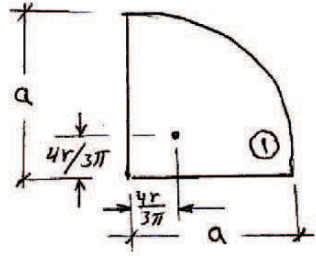
$$A_2 = \frac{1}{2}(90+90)(90) = 8100 \text{ mm}^2, \quad X_2 = -\left(\frac{1}{3} * 90\right) = -30 \text{ mm}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 A_1 - x_2 A_2}{A_1 - A_2} = \frac{(0.0)(45239) - (-30)(8100)}{45239 - 8100} = 6.54 \text{ mm}$$



5/36 حدد المركز الهندسي للمساحة المظللة
للمسألة 5/8 التي كررت هنا باستعمال طريقة
هذه الفقرة.

الحل: نقسم الشكل المطلوب إيجاد مركزه الهندسي إلى ربع دائرة
ممثلة بالمركبة 1- مطروح منه المثلث الممثل بالمركبة 2-:



$$(لربع الدائرة) \quad A_1 = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi a^2}{4}$$

$$x_1 = y_1 = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4a}{3\pi}$$

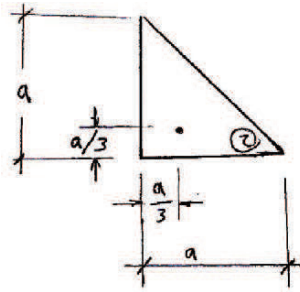
$$(المثلث) \quad A_2 = \frac{1}{2}(a)(a) = \frac{a^2}{2}$$

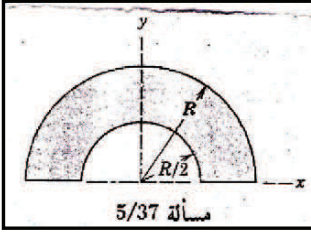
$$x_2 = y_2 = \frac{a}{3}$$

$$\bar{y} = \bar{x} = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2}{A_1 - A_2}$$

$$\bar{y} = \frac{\left(\frac{4a}{3\pi}\right)\left(\frac{\pi a^2}{4}\right) - \left(\frac{a}{3}\right)\left(\frac{a^2}{2}\right)}{\frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2}}$$

$$= \frac{a^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)}{a^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)} = 0.584a$$





5/37 حدد المركز الهندسي لمساحة المسألة
5/5 التي كررت هنا باستعمال طريقة هذه الفقرة.

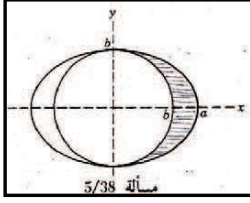
الحل: بما أن الشكل متماثل بالنسبة للمحور y ، لذا
فأن $(\bar{x} = 0.0)$. ولإيجاد $(\bar{y})$ نقسم الشكل
المطلوب حساب مركزه إلى مركبة (1) تمثل
نصف الدائرة الكبيرة ومركبة (2) تمثل نصف
الدائرة الصغيرة.

$$A_1 = \frac{\pi R^2}{2} , y_1 = \frac{4R}{3\pi}$$

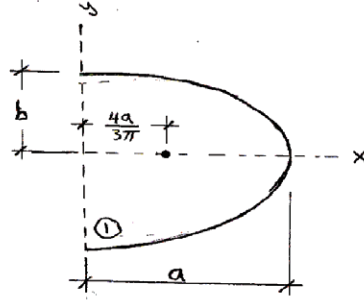
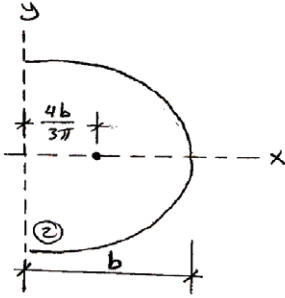
$$A_2 = \frac{\pi R^2}{8} , y_2 = \frac{4R}{6\pi}$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2}{A_1 - A_2}$$

$$\bar{y} = \frac{\left(\frac{4R}{3\pi}\right)\left(\frac{\pi R^2}{2}\right) - \left(\frac{4R}{6\pi}\right)\left(\frac{\pi R^2}{8}\right)}{\frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi R^2}{8}} = \frac{14R}{9\pi}$$



5/38 عين بطريقة هذه الفقرة الإحداثي x للمركز الهندسي للمساحة المظللة المحصورة بين القطع الناقص والدائرة للمسألة (5/10) الموضحة أيضا هنا (عد إلى الجدول C3 في الملحق C من كتاب مريام للحصول على خواص المساحة للقطع الناقص).



$$A_1 = \frac{\pi ab}{2} \quad (\text{نصف القطع الناقص})$$

$$x_1 = \frac{4a}{3\pi}$$

$$A_2 = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi b^2}{2} \quad (\text{نصف الدائرة})$$

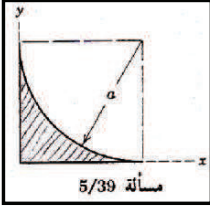
$$x_2 = \frac{4b}{3\pi}$$

الحل: بما أن الشكل المطلوب متماثل بالنسبة للمحور x ، إذاً $(\bar{y} = 0.0)$ وعليه يجب التعرف إلى الإحداثي x- للمركز الهندسي للجزء المظلل ، حيث يتم تقسيمه إلى مركبة (1) تمثل نصف القطع الناقص ومركبة (2) تمثل نصف الدائرة.

$$\bar{x} = \frac{x_1 A_1 - x_2 A_2}{A_1 - A_2} = \frac{\left(\frac{4a}{3\pi}\right)\left(\frac{\pi ab}{2}\right) - \left(\frac{4b}{3\pi}\right)\left(\frac{\pi b^2}{2}\right)}{\frac{\pi ab}{2} - \frac{\pi b^2}{2}}$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{4a^2 b}{6} - \frac{4b^3}{6}}{\frac{\pi ab - \pi b^2}{2}} = \frac{4a^2 b - 4b^3}{6} \cdot \frac{2}{\pi b(a - b)} = \frac{4b(a^2 - b^2)}{6\pi b(a - b)}$$

$$\bar{x} = \frac{4(a^2 - b^2)}{3\pi(a - b)} = \frac{4(a - b)(a + b)}{3\pi(a - b)} = \frac{4}{3\pi}(a + b)$$



5/39 حدد المركز الهندسي للمساحة المظللة في المسألة 5/11

المكررة هنا بطريقة هذه الفقرة.

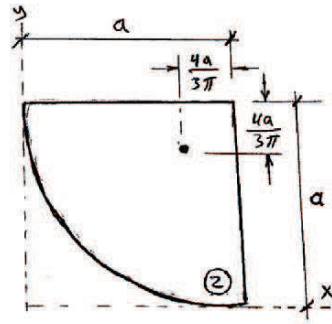
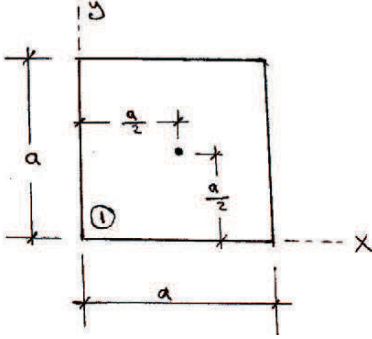
الحل:

يتم تقسيم الشكل إلى مركبة (1) تمثل المربع ومركبة (2) تمثل ربع الدائرة:-

$$(المربع) A_1 = a^2$$

$$y_1 = x_1 = \frac{a}{2}$$

$$(الربع الدائرة) A_2 = \frac{\pi a^2}{4}$$



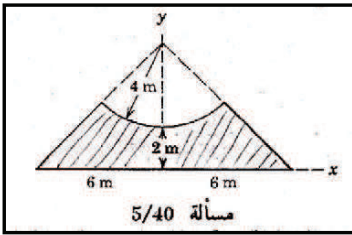
$$y_2 = x_2 = a - \frac{4a}{3\pi} = \frac{3\pi a - 4a}{3\pi} = \frac{a(3\pi - 4)}{3\pi}$$

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{x_1 A_1 - x_2 A_2}{A_1 - A_2} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)a^2 - \frac{a(3\pi - 4)}{3\pi} * \frac{\pi a^2}{4}}{a^2 - \frac{\pi a^2}{4}}$$

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{\frac{a^3}{2} - \frac{a^3(3\pi - 4)}{12}}{\frac{4a^2 - \pi a^2}{4}} = \frac{\frac{6a^3 - a^3(3\pi - 4)}{12}}{\frac{a^2(4 - \pi)}{4}}$$

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{\frac{a^3(6-3\pi+4)}{12}}{\frac{a^2(4-\pi)}{4}} = \frac{a^3(10-3\pi)}{12} * \frac{4}{a^2(4-\pi)}$$

$$\therefore \bar{x} = \bar{y} = \frac{a(10-3\pi)}{3(4-\pi)}$$



5/40 احسب المسافة $\bar{Y}$ من المحور x

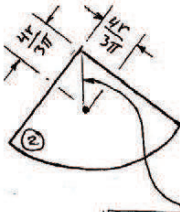
للمركز الهندسي للمساحة المظللة.

الحل:

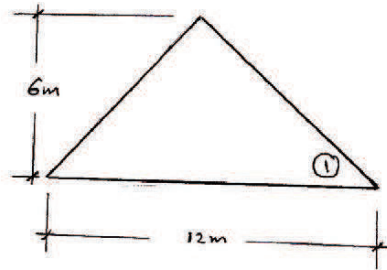
الشكل متماثل حول المحور y ، إذاً $\bar{x} = 0.0$

وعليه يجب التعرف إلى الإحداثي $\bar{y}$ للمركز الهندسي وذلك بتقسيم الشكل المطلوب إلى مركبة (1) تمثل

المثلث ومركبة (2) تمثل ربع الدائرة.



$$\sqrt{\left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2 + \left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2} = \frac{4r}{3\pi} \sqrt{2}$$

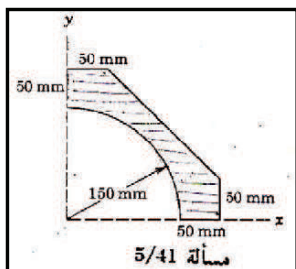


$$(\text{للمثلث}) A_1 = \frac{1}{2}(12)(6) = 36 \text{ m}^2 , \quad y_1 = \frac{6}{3} = 2 \text{ m}$$

$$(\text{لربع الدائرة}) A_2 = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi(4)^2}{4} = 4\pi = 12.566 \text{ m}^2$$

$$y_2 = 6 - \frac{4r}{3\pi} \sqrt{2} = 6 - \frac{4(4)}{3\pi} \sqrt{2} = 3.6 \text{ m}$$

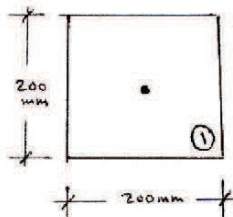
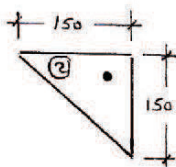
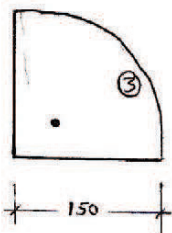
$$\bar{y} = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2}{A_1 - A_2} \Rightarrow \bar{y} = \frac{(2)(36) - 3.6(12.566)}{36 - 12.566} = 1.14 \text{ m}$$



5/41 احسب احداثيات المركز الهندسي للمساحة المظلة.

الحل:

لغرض إيجاد المركز الهندسي سيتم تقسيم الشكل إلى مركبة (1) تمثل مربع أبعاده (200×200) mm مطروح منه المركبة (2) التي تمثل مثلث قاعدته (150 mm) وارتفاعه (150 mm) إضافة إلى المركبة (3) التي تمثل ربع الدائرة التي نصف قطرها (150 mm) .



$$A_1 = 200(200) = 4 \times 10^4 \text{ mm}^2 \text{ (للمربع)}$$

$$x_1 = y_1 = \frac{200}{2} = 100 \text{ mm}$$

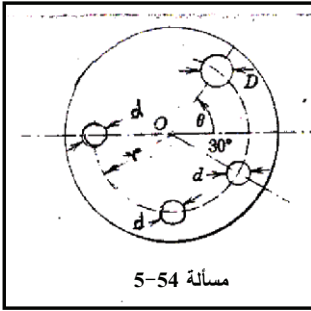
$$A_2 = \frac{1}{2}(150)(150) = 11250 \text{ mm}^2 \text{ (للمثلث)}$$

$$x_2 = y_2 = \left(\frac{2}{3} \times 150 + 50\right) = 150 \text{ mm}$$

$$A_3 = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi(150)^2}{4} = 17671 \text{ mm}^2 \text{ (لربع الدائرة)}$$

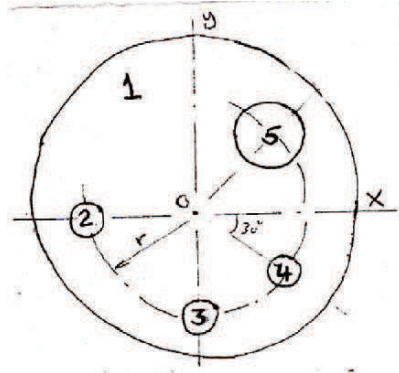
$$x_3 = y_3 = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4(150)}{3\pi} = 63.66 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} \bar{y} = \bar{x} &= \frac{x_1 A_1 - x_2 A_2 - x_3 A_3}{A_1 - A_2 - A_3} \\ &= \frac{100(4 \times 10^4) - 150(11250) - 63.66(17671)}{4 \times 10^4 - 11250 - 17671} = 107.2 \text{ mm} \end{aligned}$$



5/54 يدور قرص حول محور من مركزه O في هذا القرص ثلاث ثقوب قطر كل منها d موزعة كما في الشكل. يراد فتح ثقب رابع في القرص يقع مركزه على دائرة مراكز الثقوب الأخرى r بحيث يتوازن القرص (مركز الكتلة O) . عين قطر الثقب الرابع . ووضعه الزاوي

الحل:



$$\bar{x} = \frac{x_1 A_1 - x_2 A_2 - x_3 A_3 - x_4 A_4 - x_5 A_5}{A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5}$$

$$0.0 = \frac{0.0(A_1) - (-r)(\frac{\pi}{4}d^2) - 0.0(\frac{\pi}{4}d^2) - (r \cos 30)(\frac{\pi}{4}d^2) - (r \cos \theta)(\frac{\pi}{4}D^2)}{A_1 - \frac{\pi}{4}d^2 - \frac{\pi}{4}d^2 - \frac{\pi}{4}d^2 - \frac{\pi}{4}D^2}$$

$$0.0 = r \frac{\pi}{4}d^2 - r \cos 30(\frac{\pi}{4}d^2) - r \cos \theta(\frac{\pi}{4}D^2)$$

$$0.0 = r \frac{\pi}{4}[d^2 - \cos 30d^2 - \cos \theta D^2]$$

$$D^2 \cos \theta = d^2 - \cos 30d^2$$

$$D^2 \cos \theta = 0.134d^2 \dots\dots\dots(1)$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2 - y_3 A_3 - y_4 A_4 - y_5 A_5}{A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5}$$

$$0.0 = \frac{0.0(A_1) - 0.0(A_2) - (-r) \frac{\pi}{4} d^2 - (-r \sin 30) \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right) - (r \sin \theta) \left(\frac{\pi}{4} D^2 \right)}{A_1 - \frac{\pi}{4} d^2 - \frac{\pi}{4} d^2 - \frac{\pi}{4} d^2 - \frac{\pi}{4} D^2}$$

$$0.0 = r \frac{\pi}{4} d^2 + r \sin 30 \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right) - r \sin \theta \left(\frac{\pi}{4} D^2 \right)$$

$$0.0 = r \frac{\pi}{4} (d^2 + d^2 \sin 30 - D^2 \sin \theta)$$

$$\boxed{D^2 \sin \theta = 1.5d^2} \dots\dots\dots(2)$$

ويقسمة المعادلة (2) على (1) ينتج:-

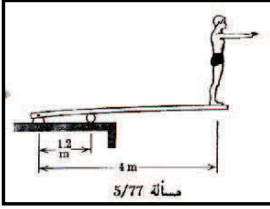
$$\tan \theta = \frac{1.5}{0.134} \Rightarrow \theta = 84.9^\circ$$

وبتعويض قيمة (θ) في أي من المعادلات أعلاه نحصل على :-

$$\boxed{D = 1.227 d}$$

الفصل الرابع عشر

حلول مسائل
رسم مخطط قوى القص وعزم
الانحناء



5/77 ارسم مخططات القص والعزم للوح غطس
يستعمل في السباحة والذي يحمل رجلاً ثقله
80kg على أهبة القفز .

الحل:

عندما يتعرض أي منشأ لقوى عرضية فإن أي
نقطة على طول الجسم سوف تتعرض لقوى
ماسية لمقطع المنشأ تسمى بقوى القص
(Shear force) إضافة إلى عزم انحناء
(Bending moment) .

مخطط قوى القص وعزم الانحناء هو المخطط
الذي من خلاله يمكن التعرف على قيم القص
وعزم الانحناء عند كل نقطة على طول الجسم.
هنالك طريقتين لرسم تلك المخططات هي
طريقة المقاطع وطريقة الأشكال الهندسية.

أ- حل المسألة بطريقة المقاطع:

نحسب ردود الأفعال عند المساند A, B:

$$+ \rightarrow \Sigma F_x = 0, A_x = 0.0$$

$$\downarrow + \Sigma M_A = 0.0$$

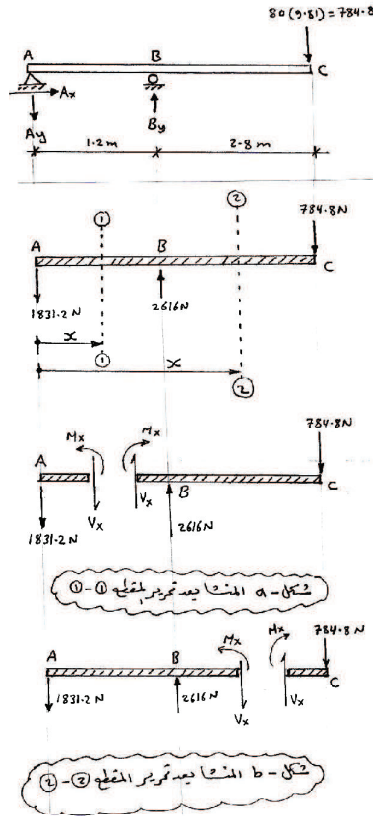
$$- 784.8(4) + B_y(1.2) = 0.0$$

$$B_y = 2616 \text{ N}$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$- A_y + 2616 - 784.8 = 0.0$$

$$A_y = 1831.2 \text{ N}$$



في البداية سيتم التعرف على معادلة القص وعزم الانحناء للقطاع AB. أي التعرف على قيم القص وقيم عزوم الانحناء في كل نقطة من نقاط المنشأ ضمن هذا القطاع والتي تتغير أحياناً تبعاً لتغير المسافة x باعتبار نقطة - A هي نقطة الأصل.

يمرر المقطع ❶-❶ في القطاع AB ويوضح اتجاه قوى القص V_x واتجاه عزوم الانحناء M_x بعد فصل المنشأ. اتجاه V_x ، M_x المبين في (شكل - a) وما ستره لاحقاً في كل الأشكال ، يمثل الاتجاه الموجب المتفق عليه في كثير من المراجع العلمية.

من خلال تطبيق معادلات الاتزان على جزء المنشأ إلى يمين أو يسار المقطع ❶-❶ أيهما أسهل حسابياً ، يمكن التعرف على معادلة القص وعزم الانحناء للقطاع AB . ولو أخذنا الجزء الأيسر يكون:-

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$-1831.2 - V_x = 0.0 \Rightarrow \boxed{V_x = -1831.2 \text{ N}}$$

وعند أخذ العزوم عند موضع وجود المقطع ❶-❶ أي:-

$$\curvearrowright + \Sigma M_{I-I} = 0.0$$

$$1831.2x + M_x = 0.0 \Rightarrow \boxed{M_x = -1831.2 x}$$

إذاً ضمن القطاع AB عندما ($0 \leq x \leq 1.2$) يكون القص ثابت وبقيمة سالبة. فإذا تم تمثيل الأحادي - x (الأفقى) في هذه المخططات لوضع المقطع على طول الكمرة، والإحداثي y- (الرأسي) قيم قوة القص، فإن القص السالب يرسم تحت المحور الأفقي كما مبين في شكل - C .
لو تأملنا العزم سنجد أن معادلة العزم هي معادلة خطية من الدرجة الأولى تتغير بتغير x أي بتغير موضع المقطع ضمن القطاع AB .

$$\text{When } x = 0.0 \Rightarrow M_x = -1831.2(0.0) = 0.0$$

$$\text{When } x = 1.2\text{m} \Rightarrow M_x = -1831.2(1.2) = -2197.4 \text{ N.m}$$

وعند تسقيط قيم العزوم تلك على الإحداثي y- (الرأسي) الذي يمثل قيم العزوم وإيصالها بخط مستقيم، يكون مخطط العزوم تبعاً لما هو عليه في شكل - d.

لو تأملنا القطاع BC سنجد أن طول هذا القطاع والأحمال عند نهايته تختلف عما كان عليه القطاع AB وبالتالي اختلاف قوى القص وعزوم الانحناء التي يتم التعرف عليها من خلال تمرير المقطع 2-2 وعلى مسافة x من نقطة الأصل A وفصل المنشأ تبعاً لما هو عليه في شكل - b.

فلو تم أخذ جزء المنشأ إلى يسار المقطع

2-2 :-

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$-1813.2 + 2616 - V_x = 0.0$$

$$V_x = 784.8 \text{ N}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_{2-2} = 0.0$$

$$1813.2(x) - 2616(x - 1.2) + M_x = 0.0$$

$$M_x = 784.8x - 3139.2$$

$$\text{When } x = 1.2\text{m} \Rightarrow M_x = 784.8(1.2) - 3139.2 = -2197.44 \text{ N.m}$$

$$\text{When } x = 4\text{m} \Rightarrow M_x = 784.8(4) - 3139.2 = 0.0$$

إذاً ضمن القطاع BC عندما ($1.2 \leq x \leq 4$) يكون القص ثابت وبقيمة ثابتة موجبة أي يرسم فوق المحور الأفقي. بينما العزم يكون معادلة خطية . وبعد التعرف على قيمة العزم عند بداية ونهاية القطاع، تم إكمال القيمتين بخط مستقيم .

لغرض السهولة في الحسابات يمكن اعتبار المقطع 2-2 على مسافة x من نقطة الأصل C بدلاً من A وأخذ جزء المنشأ إلى يمين المقطع. وبالتالي سيكون:-

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

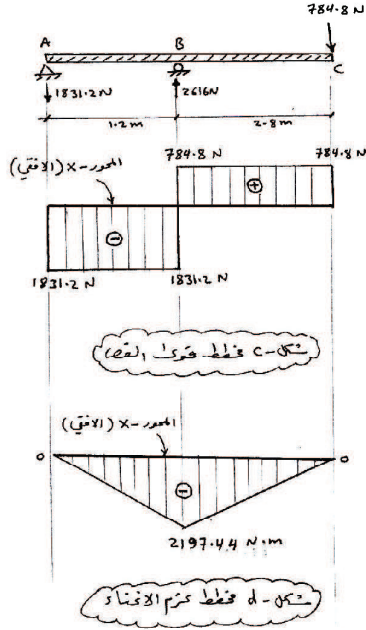
$$V_x - 784.8 = 0.0$$

$$\Rightarrow V_x = 784.8 \text{ N}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_{2-2} = 0.0$$

$$-M_x - 784.8 = 0.0$$

$$-M_x - 784.8(x) = 0.0 \Rightarrow M_x = -784.8x$$



قيمة العزم عند C - أي عندما ($x=0.0$) :-

$$M_x = - 784.8 (0.0) = 0.0$$

قيمة العزم - B أي عندما ($x=2.8$ m) :-

$$M_x = - 784.8 (2.8) = - 2197.4 \text{ N.m}$$

ب- حل المسألة بطريقة الأشكال الهندسية:

تعتبر هذه الطريقة هي استنتاج لما تم توضيحه بطريقة المقاطع.

فيعد التعرف على ردود الأفعال عند المساند B, A تأتي المنشأ من أقصى اليسار وتحديداً عند نقطة - A . القص عند هذه النقطة يرسم أسفل المحور الأفقي بمعنى سالب لأنها تتعرض لقوة باتجاه الأسفل ومقداره (1831.2 N). ولو تحركنا بالمقطع لحد عنصر متناهي في الصغر إلى يسار نقطة - B ضمن القطاع AB ، نجد أن القص السالب (V_{BL}) لا حمل يؤثر عليه عدا القوة (-1831.2 N) بمعنى تبقى قيمته ثابتة كما هو عليه في (شكل - C).

القص عند عنصر متناهي في الصغر إلى يمين - B (V_{BR}) هو ($V_{BR} = - 1831.2 + 2616 = 784.8 \text{ N}$) ولو تحركنا بالمقطع لغاية - C نجد أن القص الموجب ثابت وتتحقق قيمته مع قيمة القوة (784.8 N) عند - C .

أما لغرض رسم مخطط عزم الانحناء المبين في (الشكل - d) ، فيعد رسم المحور الأفقي تأتي المنشأ مرة أخرى من أقصى اليسار وتحديداً عند نقطة - A التي يكون عندها العزم مساوي للصفر لوجود المسند المفصلي عندها . إذاً بعد التعرف على قيمة العزم عند بداية القطاع AB نحسب العزم عند نهاية القطاع والذي يساوي مساحة القص ضمن هذا القطاع مضاف له قيمة العزم عند بداية القطاع . بمعنى أن العزم عند - B هو:

$$M_B = - 1831.2 (1.2) + 0.0 = - 2197.44 \text{ N.m}$$

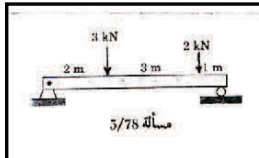
قيمة العزم M_B هذا يمثل أيضاً العزم عند بداية القطاع BC . العزم عند أي نقطة لا يتغير إلا إذا كان هنالك عزم مركز عند تلك النقطة وهذا ما سنجده في حل أسئلة قادمة. (مثل مسألة 5/83، 5/85) . إذاً العزم عند نهاية القطاع BC يساوي مساحة القص ضمن القطاع BC مضافاً له قيمة العزم عند بداية القطاع . أي أن العزم عند نقطة - C هو:-

$$M_C = 784.8 (2.8) - 2197.44 = 0.0$$

إذاً لغرض التعرف على قيمة قوة القص أو عزم الانحناء عند أي نقطة على طول الكمره يمكن تسقيط موضع تلك النقطة على مخطط قوى القص أو مخطط عزم الانحناء وسنجد من السهولة التعرف على ذلك.

ملاحظة: يجب العودة إلى حل مسألة 5/77 وقراءة جميع محتوياته بتركيز وإمعان قبل الذهاب لحل بقية المسائل الأخرى المتعلقة بهذا الفصل.

سيتم استخدام طريقة الأشكال الهندسية في رسم مخططات قوى القص وعزم الانحناء في أكثر المسائل القادمة وذلك لسهولة حساباتها في الوصول لما هو مطلوب.



5/78 ارسم مخططات القص والعزم للمنشأ المحمل.

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0.0$$

$$A_x = 0.0$$

$$\uparrow + \Sigma M_A = 0.0$$

$$D_y (6) - 2(5) - 3(2) = 0.0$$

$$D_y = 2.67 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$A_y - 3 - 2 + 2.67 = 0$$

$$A_y = 2.33 \text{ kN}$$

بعد إيجاد ردود الأفعال يتم تسقيط نقاط المنشأ التي يحصل عندها تغير في التحميل. عندها سنحصل على القطاعات (CD, BC, AB).

أ- رسم مخطط قوى القص:

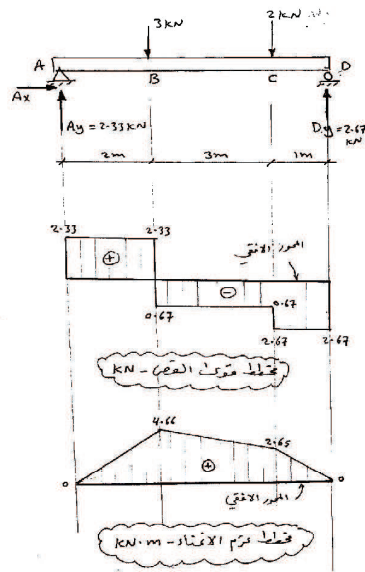
بعد رسم المحور الأفقي نأتي للمنشأ من نقطة A - حيث القص عندها موجب ($V_A = 2.33 \text{ kN}$) لأن القوة A_y باتجاه الأعلى. وطبقاً لما جاء في حل مسألة 5/77 نستمر في رسم مخطط قوى القص في كل قطاع لحين بلوغ نقطة D تبعاً لما يأتي: القص عند عنصر متناهي في الصغر إلى يسار ويمين B - على التوالي:

$$V_{BL} = 2.33 \text{ kN}$$

$$V_{BR} = -3 + 2.33 = -0.67 \text{ kN}$$

القص عند عنصر متناهي في الصغر إلى يسار ويمين C - على التوالي:-

$$V_{CL} = -0.67 \text{ kN}$$



$$V_{CR} = -2 - 0.67 = -2.67 \text{ kN}$$

$$V_D = -2.67 \text{ kN}$$

ب- رسم مخطط عزم الانحناء :

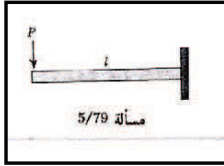
بعد رسم المحور الأفقي نأتي المنشأ من نقطة A حيث العزم عندها يساوي صفراً وهو العزم عند بداية القطاع AB . وطبقاً لما جاء في حل مسألة 5/77 فإن:-

$$M_B = 2.33 (2) + 0.0 = 4.66 \text{ kN.m}$$

$$M_C = -0.67 (3) + 4.66 = 2.66 \text{ kN.m}$$

$$M_D = -2.67 (1) + 2.65 = -0.02 = 0.0$$

العزم M_D يجب أن يساوي صفراً لوجود المسند الكروي . القيمة (-0.02) ظهرت بسبب تقريب قيمة رد الفعل عند المسند $D (D_y)$.



5/79 ارسم مخططات القص والعزم للمنشأ المثبت من أحد طرفيه.

الحل:

المسند-B هو من النوع الثابت (Fixed support) ردود الأفعال عنده هي عبارة عن قوتين (B_y, B_x) إضافة إلى العزم (M_B) . لا حاجة من إيجاد ردود الأفعال تلك لأننا حين نرسم مخطط قوى القص أو عزم الانحناء بطريقة الأشكال الهندسية تبدأ من أقصى يسار المنشأ أي من نقطة A . ولكن يمكن حسابها من باب التحقق من صحة الحل:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$-P + B_y = 0.0$$

$$B_y = P$$

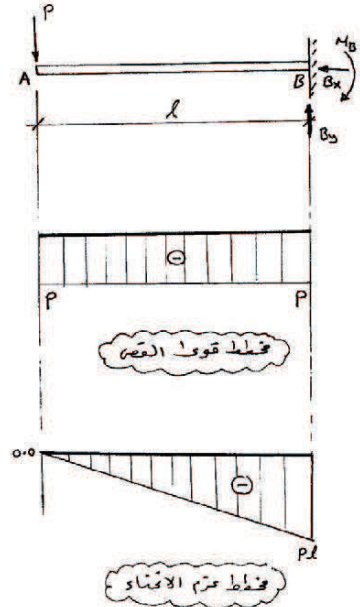
$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0.0$$

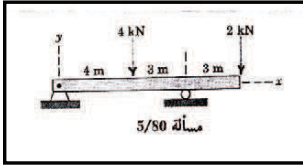
$$B_x = 0.0$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0.0$$

$$-M_B + P(\ell) = 0.0$$

$$M_B = P\ell$$





5/80 ارسم مخططات القص والعزم للمنشأ
الأفقي الموضح وعين القيمة العظمى لعزم
الانحناء وموضعها.

الحل:

$$\rightarrow \sum F_x = 0.0$$

$$A_x = 0.0$$

$$\uparrow \sum M_A = 0.0$$

$$C_y(7) - 2(10) - 4(4) = 0.0$$

$$C_y = 5.143 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y - 4 + 5.143 - 2 = 0.0$$

$$A_y = 0.857 \text{ kN}$$

أ- رسم مخطط قوى القص:

$$V_A = +0.857 \text{ kN}$$

$$V_{BL} = 0.857 \text{ kN}$$

$$V_{BR} = -4 + 0.857 = -3.143 \text{ kN}$$

$$V_{CL} = -3.143 \text{ kN}$$

$$V_{CR} = +5.143 - 3.143 = 2 \text{ kN}$$

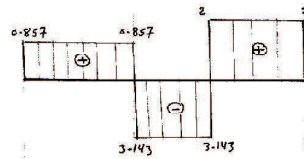
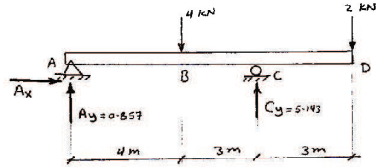
ب- رسم مخطط عزم الانحناء:

$$M_A = 0.0$$

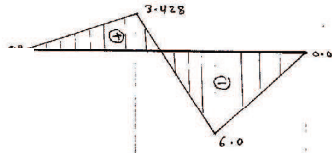
$$M_B = 0.857(4) + 0.0 = 3.428 \text{ kN.m}$$

$$M_C = -3.143(3) + 3.428 = -6 \text{ kN.m}$$

$$M_D = 2(3) - 6 = 0.0$$



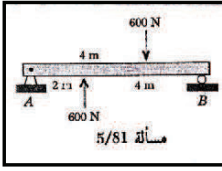
مخطط قوى القص - kN



مخطط عزم الانحناء - kN.m

من خلال مخطط عزم الانحناء يتضح أن أقصى عزم انحناء هو بمقدار (6 kN.m) وموضعه عند نقطة C . أي محل وجود المسند الكروي.

لاحظ أن $V_A = V_{BL}$ ذلك لأنه لا يوجد حمل ضمن القطاع AB يؤثر على قيمة القص كما سنجد ذلك في حل مسألة (5/94 ، 5/95).



5/81 ارسم مخططات القص والعزم للمنشأ
الموضح.

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0.0$$

$$A_x = 0.0$$

$$\uparrow \Sigma M_A = 0.0$$

$$600(2) - 600(4) + D_y(6) = 0.0$$

$$D_y = 200 \text{ N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$A_y + 600 - 600 + 200 = 0.0$$

$$A_y = -200 \text{ N} \Rightarrow A_y = 200 \text{ N} \downarrow$$

الإشارة السالبة تعني أن A_y باتجاه الأسفل وليست
باتجاه الأعلى كما افترضت ابتداءً.

أ- لرسم مخطط قوى القص:

$$V_A = -200 \text{ N}$$

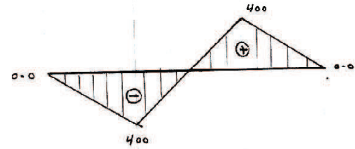
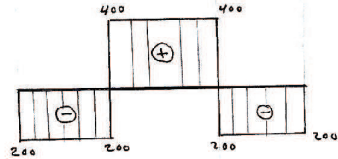
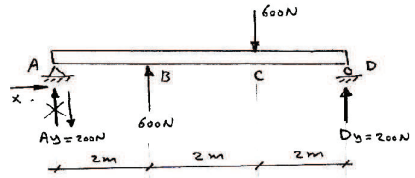
$$V_{BL} = -200 \text{ N}$$

$$V_{BR} = 600 - 200 = 400 \text{ N}$$

$$V_{CL} = 400$$

$$V_{CR} = -600 + 400 = -200 \text{ N}$$

$$V_D = -200 \text{ N}$$



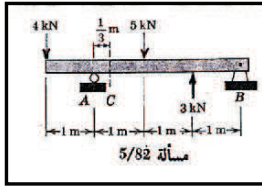
ب- لرسم مخطط عزم الانحناء:

$$M_A = 0.0$$

$$M_B = -200(2) + 0.0 = -400 \text{ N.m}$$

$$M_C = 400(2) - 400 = 400 \text{ N.m}$$

$$M_D = -200(2) + 400 = 0.0$$



5/82 ارسم مخططات القص والعزم للمنشأ
الموضح ثم أوجد عزم الانحناء M
عند المقطع C.

الحل:

$$\uparrow \Sigma M_B = 0.0$$

$$4(4) - A_y(3) + 5(2) - 3(1) = 0.0$$

$$A_y = 7.67 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$-4 + 7.67 - 5 + 3 + B_y = 0$$

$$B_y = -1.67 \text{ kN}$$

$$\therefore B_y = 1.67 \text{ kN} \downarrow$$

أ- لرسم مخطط قوى القص:

$$V_D = -4 \text{ kN}$$

$$V_{AL} = -4 \text{ kN}$$

$$V_{AR} = 7.67 - 4 = 3.67 \text{ kN}$$

$$V_{EL} = 3.67 \text{ kN}$$

$$V_{ER} = -5 + 3.67 = -1.33 \text{ kN}$$

$$V_{FL} = -1.33 \text{ kN}$$

$$V_{FR} = 3 - 1.33 = 1.67 \text{ kN}$$

$$V_B = 1.67 \text{ kN}$$

ب- لرسم مخطط عزم الانحناء:

$$M_D = 0.0$$

$$M_A = -4(1) + 0.0 = -4 \text{ kN.m}$$

$$M_E = 3.67(1) - 4 = -0.33 \text{ kN.m}$$

$$M_F = -1.33(1) - 0.33 = -1.66 \text{ kN.m}$$

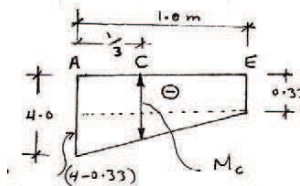
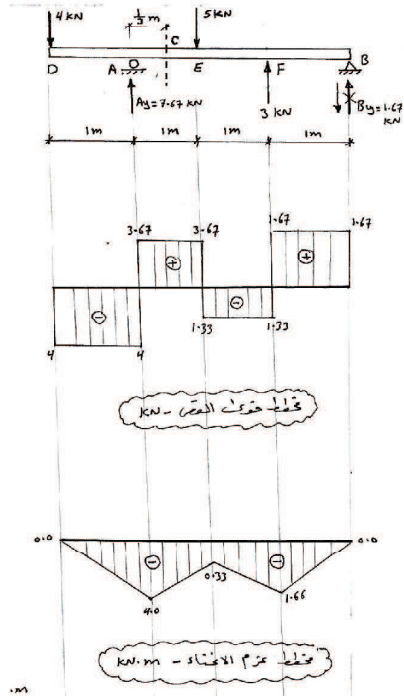
$$M_B = 1.67(1) - 1.66 = 0.0$$

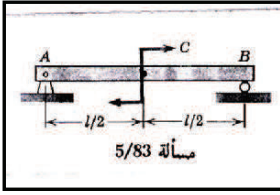
يمكن التعرف على العزم M عند المقطع C من خلال

مخطط العزم ضمن القطاع AE المبين في الشكل

المجاور. حيث:-

$$M_C = -[0.33 + (4 - 0.33)(1 - \frac{1}{3})] = -2.78 \text{ kN.m}$$





5/83 أرسم مخططات القص والعزم من أجل منشأ
محمل عند وسطه بعزم ازدواج C.

الحل:

$$\curvearrowright + \Sigma M_A = 0.0$$

$$B_y(\ell) - C = 0.0 \Rightarrow B_y = \frac{C}{\ell}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$-A_y + \frac{C}{\ell} = 0.0 \Rightarrow A_y = \frac{C}{\ell}$$

أ- لرسم مخطط قوى القص:

$$V_A = -\frac{C}{\ell}$$

$$V_B = -\frac{C}{\ell}$$

ب- لرسم مخطط عزم الانحناء:

$$M_A = 0.0$$

العزم عند عنصر متناهي في الصفر إلى يسار

نقطة D - (M_{DL}) هو :-

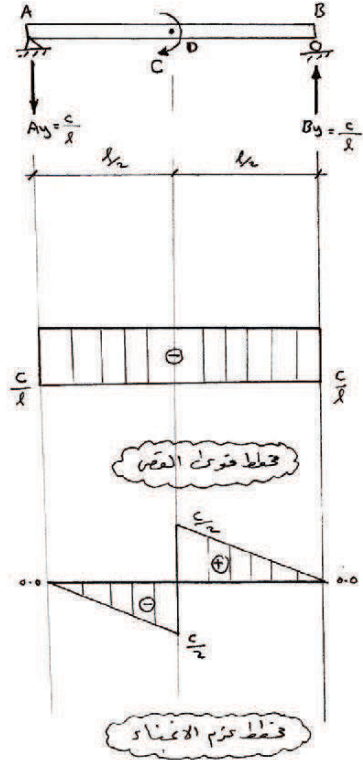
$$M_{DL} = -\frac{C}{\ell} \left(\frac{\ell}{2} \right) + 0.0 = -\frac{C}{2}$$

العزم عند عنصر متناهي في الصفر إلى يمين

نقطة D - (M_{DR}) هو :-

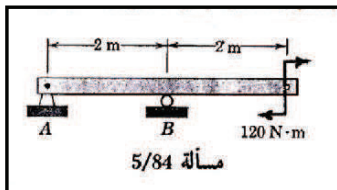
$$M_{DR} = C - \frac{C}{2} = \frac{C}{2}$$

$$M_B = -\frac{C}{\ell} \left(\frac{\ell}{2} \right) + \frac{C}{2} = 0.0$$



ملاحظة:

إذا كان موضع المسند الكروي أو المفصلي في أطراف المنشأ كما هو عليه في (B, A) فإن العزم عندهما يجب أن يساوي صفراً.



5/84 ارسم مخططات القص والعزم لمنشأ مطبق عليه ازدواج في نهايته. ما هو العزم عند مقطع يبعد 0.5m متراً عن يمين B.

الحل:

$$\uparrow \Sigma M_A = 0.0$$

$$B_y(2) - 120 = 0.0$$

$$B_y = 60 \text{ N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$-A_y + 60 = 0.0 \Rightarrow A_y = 60$$

أ- لرسم مخطط قوى القص:

$$V_A = -60 \text{ N}$$

$$V_{BL} = -60 \text{ N}$$

$$V_{BR} = 60 - 60 = 0.0$$

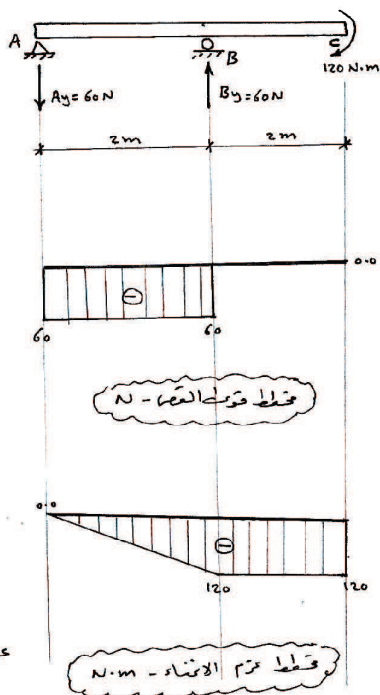
$$V_C = 0.0$$

ب- لرسم مخطط عزم الانحناء:

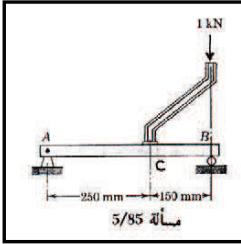
$$M_A = 0.0$$

$$M_B = -60(2) + 0.0 = -120 \text{ N.m}$$

$$M_C = 0.0 - 120 = -120 \text{ N.m}$$



عند تسقيط النقطة التي تبعد مسافة 0.5m إلى يمين B على مخطط عزم الانحناء ، نجد أن العزم عن تلك النقطة هو بمقدار (-120 N.m).



5/85 لحمت زاوية بجائز AB وتحمل حملاً قدره 1 kN .
أرسم مخططات القص والعزم لهذا المنشأ .

الحل:

بمراجعة مبادئ عزم الازدواج في الفصول السابقة، يمكن مكافئة القوة (1kN) إلى قوة وعزم ازدواج يؤثر عن نقطة - C .

$$\uparrow + \Sigma M_A = 0.0$$

$$B_y (400) - 1(250) - 150 = 0.0$$

$$B_y = 1\text{kN}$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$A_y - 1 + 1 = 0.0 \Rightarrow A_y = 0.0$$

أ- لرسم مخطط قوى القص:

$$V_A = 0.0$$

$$V_{CL} = 0.0$$

$$V_{CR} = -1 + 0.0 = -1\text{kN}$$

$$V_B = -1\text{kN}$$

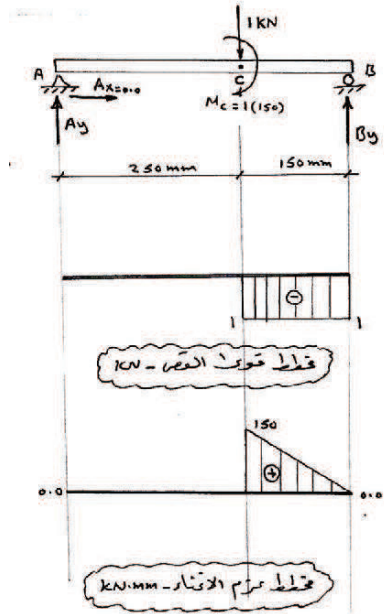
ب- لرسم مخطط عزم الانحناء:

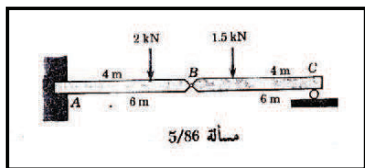
$$M_A = 0.0$$

$$M_{CL} = 0.0$$

$$M_{CR} = 150 + 0.0 = 150\text{kN}\cdot\text{mm}$$

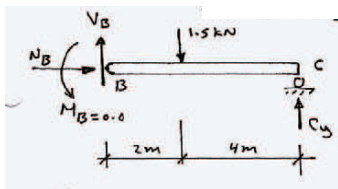
$$M_B = -1(150) + 150 = 0.0$$





5/86 أنشئ مخططات العزم لمنشأين محملين كما هو موضح والمتصلين بمفصل عند النقطة B.

الحل: من خواص المفصل الداخلي - B هو أن العزم عنده يساوي صفر . فلو تم اقتطاع الجزء BC من المنشأ فإن مخطط الجسم الحر له سيكون:-



$$\curvearrowleft + \Sigma M_B = 0.0$$

$$C_y(6) - 1.5(2) = 0.0 \Rightarrow C_y = 0.5 \text{ kN}$$

وبالعودة إلى المنشأ بالكامل فإن:-

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$A_y - 2 - 1.5 + 0.5 = 0.0$$

$$A_y = 3 \text{ kN}$$

$$+ \rightarrow \Sigma F_x = 0.0 \Rightarrow A_x = 0.0$$

$$\curvearrowleft + \Sigma M_A = 0.0$$

$$M_A - 2(4) - 1.5(8) + 0.5(12) = 0.0$$

$$M_A = 14 \text{ kN.m}$$

ب- لرسم مخطط عزم الانحناء:

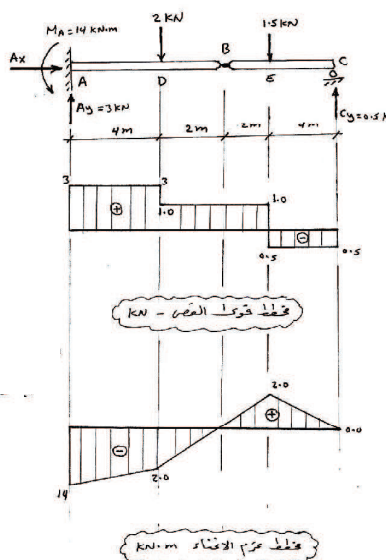
$$M_A = -14 \text{ kN.m}$$

$$M_D = 3(4) - 14 = -2 \text{ kN.m}$$

$$M_B = 1(2) - 2 = 0.0$$

$$M_E = 1(2) + 0.0 = 2 \text{ kN.m}$$

$$M_C = -0.5(4) + 2 = 0.0$$



أ- لرسم مخطط قوى القص:

$$V_A = 3 \text{ kN}$$

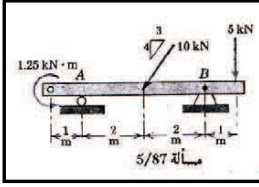
$$V_{DL} = 3 \text{ kN}$$

$$V_{DR} = -2 + 3 = 1 \text{ kN}$$

$$V_{EL} = -1 \text{ kN}$$

$$V_{ER} = -1.5 + 1 = -0.5 \text{ kN}$$

$$V_C = -0.5 \text{ kN}$$



5/87 أرسم مخططات القص والعزم للمنشأ الموضح. ثم

عين عزم الانحناء M عند القيمة العظمى.

الحل:

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0.0$$

$$B_x - 10\left(\frac{3}{5}\right) = 0.0$$

$$B_x = 6 \text{ kN}$$

$$\curvearrowleft + \Sigma M_A = 0.0$$

$$B_y(4) - 5(5) - 10\left(\frac{4}{5}\right)(2) + 1.25 = 0$$

$$B_y \approx 10 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$A_y - 10\left(\frac{4}{5}\right) + 10 - 5 = 0.0$$

$$A_y = 3 \text{ kN}$$

أ- لرسم مخطط قوى القص:

$$V_C = 0.0 \quad V_{AL} = 0.0$$

$$V_{AR} = +3 \text{ kN}$$

$$V_{DL} = +3 \text{ kN}$$

$$V_{DR} = -10\left(\frac{4}{5}\right) + 3 = -5 \text{ kN}$$

$$V_{BL} = -5 \text{ kN}$$

$$V_{BR} = 10 - 5 = 5 \text{ kN}$$

$$V_E = 5 \text{ kN}$$

ب- لرسم مخطط عزم الانحناء:

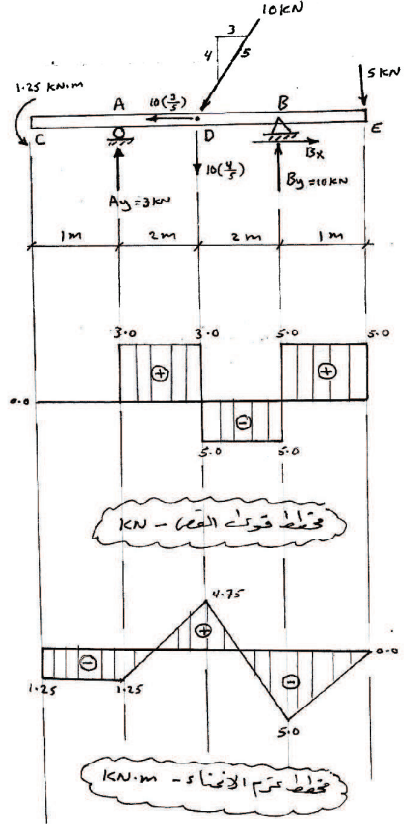
$$M_C = -1.25 \text{ kN.m}, \quad M_A = 0.0 - 1.25 = -1.25 \text{ kN.m}$$

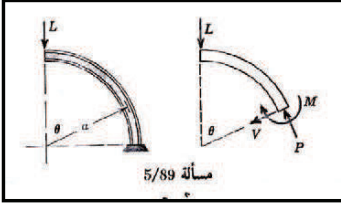
$$M_D = 3(2) - 1.25 = 4.75 \text{ kN.m}$$

$$M_B = -5(2) + 4.75 = -5.25 \text{ kN.m}$$

$$M_E = 5(1) - 5.25 = -0.25 \approx 0.0$$

(الفرق هذا جاء بسبب تقريب قيمة رد الفعل (B_y))





5/89 لمنشأ مثبت في أحد طرفيه شكل مربع دائرة. عين تعبيرات القص V وعزم الانحناء M كدوال لـ θ .

الحل:

لحساب العزم M فإن:-

$$\curvearrowleft + \Sigma M_G = 0.0$$

$$L(a - a \cos \theta) - M = 0$$

$$\boxed{M = La(1 - \cos \theta)}$$

لحساب القص V فإن:-

$$+\nearrow \Sigma F_x = 0.0$$

$$-V - L \cos \theta$$

$$\boxed{V = -L \cos \theta}$$

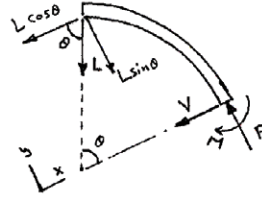
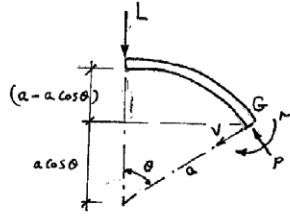
ولحساب القوة المحورية P (غير مطلوبة)

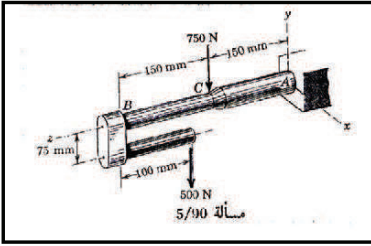
فإن:-

$$\nearrow + \Sigma F_y = 0$$

$$P - L \sin \theta = 0.0$$

$$\boxed{P = L \sin \theta}$$





5/90 أنشئ مخطط عزم الانحناء للمحور AB المثبت من أحد طرفيه الموضح وهو يمثل وحدة صلبة.

الحل:

لا حاجة في حساب ردود الأفعال عند المسند-
A لأن رسم مخطط قوى القص وعزم الانحناء
بطريقة الأشكال الهندسية تبدأ بها من أقصى يسار
المنشأ. أي من نقطة B-.

أ- لرسم مخطط قوى القص:

$$V_B = -500 \text{ N}$$

$$V_{CL} = -500 \text{ N}$$

$$V_{CR} = -750 - 500 = -1250 \text{ N}$$

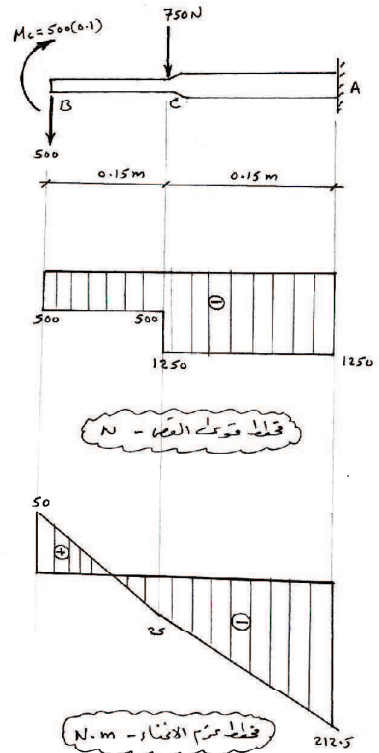
$$V_A = -1250 \text{ N}$$

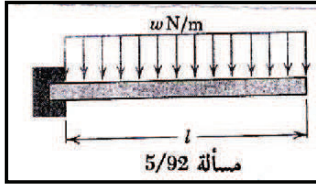
ب- لرسم مخطط عزم الانحناء:

$$M_B = 500(0.1) = 50 \text{ N.m}$$

$$M_C = -500(0.15) + 50 = -25 \text{ N.m}$$

$$M_A = -1250(0.15) - 25 = -212.5 \text{ N.m}$$





5/92 ارسم مخططات القص والعزم المثبت من أحد طرفيه والمحمل بحمل منتظم بوحدة الطول.

الحل:

في كل المسائل السابقة كان الحمل الذي تتعرض لها المشاءات هو من النوع الذي يطلق عليه بالحمل المركز (Concentrated Loads). المنشآت في المسائل القادمة تتعرض إلى نوع آخر من أنواع التحميل الذي يطلق عليه بالحمل الموزع بانتظام (Uniform distributed load) معادلة القص وعزم الانحناء لهذا النوع من التحميل تختلف كما هو عليه في حالة الحمل المركز. أوجه الاختلاف يمكن أن يلاحظ من خلال حل هذه المسألة بطريقتين هما:-

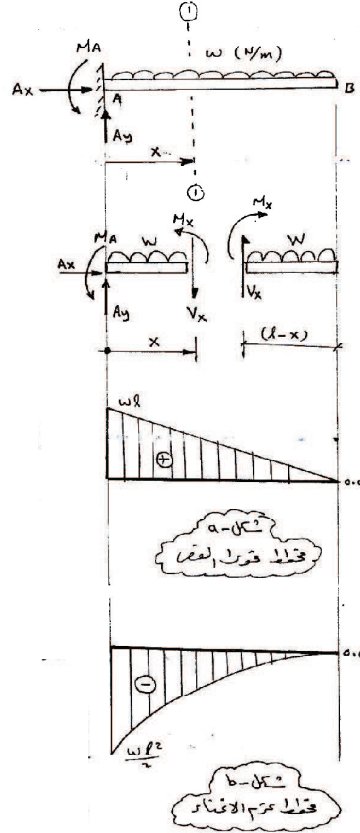
أ- حل المسألة بطريقة المقاطع:

بتحرير المقطع 1-1 عند موضع يبعد مسافة x عن نقطة A (أي اعتبار A نقطة الأصل) وفصل المنشأ إلى جزأين ، يمكن إيجاد معادلة القص وعزم الانحناء بتطبيق معادلات الاتزان على أي من الجزأين أيهما أسهل لنا حسابياً . وبأخذ جزء المنشأ إلى يمين المقطع 1-1 تكون معادلة القص (V_x) :

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$V_x - w(\ell - x) = 0 \Rightarrow V_x = W(\ell - x)$$

الحمل الموزع تم التعامل معه كما لو مستطيل طوله $(\ell - x)$ وعرضه (W) . إيجاد مساحته



يعني تحويل الحمل الموزع إلى قوة محصلة موضعتها عند المركز الهندسي للمستطيل.

معادلة القص أعلاه هي معادلة من الدرجة الأولى أي معادلة خطية مستقيمة يمكن من خلالها إيجاد قيمة القص عندما يكون المقطع ①-① في أي موضوع ضمن القطاع AB حيث $(0 \leq x \leq \ell)$

$$\text{when } x = 0 \Rightarrow V_x = W(\ell - 0.0) = W\ell$$

$$\text{when } x = \ell \Rightarrow V_x = W(\ell - \ell) = 0.0$$

إذا مخطط قوى القص يكون تبعاً لما هو عليه في (شكل a).

بالرجوع مرة أخرى إلى جزء المنشأ إلى يمين المقطع ①-① يمكن التعرف على طبيعة معادلة عزم

الانحناء بأخذ العزم عند موضع وجود المقطع ①-① حيث:-

$$\nabla \Sigma M_{1-1} = 0.0$$

$$-M_x - w(\ell - x)\left(\frac{\ell - x}{2}\right) = 0$$

$$M_x = -\frac{w}{2}(\ell - x)^2$$

إذا معادلة العزم هي معادلة منحنى من الدرجة

الثانية تصح عندما $(0 \leq x \leq \ell)$

$$\text{when } x = 0 \Rightarrow M_x = -\frac{W}{2}(\ell - 0.0)^2 = -\frac{W\ell^2}{2}$$

$$\text{when } x = \ell \Rightarrow M_x = -\frac{W}{2}(\ell - \ell)^2 = 0.0$$

منحنى مخطط عزم الانحناء يكون عبارة عن

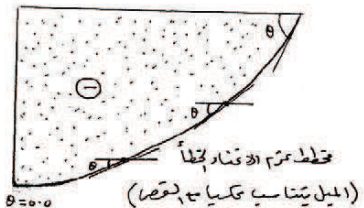
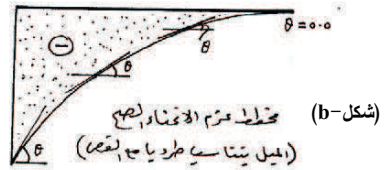
محدب أو مقعر. ميل المنحنى يتناسب طردياً مع

قيمة قوة القص. ميل المنحنى يقصد به الزاوية

المحصورة بين خط التماس وخط الأفق كما مبين

في الأشكال المجاورة. إذا مخطط عزم الانحناء

يكون تبعاً لما هو عليه في (شكل b).



ب- حل المسألة بطريقة الأشكال الهندسية:-

في هذه الطريقة عادةً تبدأ بالحسابات من أقصى يسار المنشأ. أي من نقطة - A . لذا مسبقاً يجب التعرف على قيم ردود الأفعال عند المسند الثابت - A . حيث:-

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$A_y - w\ell = 0 \Rightarrow A_y = w\ell$$

+

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0.0 \Rightarrow A_x = w\ell$$

$$\downarrow + \Sigma M_A = 0$$

$$M_A - w(\ell)\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0 \Rightarrow M_A = \frac{w\ell^2}{2}$$

أ- لرسم مخطط قوى القص:

$$V_A = w\ell$$

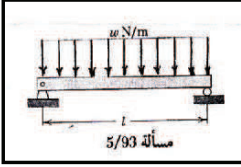
القص عند - B يساوي مساحة التحميل ضمن القطاع AB مضاف له القص عند بداية القطاع. أي أن:

$$V_B = -w\ell + w\ell = 0.0$$

ب- لرسم مخطط عزم الانحناء:

$$M_A = -\frac{w\ell^2}{2}$$

$$M_B = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot w\ell - \frac{w \cdot \ell^2}{2} = 0.0$$



5/93 ارسم مخططات القص لمنشأ محمل ثم أوجد عزم الانحناء الأعظم.

الحل:

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0.0$$

$$\uparrow \Sigma M_A = 0$$

$$B_y(\ell) - w(\ell)\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0$$

$$B_y = \frac{w\ell}{2}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$A_y - w\ell + \frac{w\ell}{2} = 0$$

$$A_y = \frac{w\ell}{2}$$

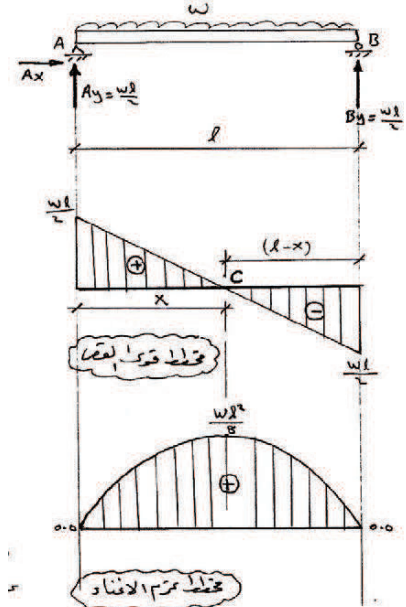
باستخدام طريقة الأشكال الهندسية سيتم:-

أ- رسم مخطط قوى القص:

$$V_A = \frac{w\ell}{2}$$

$$V_B = -w\ell + \frac{w\ell}{2} = -\frac{w\ell}{2}$$

الموضع الذي يكون فيه القص صفر ينتج عنده أكبر عزم انحناء ولأهمية ذلك يجب تسقيط هذا



الموضع على مخطط عزم الانحناء للتعرف على قيمة العزم عنده.

من النسبة والتناسب بين المثلثات في مخطط قوى القص يمكن التعرف على الموضع - C الذي يكون فيه القص صفراً على افتراض يبعد مسافة x عن المسند - A.

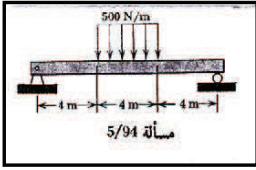
$$\frac{\frac{w\ell}{2}}{x} = \frac{\frac{w\ell}{2}}{(\ell - x)} \Rightarrow x = \frac{\ell}{2}$$

ب- رسم مخطط عزم الانحناء:

$$M_A = 0.0$$

$$M_C = \frac{1}{2} * \frac{\ell}{2} * \frac{w\ell}{2} = \frac{w\ell^2}{8} \quad (\text{العزم الأعظم})$$

$$M_B = -\frac{1}{2} * \frac{\ell}{2} * \frac{w\ell}{2} + \frac{w\ell^2}{8} = 0.0$$



5/94 ارسم مخططات القص والعزم لمنشأ يحمل الحمل
500N من طول المنشأ والموزع على جزئه
الأوسط. الحل:

$$\downarrow + \Sigma M_A = 0.0$$

$$D_y(12) - 500(4)(4 + \frac{4}{2}) = 0.0$$

$$D_y = 1000 \text{ N}$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$A_y - 500(4) + 1000 = 0.0$$

$$A_y = 1000 \text{ N}$$

يمكن إيجاد قيم ردود الأفعال (A_y , D_y) من
خلال التماثل . حيث أن الحمل (500 N/m)
يتوزع مناصفةً بين المسدنين (D, A) بمعنى:-

$$D_y = A_y = \frac{500(4)}{2} = 1000 \text{ N}$$

أ- لرسم مخطط قوى القص:

$$V_A = 1000 \text{ N} \quad V_{BL} = V_{BR} = 1000 \text{ N}$$

$$V_{CL} = V_{CR} = -500(4) + 1000 = -1000 \text{ N}$$

$$V_D = -1000 \text{ N}$$

من النسبة والتناسب نوجد موضع E - التي
يكون عندها القص صفراً. حيث:

$$\frac{1000}{x} = \frac{1000}{(4-x)} \Rightarrow x = 2 \text{ m}$$

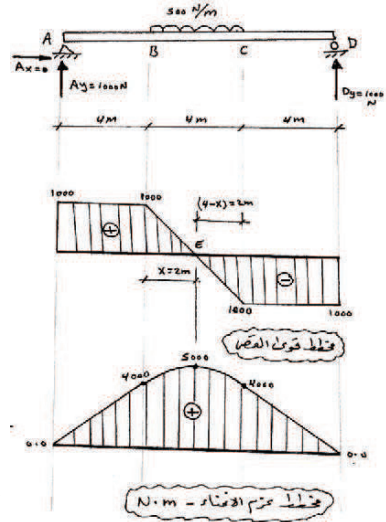
ب- لرسم مخطط عزم الانحناء:

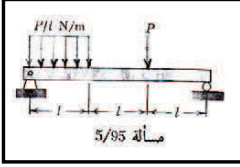
$$M_A = 0.0 \quad M_B = 1000(4) + 0.0 = 4000 \text{ N.m}$$

$$M_E = \frac{1}{2} * 2 * 1000 + 4000 = 5000 \text{ N.m}$$

$$M_C = -\frac{1}{2} * 2 * 1000 + 5000 = 4000 \text{ N.m}$$

$$M_D = 0.0$$





5/95 ارسم مخططات القص والعزم للمنشأ المحمل وأوجد القيمة العظمى M لعزم الانحناء.

الحل:

$$\downarrow + \Sigma M_A = 0.0$$

$$D_y(3\ell) - P(2\ell) - \frac{P}{\ell}(\ell)\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0.0$$

$$D_y = \frac{5}{6}P$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$A_y - \frac{P}{\ell}(\ell) - P + \frac{5}{6}P = 0$$

$$A_y = \frac{7}{6}P$$

أ- نرسم مخطط قوى القص:

$$V_A = \frac{7}{6}P$$

$$V_{BL} = V_{BR} = -\frac{P}{\ell}(\ell) + \frac{7}{6}P = \frac{P}{6}$$

$$V_{CL} = \frac{P}{6}$$

$$V_{CR} = -P + \frac{P}{6} = -\frac{5}{6}P$$

$$V_D = -\frac{5}{6}P$$

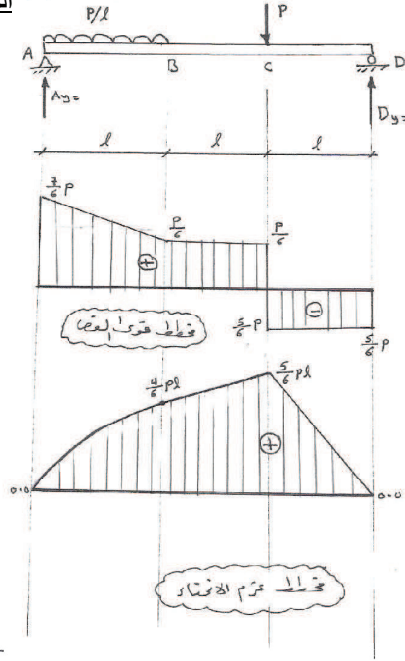
$$M_A = 0.0$$

العزم عند B - يساوي مساحة شبه المنحرف للقص ضمن القطاع AB مضاف له العزم عند بداية القطاع.

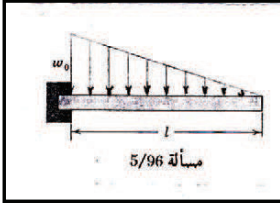
$$M_B = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{6}P + \frac{1}{6}P\right)(\ell) + 0.0 = \frac{4}{6}P\ell$$

$$M_C = \frac{P}{6}(\ell) + \frac{4}{6}P\ell = \frac{5}{6}P\ell$$

$$M_D = -\frac{5}{6}P(\ell) + \frac{5}{6}P\ell = 0.0$$



ب- لرسم مخطط عزم الانحناء:



5/96 ارسم مخططات القص والعزم للمنشأ مثبت من أحد طرفيه محمل بحمل خطي ثم أوجد القيمة العظمى M لعزم الانحناء.

الحل:

التحميل الذي يتعرض له المنشأ في هذه المسألة هو نوع آخر من أنواع التحميل الذي يطلق عليه بالحمل المتغير بانتظام (Uniform varying loads) معادلة القص لمثل هذا النوع من التحميل هي في العادة معادلة رياضية من الدرجة الثانية في حين معادلة العزم من الدرجة الثالثة وهذا ما سيتم إثباته من خلال حل المسألة بطريقة المقاطع بتمرير المقطع ①-① وأخذ جزء المنشأ إلى يمين المقطع باعتبار B هي نقطة الأصل. أي أخذ المقطع على مسافة -x من نقطة B.

من النسبة والتناسب نحصل على قيمة التحميل عند موضع وجود المقطع . حيث:

$$\frac{w_0}{l} = \frac{w_x}{x} \Rightarrow w_x = \frac{w_0}{l} x$$

$$\uparrow \Sigma F_y = 0$$

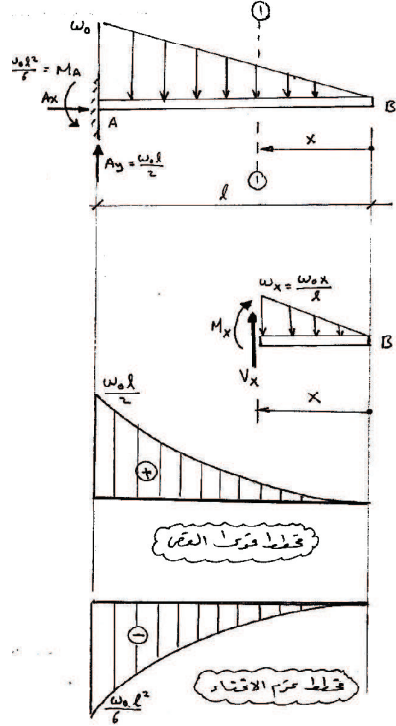
$$V_x - \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{w_0 x}{l} = 0.0$$

$$V_x = \frac{w_0 x^2}{2l} \quad (\text{معادلة من الدرجة الثانية})$$

الحمل المتغير بانتظام تم التعامل معه كما لو كان مثلث قاعدته -x وارتفاعه $\frac{w_0 x}{l}$. إيجاد مساحته يعني إيجاد محصلة التحميل وموضعها عند المركز الهندسي للمثلث .

$$\text{when } x = 0.0 \Rightarrow V_x = \frac{w_0 (0.0)^2}{2l} = 0.0$$

$$\text{when } x = l \Rightarrow V_x = \frac{w_0 (l)^2}{2l} = \frac{w_0 l}{2}$$



منحنى القص يرسم بحيث ميلانه يتناسب طردياً مع قيمة التحميل (راجع مسألة 5/92)

وبالرجوع مرة أخرى إلى جزء المنشأ إلى يمين المقطع ❶-❶ يمكن التعرف على معادلة العزم.

$$\uparrow + \Sigma M_{1-1} = 0.0$$

$$-M_x - \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{w_o x}{\ell} \cdot \left(\frac{1}{3}x\right) = 0.0$$

$$\boxed{M_x = -\frac{w_o x^3}{6\ell}} \quad (\text{معادلة من الدرجة الثالثة})$$

$$\text{when } x = 0.0 \Rightarrow M_x = -\frac{w_o (0.0)^3}{6\ell} = 0.0$$

$$\text{when } x = \ell \Rightarrow M_x = -\frac{w_o (\ell)^3}{6\ell} = -\frac{w_o \ell^2}{6}$$

منحنى العزم يرسم بحيث ميلانه يتناسب طردياً مع قيمة القص.

حل المسألة بطريقة الأشكال الهندسية يتطلب أولاً إيجاد ردود الأفعال عند المسند A.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0.0$$

$$A_y - \frac{1}{2}(\ell)(w_o) = 0 \Rightarrow A_y = \frac{w_o \ell}{2}$$

$$\uparrow + \Sigma M_A = 0.0$$

$$M_A - \frac{1}{2}(\ell)(w_o)\left(\frac{1}{3}\ell\right) = 0.0 \Rightarrow M_A = \frac{w_o \ell^2}{6}$$

أ- لرسم مخطط قوى القص:

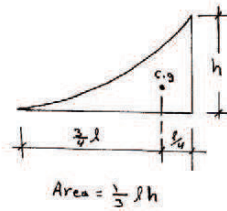
$$V_A = -\frac{w_o \ell}{2}$$

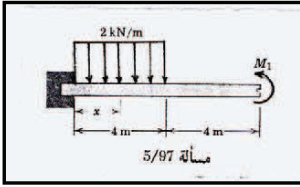
$$V_B = -\frac{1}{2}(\ell)(w_o) + \frac{w_o \ell}{2} = 0.0$$

ب- لرسم مخطط عزم الانحناء:

$$M_A = -\frac{w_o \ell^2}{6}$$

$$M_B = \frac{1}{3}(\ell)\left(\frac{w_o \ell}{2}\right) - \left(\frac{w_o \ell^2}{6}\right) = 0.0$$





5/97 ارسم مخططات القص والعزم للمنشأ مثبت من أحد طرفيه طبق عليه ازدواج M_1 لينتج عزمًا قدره صفرًا عن الطرف الثابت للجائز . أوجد عزم الانحناء، عندما $x=2m$.

الحل:

قيم ردود الأفعال عند المسند - A باعتبار

$(M_A=0.0)$ حسب ما مذكور في المسألة هي:-

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$A_y - 2(4) = 0 \Rightarrow A_y = 8 \text{ kN}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0$$

$$M_1 - 2(4)(2) = 0$$

$$M_1 = 16 \text{ kN.m}$$

أ- لرسم مخطط قوى القص:

$$V_A = 8 \text{ kN}$$

$$V_{BL} = V_{BR} = -2(4) + 8 = 0.0$$

$$V_C = 0.0$$

ب- لرسم مخطط عزم الانحناء:

$$M_A = 0.0$$

$$M_B = \frac{1}{2}(4)(8) + 0.0 = 16 \text{ kN.m}$$

$$M_C = 0.0 + 16 = 16 \text{ kN.m}$$

من خلال معرفتنا بقيمة قوة القص على مسافة ($X=2m$) من نقطة A - يمكن التعرف على قيمة العزم عند هذا الموضع من المنشأ . بالرجوع إلى مخطط قوى القص ومن النسبة والتناسب

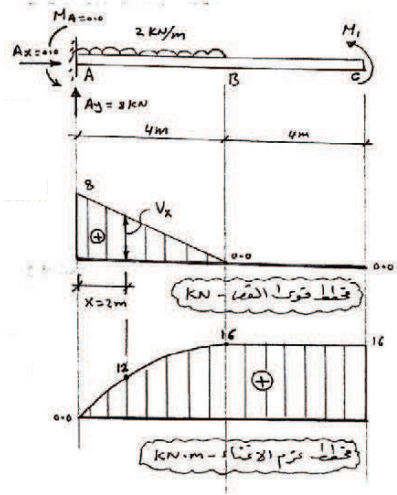
$$\frac{8}{4} = \frac{V_x}{(4-2)} \Rightarrow V_x = 4 \text{ kN}$$

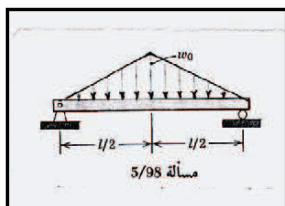
فإن:-

مساحة القص (والتي هي عبارة عن شبه منحرف) ضمن المسافة X هي تمثل قيمة العزم

(M_x) بمعنى:-

$$M_x = \frac{1}{2}(8+4)(2) = 12 \text{ kN.m}$$





5/98 ارسم مخططات القص والعزم لمنشأ بسيط

محمل بشكل خطي كما هو موضح، ثم عين

القيم العظمى M لعزم الانحناء.

الحل:

يمكن إيجاد قيم ردود الأفعال من خلال تطبيق

معادلات الاتزان أو يمكن القول من التماثل محصلة

التحميل تتوزع مناصفة بين المسندين (C, A):

$$A_y = C_y = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \ell \cdot w_0 \right) = \frac{w_0 \ell}{4}$$

أ- لرسم مخطط قوى القص:

$$V_A = \frac{w_0 \ell}{4}$$

$$V_{BL} = V_{BR} = -\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot w_0\right) + \frac{w_0 \ell}{4} = 0.0$$

$$V_C = -\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot w_0\right) + 0.0 = \frac{-w_0 \ell}{4}$$

ب- لرسم مخطط عزم الانحناء:

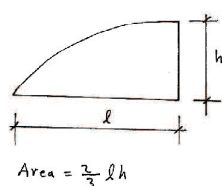
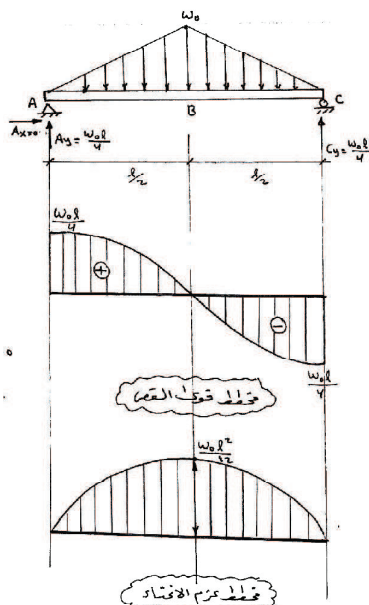
$$M_A = 0.0$$

العزم عند B - يساوي مساحة القص ضمن

القطاع AB مضاف له قيمة القص عند بداية

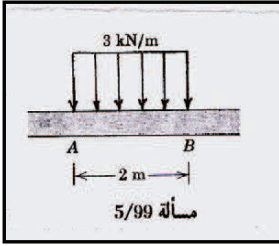
القطاع. قانون مساحة القص ضمن القطاع AB

مبين في الشكل المجاور.

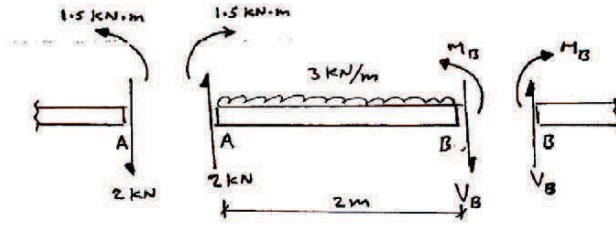


$$M_B = \frac{2}{3} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{w_0 \ell}{4} + 0.0 = \frac{w_0 \ell^2}{12} \quad (\text{أكبر عزم})$$

$$M_C = -\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{w_0 \ell}{4}\right) + \frac{w_0 \ell^2}{12} = 0.0$$



5/99 يحمل منشأ حلاً موزعاً شدته ثابتة
 $w = 3 \text{ kN/m}$ بين A و B كما هو موضح فإذا كانت
 قوة القص وعزم الانحناء عند النقطة A هما $+2 \text{ kN}$ و
 1.5 kN.m على التوالي. احسب قوة القص وعزم
 الانحناء عند النقطة B.



الحل:

الشكل المجاور يمثل حالة قطع وتفكيك المنشأ عند الموضعين (A, B). وبعد وضع الاتجاهات الموجبة لقوى القص وعزم الانحناء المتعارف عليها في العديد من المصادر العلمية ، وتطبيق معادلات الاتزان على القطاع AB ، يكون:

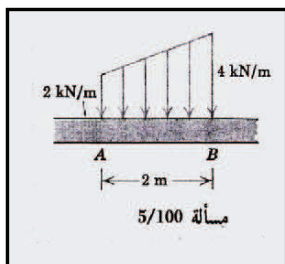
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$2 - 3(2) - V_B = 0 \Rightarrow V_B = -4 \text{ kN}$$

$$\curvearrowright + \Sigma M_B = 0.0$$

$$M_B + 3(2)\left(\frac{2}{2}\right) - 2(2) - 1.5 = 0 \Rightarrow M_B = -0.5 \text{ kN.m}$$

القص السالب والعزم السالب يعني أن اتجاه قوة القص وعزم الانحناء عند الموضع B - بعكس ما هو مشار إليه في المخطط أعلاه.



5/100 يزداد الحمل الموزع خطياً من 2kN/m

إلى 4 kN/m في مسافة مترين على امتداد

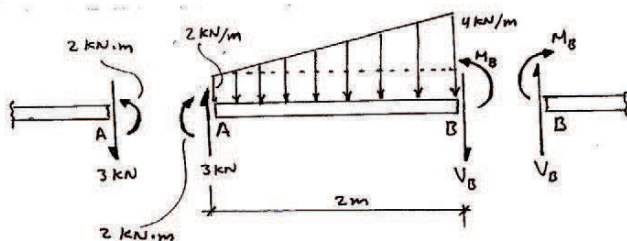
منشأ متوازن.

فإذا كانت قوة القص وعزوم الانحناء عند

المقطع A هي 3 kN و 2 kN.m على

التتالي. أوجد قوة القص وعزم الانحناء عند

النقطة B.



الحل:

بالاستفادة من فكرة حل المسألة 5/99 وبمعرفة مساحة شبه المنحرف ، فإن:-

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$3 - \left[\frac{1}{2} (2 + 4) (2) \right] - V_B = 0.0 \quad \Rightarrow \quad V_B = -3 \text{ kN}$$

لاحظ تم التعامل مع التحميل كما لو كان شبه منحرف (مساحته) = $\frac{1}{2}$ مجموع القاعدتين $\times$ الارتفاع).

إيجاد مساحة يعني إيجاد محصلة التحميل.

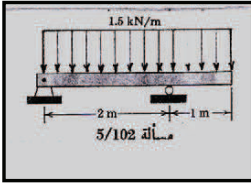
لغرض حساب العزم M_B ولعدم معرفة موضع محصلة التحميل لشبه المنحرف (لغرض حساب

ذراعها)، لذا من الأفضل تقسيم التحميل إلى مستطيل ومثلث.

$$\curvearrowright + \Sigma M_B = 0$$

$$M_B + 2(2)\left(\frac{2}{2}\right) + \frac{1}{2}(2)(2)\left(\frac{1}{3} * 2\right) - 3(2) - 2 = 0.0$$

$$M_B = 2.67 \text{ kN.m}$$



5/102 ارسم مخططات القص والعزوم للمنشأ
الموضح، ثم عين المسافة b، المقاسة من
الطرف الأيسر إلى النقطة التي يكون عندها
عزم الانحناء مساوياً للصفر فيما بين
المسندين.

الحل:

$$\sum M_A = 0$$

$$B_y(2) - 1.5(3)\left(\frac{3}{2}\right) = 0.0$$

$$B_y = 3.375 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y - 1.5(3) + 3.375 = 0$$

$$A_y = 1.125 \text{ kN}$$

أ- لرسم مخطط قوى القص:

$$V_A = 1.125 \text{ kN}$$

$$V_{BL} = -1.5(2) + 1.125 = -1.875 \text{ kN}$$

$$V_{BR} = 3.375 - 1.875 = 1.5 \text{ kN}$$

$$V_C = -1.5(1) + 1.5 \text{ kN} = 0.0$$

لمعرفة موضع نقطة D - التي يكون عندها

القص صفراً فإن:-

$$\frac{1.125}{x} = \frac{1.875}{(2-x)} \Rightarrow x = 0.75 \text{ m}$$

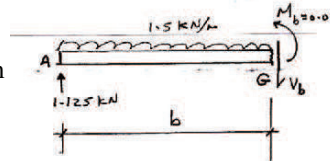
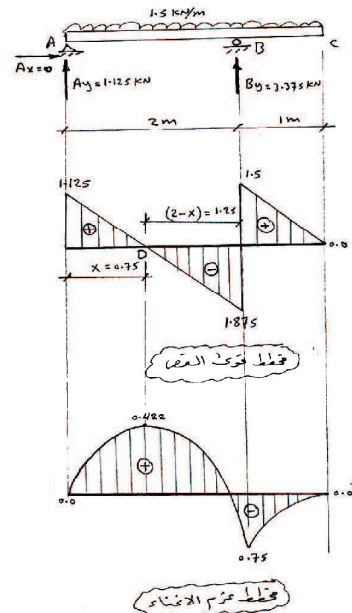
ب- لرسم مخطط عزم الانحناء:

$$M_A = 0.0$$

$$M_D = \frac{1}{2}(0.75)(1.125) + 0.0 = 0.422 \text{ kN.m}$$

$$M_B = -\frac{1}{2}(1.25)(1.875) + 0.422 = -0.75 \text{ kN.m}$$

$$M_C = \frac{1}{2}(1.5)(1) - 0.75 = 0.0$$

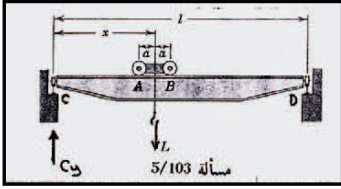


للتعرف على المسافة - b التي يكون عنده العزم صفراً نقتطع جزء المنشأ بين المسنديين (B, A) كما هو عليه في الشكل المجاور.

$$\sum M_G = 0$$

$$-1.125(b) + 1.5(b)\left(\frac{b}{2}\right) = 0.0$$

$$0.75b^2 = 1.5b \Rightarrow \boxed{b = 1.5 \text{ m}}$$



5/103 عين عزم الانحناء الأعظم M والقيمة
المقابلة لـ x لمنشأ يحمل رافعة . ثم بين أين
يؤثر هذا العزم.

$$\sum M_D = 0$$

$$-C_y(\ell) + L(\ell - x) = 0.0$$

$$C_y = L(1 - \frac{x}{\ell})$$

يقطع المنشأ عند نقطة A - وحساب العزم:

$$\sum M_A = 0.0$$

$$M - L(1 - \frac{x}{\ell})(x - a) = 0$$

$$M = L(1 - \frac{x}{\ell})(x - a) \quad \text{-----(1)}$$

وبعد مفاضلة M بالنسبة إلى x للحصول على

النهاية العظمى للدالة في المعادلة (1) يكون:-

$$M = L(x - \frac{x^2}{\ell} - a + \frac{xa}{\ell})$$

$$\frac{dM}{dx} = L(1 - \frac{2x}{\ell} + \frac{a}{\ell}) = 0.0$$

$$x = \frac{\ell}{2}(1 + \frac{a}{\ell})$$

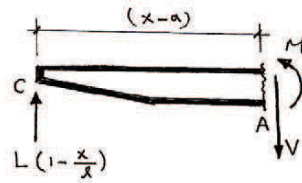
$$x = \frac{\ell}{2} + \frac{a}{2} = \frac{1}{2}(\ell + a)$$

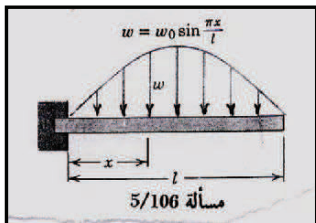
وبتعويض قيمة X - التي يكون عندها العزم أكبر ما يمكن في المعادلة (1) ، نحصل على قيمة

$$M = L(1 - \frac{\ell + a}{2\ell})(\frac{\ell + a}{2} - a)$$

$$M = L(\frac{2\ell - \ell - a}{2\ell})(\frac{\ell + a - 2a}{2})$$

$$M = \frac{L}{4\ell}(\ell - a)(\ell - a) = \frac{L}{4\ell}(\ell - a)^2$$





5/106 يحمل المنشأ المثبت من أحد طرفيه
الحمل الذي على شكل نصف موجة جيبية
 $w = w_0 \sin(\pi x / \ell)$ بوحدة الطول . عين
عزم الانحناء M بدلالة X.

الحل:

بمراجعة كتاب مريام صفحة 214 نجد أن تفاضل العزم - M بالنسبة إلى المسافة - X يعني إيجاد
قوة القص V، أي: -

$$M' = \frac{dM}{dx} = V$$

في حين لو كان التحميل W فإن التفاضل الثاني للعزم:

$$M'' = \frac{d^2M}{dx^2} = -w$$

ومن خلال تكاملين يمكن الحصول على العزم M تبعاً لما يأتي:-

$$M'' = -w_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

$$M' = -\frac{w_0 \ell}{\pi} \left(-\cos \frac{\pi x}{\ell}\right) + c_1$$

$$M' = \frac{w_0 \ell}{\pi} \cos \frac{\pi x}{\ell} + c_1 \text{ ----- (1)}$$

أحد الشروط الحدية (Boundary condition) هي عندما $x = \ell$ فإن $(M' = \frac{dM}{dx} = V = 0.0)$

وبالتالي:-

$$0.0 = \frac{w_0 \ell}{\pi} \cos \frac{\pi \ell}{\ell} + c_1$$

$$0.0 = \frac{w_0 \ell}{\pi} (-1) + c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{w_0 \ell}{\pi}$$

وبتعويض قيمة c_1 في المعادلة (1) وتكاملها مرة ثانية يكون:-

$$M' = \frac{w_0 \ell}{\pi} \cos \frac{\pi x}{\ell} + \frac{w_0 \ell}{\pi}$$

$$M = \frac{w_0 \ell}{\pi} \left(\frac{\ell}{\pi} \sin \frac{\pi x}{\ell}\right) + \frac{w_0 \ell}{\pi} x + c_2 \text{ ----- (2)}$$

من الشروط الحدية الأخرى هي عندما $x = \ell$ فإن $M = 0.0$ وبالتالي:-

$$0 = \frac{w_o \ell}{\pi} \left(-\frac{\ell}{\pi} \sin \frac{\pi \ell}{\ell} \right) + \frac{w_o \ell}{\pi} \ell + c_2 \Rightarrow c_2 = -\frac{w_o \ell^2}{\pi}$$

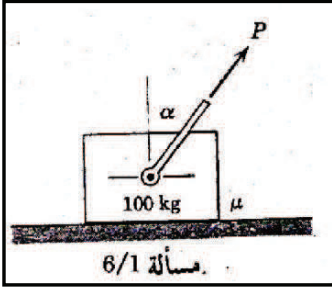
وبتعويض قيمة C_2 في المعادلة (2) نحصل على معادلة العزم المطلوبة:

$$M = \frac{w_o \ell}{\pi} \left(-\frac{\ell}{\pi} \sin \frac{\pi x}{\ell} \right) + \frac{w_o \ell}{\pi} x - \frac{w_o \ell^2}{\pi}$$

$$M = \frac{w_o \ell}{\pi} \left(-\frac{\ell}{\pi} \sin \frac{\pi x}{\ell} + x - \ell \right)$$

الفصل الخامس عشر

حلول مسائل
قوة الاحتكاك

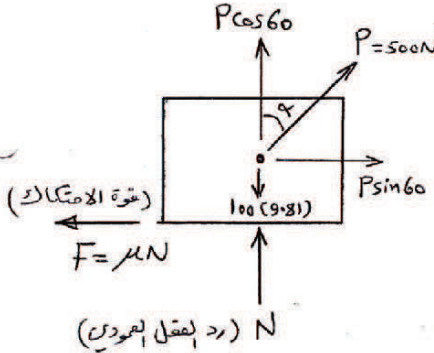


6/1 وضعت الكتلة 100 kg في حالة سكون على المستوى الأفقي وأثرت عليها قوة P بحيث يمكن تغيير اتجاه هذه القوة. فإذا كانت $P=500N$ وكانت الكتلة على وشك الحركة عندما أصبحت الزاوية $\alpha = 60^\circ$ فأحسب معامل الاحتكاك الساكن بين الكتلة والمستوى.

الحل:

عندما يكون الجسم على وشك الحركة فمعنى هذا أن قوة الاحتكاك (F) قد وصلت إلى قيمتها القصوى والتي هي عبارة عن حاصل ضرب معامل الاحتكاك (μ) في رد الفعل العمودي (N) بمعنى ($F=\mu N$).

للتعرف على قوى الفعل ورد الفعل المؤثرة على الكتلة ، من الضروري رسم مخطط الجسم الحر الموضح في الشكل المجاور .



$$\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$N + 500 \cos 60 - 100 (9.81) = 0$$

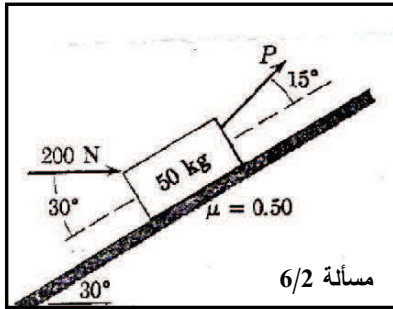
$$N = 731 \text{ New.}$$

ملاحظة: وحدة القوة نيوتن سيتم الإشارة لها بـ (New) تمييزاً عن الرمز المستخدم في الإشارة إلى رد الفعل العمودي (N).

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$500 \sin 60 - \mu (731) = 0$$

$$\mu = 0.592$$

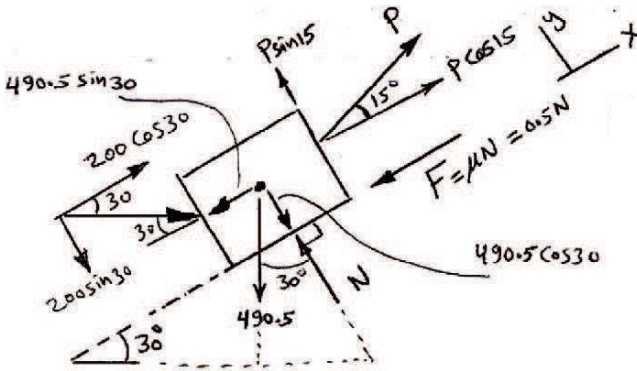


6/2 احسب القوة P اللازمة لجعل الكتلة 50 kg على وشك الحركة إلى أعلى المستوى المائل بزاوية 30° .

الحل:

$$W = 50 (9.81) = 490.5 \text{ New (وزن الكتلة)}$$

في مثل هذه المسائل يفضل تحليل القوى إلى مركبات باتجاه السطح المائل وعمودية على السطح المائل.



$$\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$200 \cos 30 - 490.5 \sin 30 + P \cos 15 - 0.5 N = 0.0$$

$$P \cos 15 - 0.5 N = 72 \dots\dots\dots (1)$$

$$\uparrow \Sigma F_y = 0$$

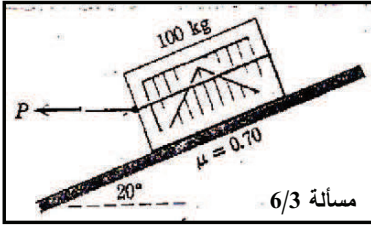
$$N - 200 \sin 30 - 490.5 \cos 30 + P \sin 15 = 0$$

$$P \sin 15 + N = 524.78 \dots\dots\dots (2)$$

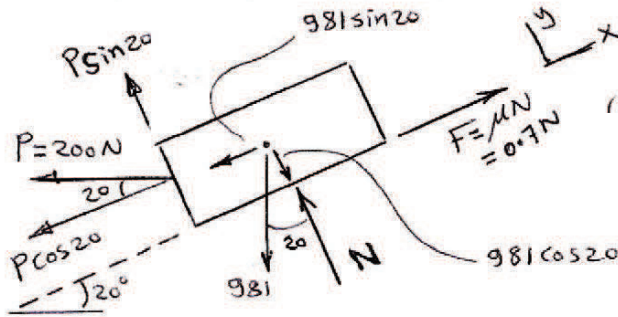
وبحل المعادلتين (1) ، (2) نحصل على قيم:-

$$P = 305.3 \text{ New}$$

$$N = 445.7 \text{ New}$$



6/3 أثرة قوة أفقية $P=200\text{ N}$ على صندوق خشبي كتلته 100 kg في محاولة لزلزلاته أسفل المستوى المائل. فإذا كان معامل الاحتكاك بين الصندوق والمستوى المائل يساوي 0.70 فأحسب قوة الاحتكاك F على الصندوق.



$$W = 100 (9.81) = 981 \text{ New (وزن الكتلة)}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$F - 981 \sin 20 - 200 \cos 20 = 0.0$$

$$F = 523 \text{ New}$$

وللتعرف على القيمة القصوى للاحتكاك ($F = \mu N$) فأن:-

$$\nearrow \Sigma F_y = 0$$

$$N - 981 \cos 20 + 200 \sin 20 = 0$$

$$N = 853.4 \text{ New}$$

$$F = \mu N = 0.7 (853.4) = 597.4 \text{ New}$$

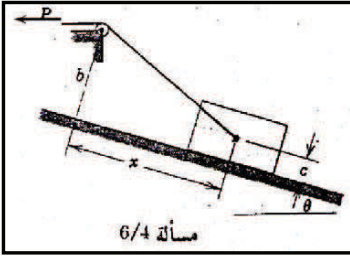
وبما أن ($F = 523 \text{ New}$) هي أقل من قيمة الاحتكاك القصوى (597.4 New) ، إذاً.

الصندوق يعتبر متزن ولكنه ليس على وشك الحركة أو ليس عند بدئ الانزلاق . فإذا كانت:-

$$1- F < \mu N \text{ يعتبر الجسم متزن.}$$

$$2- F = \mu N \text{ الجسم متزن ولكنه على وشك الحركة أي في حالة حرجة.}$$

$$3- F > \mu N \text{ الجسم غير متزن.}$$



6/4 إذا كان معامل الاحتكاك بين الكتلة والمستوى المائل هو μ فأحسب قيمة x بحيث يمكن لأصغر قيمة للقوة P أن تبدأ الحركة إلى أعلى المستوى . أهمل نصف قطر البكرة.

الحل: على افتراض إهمال كتلة الجسم:-

$$\Sigma F_x = 0$$

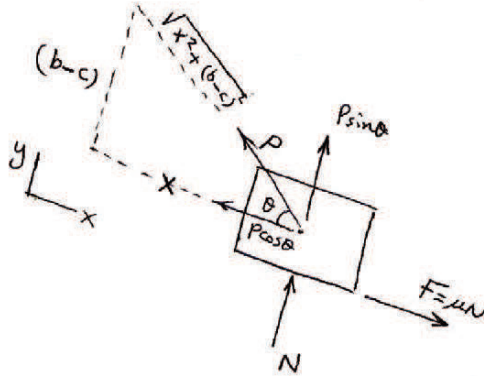
$$P \cos \theta = \mu N$$

$$P \frac{x}{\sqrt{x^2 + (b-c)^2}} = \mu N \quad \dots\dots(1)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$N + P \sin \theta = 0$$

$$N + P \frac{b-c}{\sqrt{x^2 + (b-c)^2}} = 0 \quad \dots\dots(2)$$

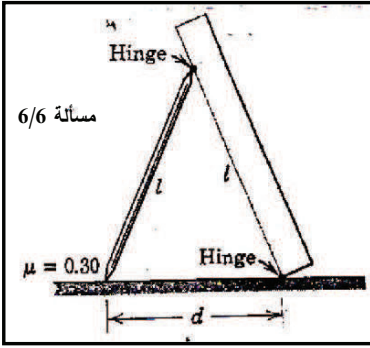


وبتعويض (1) في (2) ينتج:-

$$\frac{Px}{\mu \sqrt{x^2 + (b-c)^2}} + \frac{P(b-c)}{\sqrt{x^2 + (b-c)^2}} = 0.0$$

$$\frac{P}{\sqrt{x^2 + (b-c)^2}} \left(\frac{x}{\mu} + b-c \right) = 0$$

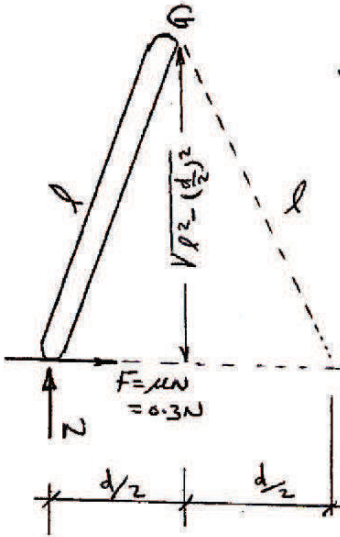
$$\frac{x}{\mu} = c-b \Rightarrow \boxed{x = \mu (c-b)}$$



6/6 أوجد أكبر قيمة للمسافة d بدلالة ℓ بحيث يمكن وضع الطرف السفلي للقضيب ليسند اللوح الثقيل المثبت بمفصل عند طرفه دون انزلاق . أهمل كتلة القضيب واعتبر أن معامل الاحتكاك يساوي 0.30.

الحل:

أكبر قيمة للمسافة d هي عندما يصل الاحتكاك إلى قيمته القصوى (μN) .



$$+\Sigma M_G = 0$$

$$0.3N \left(\sqrt{\ell^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} \right) = N \left(\frac{d}{2} \right)$$

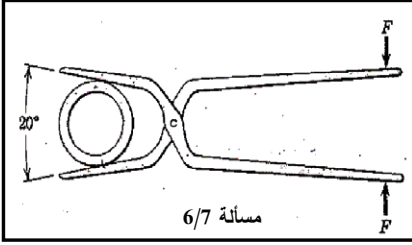
$$\sqrt{\ell^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{d}{2(0.3)}$$

$$\ell^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{0.6^2}$$

$$\ell^2 = \frac{d^2}{0.6^2} + \frac{d^2}{4}$$

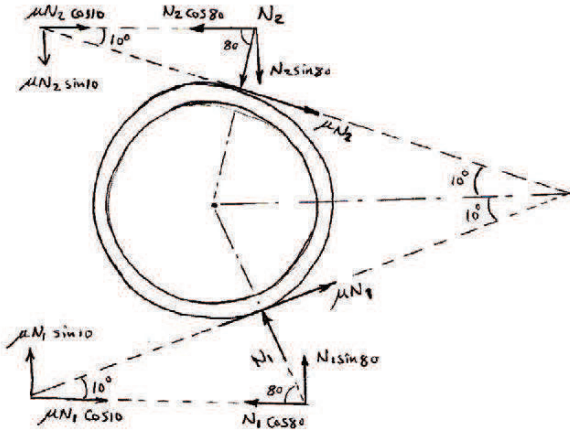
$$\ell^2 = 3.027d^2$$

$$d = 0.57\ell$$



6/7 يستخدم ملقط للامساك بأنابيب من الصلب حارة يتم تسخينها في حمام زيتي. فإذا كانت زاوية الفك تساوي 20°. فما هي أصغر قيمة لمعامل الاحتكاك بين فكي الملقط والأنبوب تسمح بامساك الأنبوب دون انزلاق.

الحل:



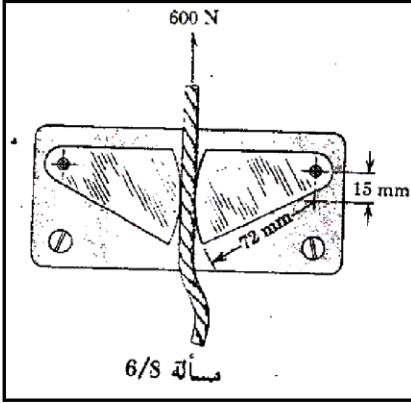
بما أن القوى F متساوية فإن ردود الأفعال العمودي $N_1 = N_2$ وبالتالي:-

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$\mu N_1 \cos 10^\circ + \mu N_2 \cos 10^\circ = N_1 \cos 80^\circ + N_2 \cos 80^\circ$$

$$\mu (2N_1 \cos 10^\circ) = 2N_1 \cos 80^\circ$$

$$\mu = \frac{\cos 80^\circ}{\cos 10^\circ} = 0.176$$

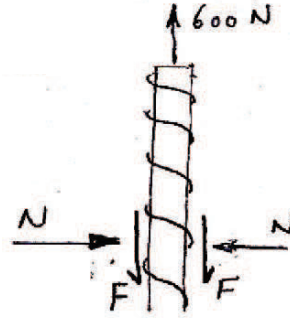


6/8 تمسك القامطة بحبل تحت الشد بفعل تأثير قوى الاحتكاك. أوجد في الوضع الموضح بالشكل أصغر قيمة لمعامل الاحتكاك بين الحبل وسطحي العقدتين بحيث تصبح القامطة ذاتية القفل. أوجد أيضاً قيمة رد الفعل R على كل من مضجعي العقدتين .

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

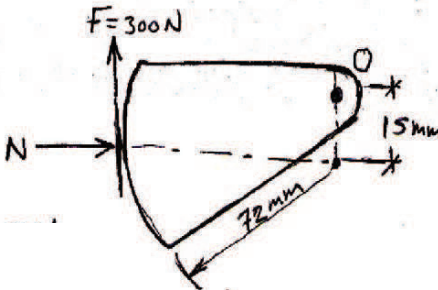
$$2F = 600$$

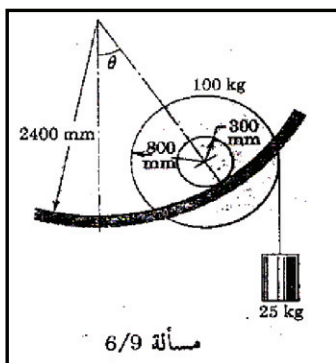
$$F = 300 \text{ N}$$



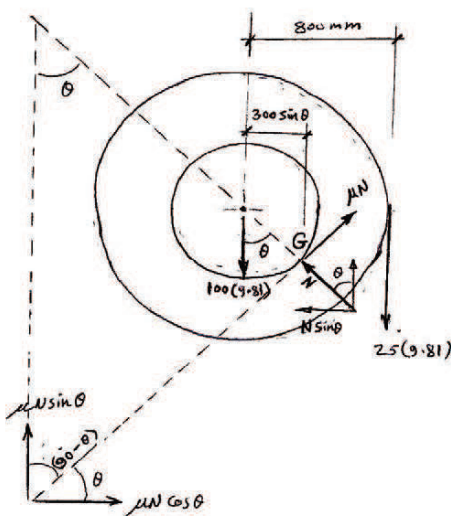
$$+\Sigma M_0 = 0$$

$$300 (72) = N (15) \Rightarrow N = 1440 \text{ New}$$





6/9 تتدحرج العجلة ذات الكتلة 100kg على صررتها إلى أعلى المستوى الدائري تحت تأثير الوزن 25kg المتصل بها بواسطة خيط ملفوف حول حافتها فإذا كان الاحتكاك كافياً لمنع الانزلاق فأوجد الزاوية θ التي تتوقف العجلة عندها ثم أوجد أصغر قيمة لمعامل الاحتكاك تسمح بالوصول لهذا الوضع دون انزلاق. الحل:



$$\rightarrow + \Sigma M_G = 0$$

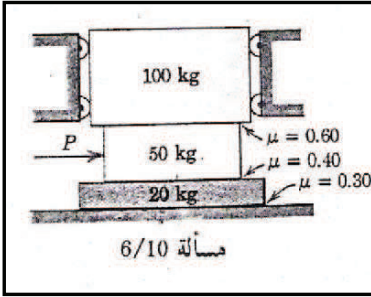
$$- 25 (9.81) (800 - 300 \sin \theta) + 100 (9.81) (300 \sin \theta) = 0.0$$

$$\theta = 32^\circ$$

$$\rightarrow + \Sigma F_x = 0$$

$$\mu N \cos 32.2 = N \sin 32.2$$

$$\mu = \tan 32.2 = 0.62$$



6/10 أوجد القوة الأفقية P اللازمة لأحداث انزلاق وشيك علماً بأن معامل الاحتكاك لكل من السطوح المتلامسة موضح في الشكل وأن الكتلة العليا يمكنها التحرك إلى الأعلى.

الحل:

المطلوب في المسألة قيمة (P) بما يجعل كل الكتل في حالة إتزان.

في الكتلة العليا:-

$$N_1 = 100(9.81) = 981 \text{ (New)}$$

$$F_1 = \mu N_1 = 0.6 (981) = 588.6 \text{ New}$$

في الكتلة الوسطى:-

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$N_2 - 50 (9.81) - 981 = 0$$

$$N_2 = 1471.5 \text{ New}$$

$$F_2 = \mu N_2 = 0.4 (1471.5) = 588.6 \text{ New}$$

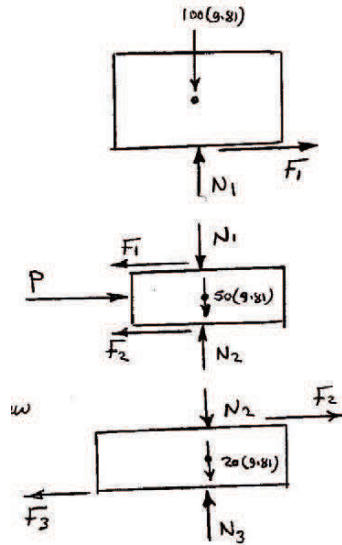
في الكتلة السفلى:-

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$N_3 - 20 (9.81) - 1471.5 = 0$$

$$N_3 = 1667.7 \text{ New}$$

$$F_3 = \mu N_3 = 0.3 (1667.7) = 500.31 \text{ New}$$



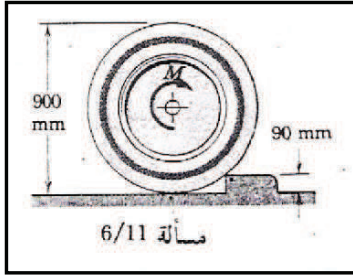
لاحظ ان اقصى قيمة لقوة الاحتكاك بين الكتلة السفلى والأرضية هي بمقدار (500.31 New) في حين أن قوة الاحتكاك اللازمة لاتزان هذه الكتلة هي (588.6 New) . لذا ولغرض إتزان المجموعة يجب أن نكون:

$$F_3 = F_2 = 500.31 \text{ New}$$

وعلى هذا الأساس وبتطبيق قانون نيوتن ($\Sigma F_x = 0$) على الكتلة الوسطى يكون:-

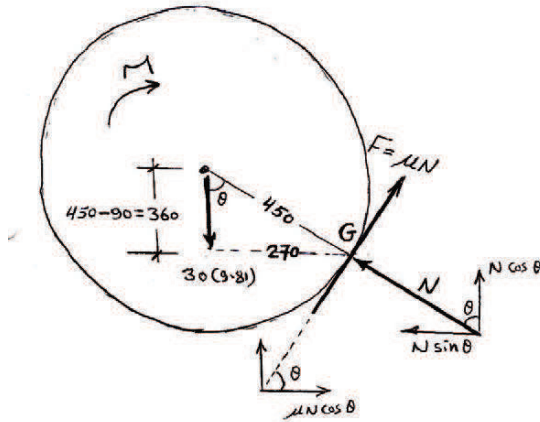
$$P - 500.31 - 588.6 = 0 \Rightarrow P = 1089 \text{ New}$$

لزيادة المعرفة في حل السؤال، حاول مراجعة مثال 6/5 من كتاب (ج. ل. ميريام).



6/11 أوجد عزم الازدواج M اللازم لدحرجة عجلة فوق عقبة ارتفاعها 90 mm عن المستوى الأفقي علماً بأن قطر العجلة 900 mm وكتلتها 30 kg ثم أحسب أصغر قيمة لمعامل الاحتكاك بين العجلة والعقبة لمنع انزلاق العجلة.

الحل:



$$\cos \theta = \frac{360}{450}$$

$$\theta = 36.87^\circ$$

$$\sum M_G = 0$$

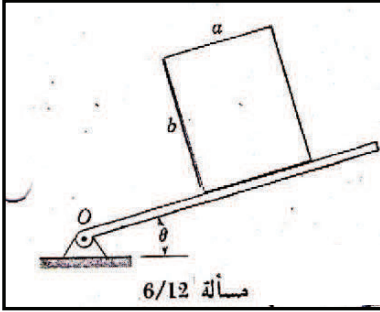
$$30 (9.81) (270) - M = 0.0$$

$$M = 79461 \text{ New}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$\mu N \cos 36.87 - N \sin 36.87 = 0$$

$$\mu = \tan 36.87 = 0.75$$

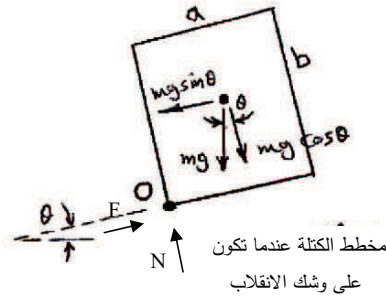


6/12 وضعت كتلة m في حالة سكون على مستوى مائل مثبت في مفصل يدور حول محور أفقي عند النقطة O . فإذا كان معامل الاحتكاك الساكن بين الكتلة والمستوى هو μ فبين الشروط التي تحدد ما إذا كانت الكتلة ستقلب قبل أن تنزلق أو تنزلق قبل أن تنقلب إذا زادت قيمة الزاوية θ تدريجياً.

الحل:

عندما يكون الجسم على وشك الانقلاب فإن القوى F, N تتركزان عند نقطة O .

$$\begin{aligned} \sum M_O &= 0 \\ -mg \cos \theta \left(\frac{a}{2}\right) + mg \sin \theta \left(\frac{b}{2}\right) &= 0 \\ \frac{a}{b} &= \tan \theta \\ \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{a}{b}\right) \end{aligned}$$



عندما يكون الجسم على وشك الانزلاق:-

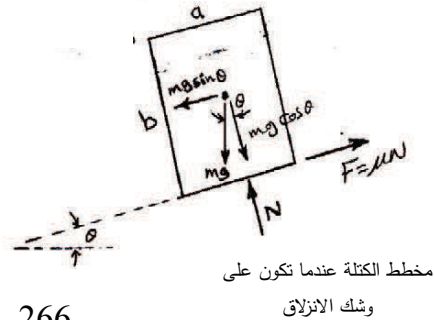
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg \cos \theta \dots\dots\dots(1)$$

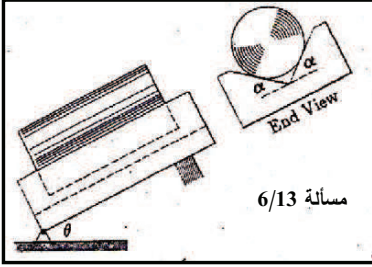
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \mu N = mg \sin \theta \dots\dots\dots(2)$$

ويقسم (2) في (1) ينتج:-

$$\theta = \tan^{-1} \mu$$

من هنا يتضح أن الزاوية θ التي يكون بها الجسم على وشك الانزلاق هي $(\theta = \tan^{-1} \mu)$ بينما الزاوية التي يكون بها الجسم على وشك الانقلاب هي $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{a}{b}\right)$.

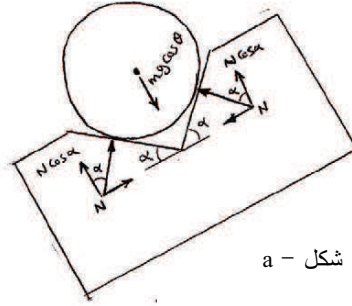
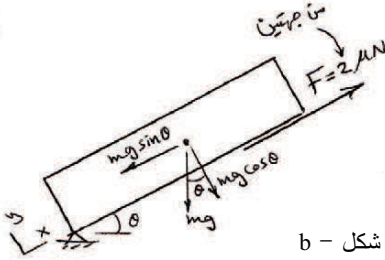




6/13 أوجد أكبر قيمة للزاوية θ التي يمكن أن تميل بها على الأفقي قبل أن تبدأ الأسطوانة المتماثلة في الانزلاق علماً بأن معامل الاحتكاك هو μ .



الحل:

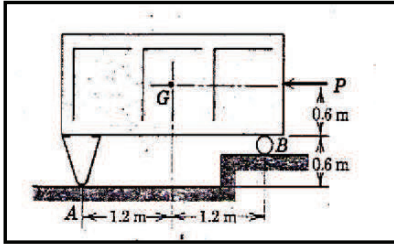


في الشكل - b:

$$\begin{aligned}
 +\nearrow \Sigma F_x &= 0 \\
 2\mu N &= mg \sin \theta \\
 2\mu \left(\frac{mg \cos \theta}{2 \cos \alpha} \right) &= mg \sin \theta \\
 \frac{\mu}{\cos \alpha} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\
 \tan \theta &= \frac{\mu}{\cos \alpha} \\
 \theta &= \tan^{-1}(\mu / \cos \alpha)
 \end{aligned}$$

في الشكل - a:

$$\begin{aligned}
 +\searrow \Sigma F_y &= 0 \\
 mg \cos \theta &= 2N \cos \alpha \\
 N &= \frac{mg \cos \theta}{2 \cos \alpha}
 \end{aligned}$$



مسألة 6/15

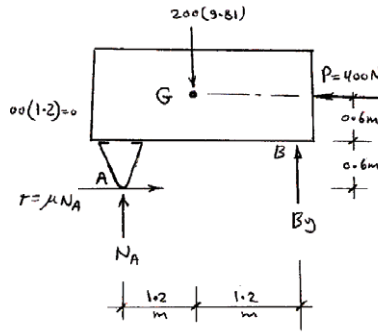
6/15 يرتكز صندوق خشبي كتلته 200 kg ومركز

ثقله G على مزلقة عند A وعلى بكرة عند B .

فإذا كانت القوة كافية لبدء حركة

الصندوق فأوجد معامل الاحتكاك عند A.

الحل:



$$\sum M_A = 0$$

$$B_y (2.4) - 200 (9.81) (1.2) + 400 (1.2) = 0$$

$$B_y = 781 \text{ New}$$

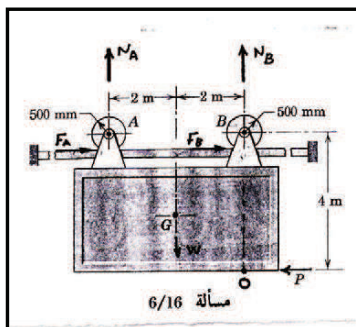
$$\sum F_y = 0$$

$$N_A - 200 (9.81) + 781 = 0$$

$$N_A = 1181 \text{ New}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$\mu(1181) - 400 = 0 \Rightarrow \mu = 0.338$$



6/16 علق لوح كتلته 800 kg ومركز ثقله G على بكرات تسمح بسهولة الحركة في الاتجاه الأفقي على السكة الثابتة . فإذا ثبت مضجع البكرة عند A بحيث لا تستطيع البكرة الدوران. فأحسب قيمة القوة P اللازمة لتحريك اللوح علماً بأن معامل الاحتكاك بين البكرة والسكة هو 0.30.

الحل: كتلة اللوح (w) بمقدار :-

$$W = 800 (9.81) = 7848 \text{ N}$$

قوى الاحتكاك ($F_A = 0.3 N_A$) ، ($F_B = 0.3 N_B$) هي قوى مماسية موضعها بين السكة وحافة البكرات . كذلك فإن ردود الأفعال N_A ، N_B موضعها عند نقطة تماس السكة مع حافة البكرات.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$N_A + N_B - w = 0.0$$

$$N_A + N_B = 7848 \text{ ---- (1)}$$

$$\curvearrowleft \Sigma M_o = 0.0$$

$$7848(2) - F_B(4 - 0.5) - F_A(4 - 0.5) - N_A(4) = 0.0$$

$$7848(2) - 0.3N_B(3.5) - 0.3N_A(3.5) - 4N_A = 0.0$$

$$7848(2) - 0.3(3.5)(N_B + N_A) - 4N_A = 0 \text{ ----- (2)}$$

وبتعويض المعادلة (1) في (2) ينتج: -

$$7848(2) - 0.3(3.5)(7848) - 4N_A = 0$$

$$N_A = 1863.9 \text{ New}$$

وبتعويض قيمة N_A في المعادلة (1) نحصل على:-

$$N_B = 5984.1 \text{ New}$$

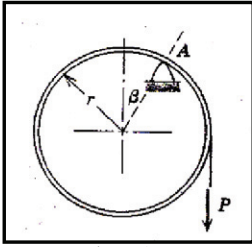
$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$F_A + F_B - P = 0$$

$$0.3N_A + 0.3N_B - P = 0$$

$$0.3(1863.9) + 0.3(5984.1) - P = 0$$

$$P = 2354.4 \text{ New}$$



مسألة 6/17

6/17 علق طوق معدني كتلته m ونصف قطره r من نقطة ارتكاز عند A . فإذا كان معامل الاحتكاك بين الطوق والارتكاز هو μ فأوجد القوى الرأسية P المؤثرة على محيط الطوق اللازمة لانزلاق الطوق على الارتكاز ثم أوجد أيضاً الزاوية β التي يبدأ عندها الانزلاق أهمل سمك الطوق.

الحل:

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$N \sin \beta = \mu N \cos \beta$$

$$\tan \beta = \mu$$

$$\beta = \tan^{-1} \mu$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$-mg - P + N \cos \beta + \mu N \sin \beta = 0 \quad \dots (1)$$

$$(+ \Sigma M_O = 0$$

$$-Pr + \mu N(r) = 0.0 \quad \Rightarrow \quad \mu N = P$$

$$\therefore N = \frac{P}{\mu} \quad \dots \dots (2)$$

وبتعويض (2) في (1) ينتج:-

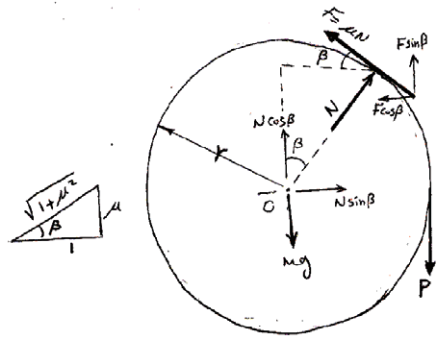
$$-mg - P + \frac{P}{\mu} \cos \beta + \mu \left(\frac{P}{\mu} \right) \sin \beta = 0.0$$

$$P \left(-1 + \frac{\cos \beta}{\mu} + \sin \beta \right) = mg$$

$$P \left(-1 + \frac{1}{\mu \sqrt{1+\mu^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \right) = mg$$

$$P \left(-1 + \frac{1}{\mu \sqrt{1+\mu^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \right) = mg$$

$$P \left(\frac{-\mu \sqrt{1+\mu^2} + 1 + \mu^2}{\mu \sqrt{1+\mu^2}} \right) = mg$$

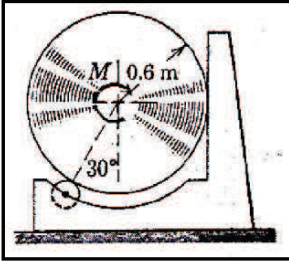


بقسمة بسط ومقام الطرف الأيسر على $\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$ ينتج:-

$$P \left(\frac{-\mu + \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} + \frac{\mu^2}{\sqrt{1+\mu^2}}}{\mu} \right) = mg$$

$$P = \frac{mg\mu}{-\mu + \frac{1+\mu^2}{\sqrt{1+\mu^2}}} = \frac{mg\mu}{-\mu + \frac{\sqrt{1+\mu^2} * \sqrt{1+\mu^2}}{\sqrt{1+\mu^2}}}$$

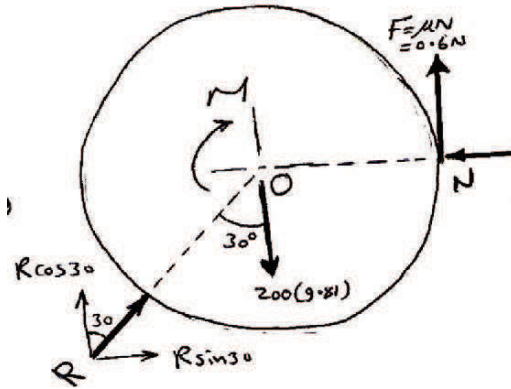
$$\boxed{P = \frac{mg\mu}{-\mu + \sqrt{1+\mu^2}}}$$



مسألة 6/19

6/19 ترتكز أسطوانة كتلتها 200 kg على بكرة تدور بدون احتكاك. فإذا كان معامل الاحتكاك بين الأسطوانة والسطح الرأسي هو 0.6 فأحسب عزم الدوران M اللازم لدوران الأسطوانة. ثم أوجد أيضاً رد الفعل على مضجع البكرة خلال تأثير عزم الدوران M.

الحل:



$$\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$N = R \sin 30 \dots\dots (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$R \cos 30 - 200(9.81) + 0.6N = 0 \dots\dots (2)$$

وبتعويض (1) في قيمة (2) ينتج:-

$$R \cos 30 - 200(9.81) + 0.6(R \sin 30) = 0$$

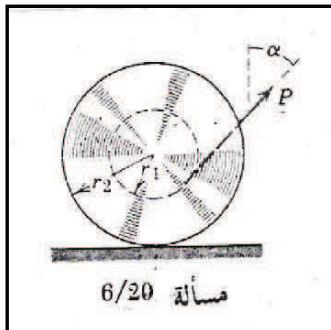
$$R = 1683 \text{ New}$$

وبتعويض قيمة R في المعادلة (1) ينتج:

$$N = 1683 \sin 30 = 841 \text{ New}$$

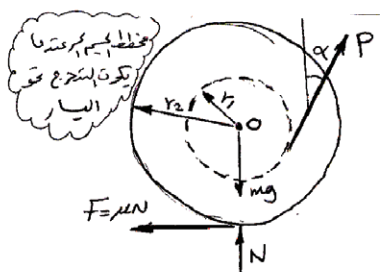
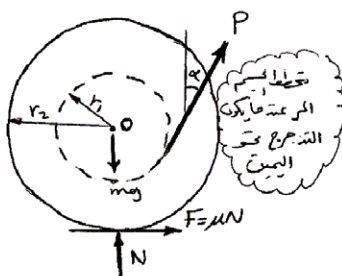
$$\curvearrowleft \Sigma M_o = 0$$

$$-M + 0.6(841)(0.61) = 0 \Rightarrow \boxed{M = 303 \text{ N.m}}$$



6/20 تتدحرج عجلة إلى اليسار عندما تكون زاوية الخيط α صغيرة ولكنها تتدحرج إلى اليمين عندما تصبح كبيرة أوجد ، بعد الرجوع إلى الشكل الهندسي لمخطط الجسم الحر. الزاوية α التي عندها لا تتدحرج العجلة إلى اليمين أو اليسار وإذا كان معامل الاحتكاك μ هو وكتلة العجلة هي m فأوجد قيمة P بحيث لا تستطيع العجلة أن تنزلق عند القيمة الحرجة للزاوية α .

الحل:



بمراجعة مخطط الجسم الحر عندما يكون التدحرج نحو اليسار :

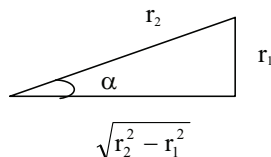
$$\Sigma M_o = 0$$

$$-\mu N(r_2) + P(r_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{Pr_1}{\mu r_2}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\mu N = P \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \mu \left(\frac{Pr_1}{\mu r_2} \right) = P \sin \alpha$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \sin^{-1} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)$$



بمراجعة مخطط الجسم الحر عندما يكون التدحرج نحو اليمين:-

$$\Sigma M_o = 0$$

$$\mu N(r_2) + P(r_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{-Pr_1}{\mu r_2}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\mu N = P \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \mu \left(-\frac{Pr_1}{\mu r_2} \right) = P \sin \alpha$$

$$-\frac{r_1}{r_2} = \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \sin^{-1} \left(-\frac{r_1}{r_2} \right)$$

ولإيجاد قيمة P في الوضع الحرج:-

$$\Sigma F_y = 0$$

$$N + P \cos \alpha - mg = 0$$

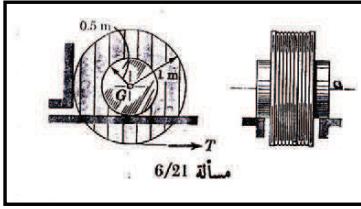
$$N + P \cos \alpha = mg$$

$$\frac{Pr_1}{\mu r_2} + P \left(\frac{\sqrt{r_2^2 - r_1^2}}{r_2} \right) = mg$$

$$P \left(\frac{r_1}{\mu r_2} + \frac{\sqrt{r_2^2 - r_1^2}}{r_2} \right) = mg$$

$$P \left(\frac{r_1 + \mu \sqrt{r_2^2 - r_1^2}}{\mu r_2} \right) = mg$$

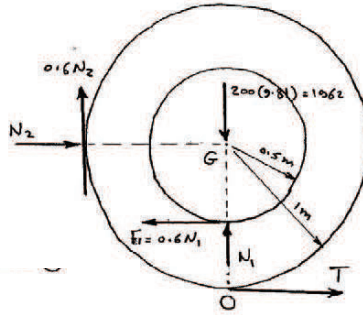
$$P = \frac{\mu r_2 mg}{r_1 + \mu \sqrt{r_2^2 - r_1^2}}$$



6/21 أحسب القوة T اللازمة لدوران بكرة أسلاك هاتف كتلتها 200kg وتستند بصريتها في حالة سكون على المستوى الأفقي وتضجع على جدار رأسي علماً بأن معامل الاحتكاك لكل من السطوح المتلامسة هو 0.6.

الحل:

لاحظ أن ردود الأفعال F_1 , N_1 موجودة على جانبي البكرة بمعنى يوجد $2F_1$, $2N_1$.



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$2N_1 - 1962 + 0.6N_2 = 0.0 \quad \text{--- (1)}$$

$$\left(+ \right) \Sigma M_o = 0.0$$

$$2(0.6N_1)(0.5) - N_2(1) - 0.6N_2(1) = 0.0$$

$$0.6N_1 = 1.6N_2$$

$$N_1 = \frac{1.6}{0.6} N_2 \quad \text{--- (2)}$$

وبتعويض (2) في (1) ينتج:-

$$2\left(\frac{1.6}{0.6} N_2\right) - 1962 + 0.6N_2 = 0.0$$

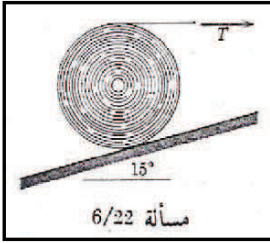
$$N_2 = 330 \text{ New} \quad , \quad N_1 = 880 \text{ New}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0.0$$

$$T - 2(0.6N_1) + N_2 = 0.0$$

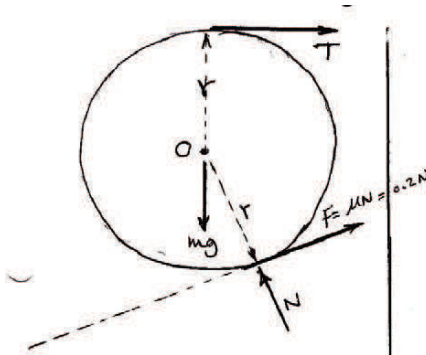
$$T - 2(0.6 * 880) + 330 = 0.0$$

$$T = 726 \text{ New}$$



6/22 تتدحرج لفة ورق ببطء إلى أعلى المستوى المائل تحت تأثير جذب شد T لورق اللفة أفقياً. فإذا كان معامل الاحتكاك بين اللفة والمستوى هو 0.20 برهن هل ستنزلق اللفة أو ستتدحرج دون انزلاق.

الحل:



مخطط الجسم الحر عندما تتدحرج اللفة إلى الأعلى
نفرض نصف قطر اللفة = r

$$(+ \Sigma M_O = 0$$

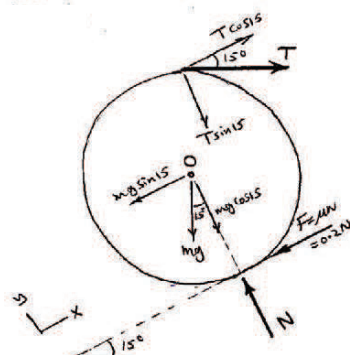
$$0.2N(r) = T(r)$$

$$N = \frac{T}{0.2}$$

$$F = \mu N = 0.2 \left(\frac{T}{0.2} \right) = T$$

قيمة الاحتكاك عندما يحصل

التدحرج.



مخطط الجسم الحر عندما تنزلق اللفة.

$$+ \nearrow \Sigma F_y = 0$$

$$N - mg \cos 15 - T \sin 15 = 0$$

$$N - T \sin 15 = mg \cos 15$$

$$Mg = 1.035 N - 0.268 T \quad \dots (1)$$

$$+ \nearrow \Sigma F_x = 0$$

$$T \cos 15 - mg \sin 15 - 0.2N = 0.0$$

وبتعويض المعادلة (1) في المعادلة الأخيرة:-

$$T \cos 15 - (1.035N - 0.268T) \sin 15 - 0.2N = 0$$

$$1.035T = 1.235 N$$

$$N = 0.838 T$$

$$F = \mu N = 0.2 (0.838T) = 0.16T$$

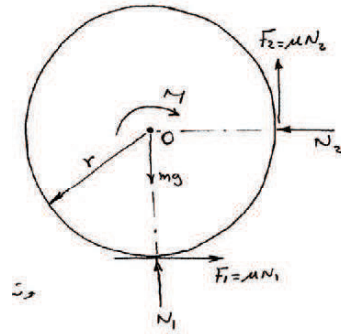
قيمة الاحتكاك عندما يحصل الانزلاق.

وبما أن قوة الاحتكاك القصوى عند الانزلاق هي ($F = 0.16T$) وعند التدحرج ($F = T$) إذا الانزلاق

يحصل قبل حصول التدحرج.



6/24 أوجد عزم الدوران M اللازم لدوران العجلة في موضعها ضد الجدار الرأسي علماً بأن، كتلة العجلة هي m ومعامل الاحتكاك بين كل زوج من السطوح المتلامسة هو μ



$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$\mu N_1 - N_2 = 0$$

$$N_2 = \mu N_1 \text{ ----- (1)}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$N_1 - mg + \mu N_2 = 0.0 \text{ ---- (2)}$$

وبتعويض المعادلة (1) في (2) ينتج:-

$$N_1 - mg + \mu(\mu N_1) = 0$$

$$N_1(1 + \mu^2) = mg$$

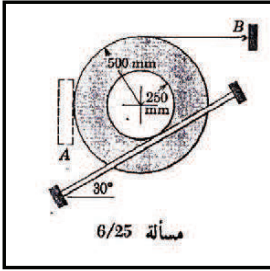
$$N_1 = \frac{mg}{1 + \mu^2}, \quad N_2 = \frac{\mu mg}{1 + \mu^2}$$

$$\curvearrowright + \Sigma M_o = 0.0$$

$$\mu N_1(r) + \mu N_2(r) - M = 0$$

$$M = \mu r \frac{mg}{1 + \mu^2} + \mu r \frac{\mu mg}{1 + \mu^2}$$

$$M = \mu r mg \left(\frac{1 + \mu}{1 + \mu^2} \right)$$



6/25 تستند عجلة كتلتها 50 kg في حالة سكون بصرتها على قضيب مانل وتستند على مركز ثابت عند A ويتصل حبل ملفوف حول محيطها ومتصل أفقياً بالكلاب عند B . فإذا أزيح الارتكاز عند (A) أحسب قيمة قوة الاحتكاك التي تؤثر على العجلة علماً بأن كلاً من معاملي الاحتكاك الساكن والحركي بين صرة العجلة والقضيب هما 0.50 و 0.450 على التوالي.

(ب) ماذا يحدث لو كان معاملا الاحتكاك الساكن والحركي هما 0.30 و 0.25 على التوالي.

الحل:

بالاستفادة من مبادئ عزم الازدواج ، يمكن مكافئة قوة الشد - T إلى قوة وعزم ازدواج عند مركز الدائرة - O ، كما هو مبين في الأشكال المجاورة.

$$\sum M_B = 0.0$$

$$-T(250 \cos 30) - 500T + 490.5 (250 \sin 30) = 0$$

$$T = 85.57 \text{ New}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F \sin 30 + N \sin 60 - 490.5 = 0.0$$

$$F \sin 30 + N \sin 60 = 490.5 \quad \text{-----(1)}$$

$$\sum F_x = 0.0$$

$$F \cos 30 - N \cos 60 + 85.57 = 0.0 \quad \text{-----(2)}$$

وبحل المعادلتين (1) و (2) ينتج:

$$F = 171 \text{ New} , N = 467.57 \text{ New}$$

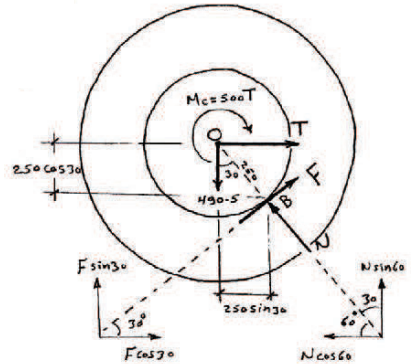
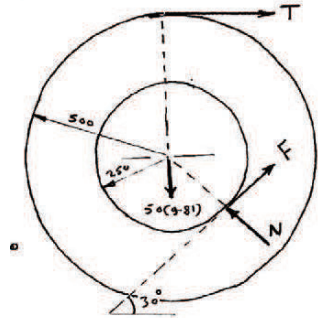
إذا قيمة قوى الاحتكاك اللازمة لاتزان العجلة

هي (171 New) في الوقت الذي نجد فيه أن

أقصى قوة احتكاك مقاومة عندما $\mu = 0.5$

هي:-

$$F = \mu N = 0.5(467.57) = 234 \text{ New}$$

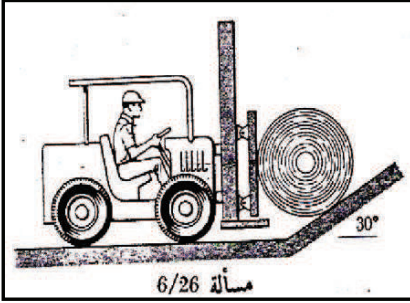


إذاً في هذه الحالة يعتبر الجسم متزن وقيمة قوة الاحتكاك بمقدار (171 New).
أما في الحالة (ب) فإن أقصى قوة احتكاك مقاومة عندما $\mu = 0.3$ هي:-

$$F = \mu N = 0.3(467.57) = 140 \text{ New}$$

وهذه أقل من قوة الاحتكاك اللازمة للتوازن، بمعنى في هذه الحالة ستنحرف العجلة وتصبح قوة الاحتكاك مساوية إلى :-

$$F = \mu N = 0.25(467.57) = 117 \text{ New}$$



6/26 تستعمل شاحنة لنقل لفة ورق كتلتها 1200 kg إلى أعلى مستوى مائل بزاوية 30°. فإذا كان معامل الاحتكاك بين اللفة والحاجز الرأسي للشاحنة وبين اللفة والمستوى المائل هما معاً 0.40 فأحسب قوة الجر اللازمة P بين إطارات الشاحنة والمستوى الأفقي.

الحل:

نفرض نصف قطر اللفة = r

$$\sum M_0 = 0$$

$$0.4 N_1 (r) = 0.4 N_2 (r)$$

$$N_1 = N_2 \dots\dots\dots(1)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-0.4 N_1 - 1200 (9.81) + N_2 \sin 60 - 0.4 N_2 \sin 30 = 0.0$$

بتعويض المعادلة (1) في المعادلة الأخيرة:-

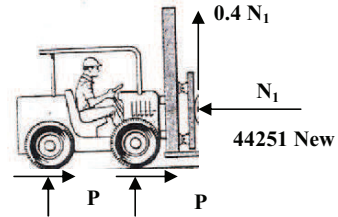
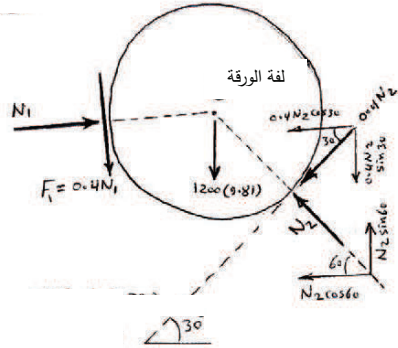
$$N_1 = 44251 \text{ New}$$

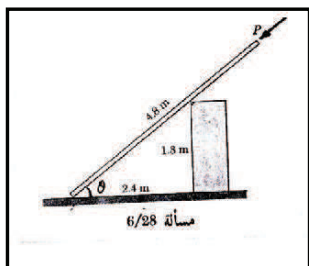
بالنسبة للشاحنة :-

$$\sum F_x = 0$$

$$2P = 44251$$

$$P = 22125 \text{ N} = 22.1 \text{ kN}$$





6/28 أحسب القوة P اللازمة لتحريك لوح خشب كتلته 50kg من حالة السكون كما هو موضح في الشكل علماً بأن معامل الاحتكاك عند نقاط التلامس هو 0.50.

الحل:

$$\curvearrowleft + \Sigma M_G = 0.0$$

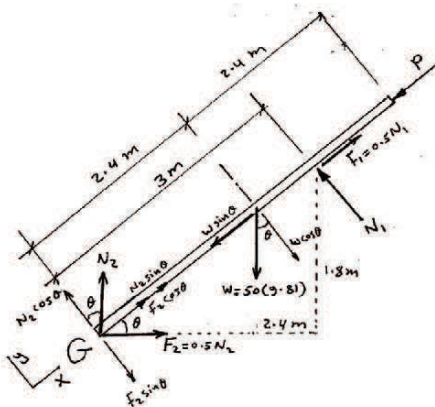
$$- w \cos \theta (2.4) + N_1 (3) = 0.0$$

$$- 50(9.81) \left(\frac{2.4}{3} \right) (2.4) + 3N_1 = 0.0$$

$$N_1 = 313.92 \text{ New}$$

بعد تحليل القوى إلى مركباتها باتجاه اللوح الخشبي والاتجاه العمودي عليه، أي طبقاً للمحورين (y, x) المبين في الشكل المجاور

= يكون.



$$+ \nearrow \Sigma F_y = 0$$

$$N_2 \cos \theta - F_2 \sin \theta - w \cos \theta + N_1 = 0.0$$

$$N_2 \left(\frac{2.4}{3} \right) - 0.5N_2 \left(\frac{1.8}{3} \right) - 50(9.81) \left(\frac{2.4}{3} \right) + 313.92 = 0.0$$

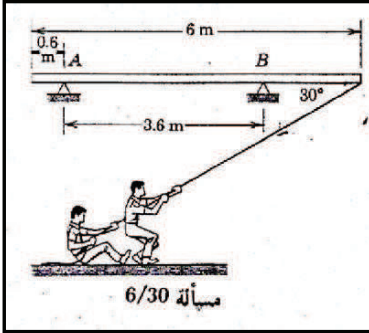
$$N_2 = 156.96 \text{ New}$$

$$+ \nearrow \Sigma F_x = 0$$

$$N_2 \sin \theta - F_2 \cos \theta + w \sin \theta + 0.5N_1 - P = 0.0$$

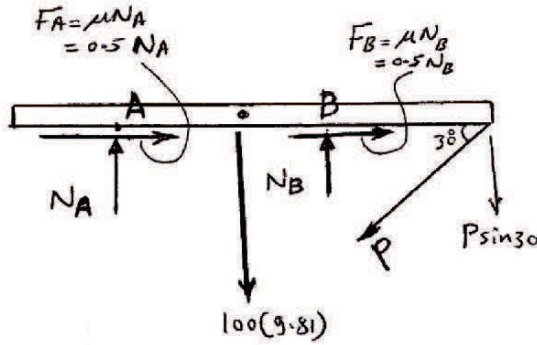
$$(156.96) \left(\frac{1.8}{3} \right) + 0.5(156.96) \left(\frac{2.4}{3} \right) - 50(9.81) \left(\frac{1.8}{3} \right) + 0.5(313.92) - P = 0.0$$

$$\boxed{P = 19.62 \text{ N}}$$



6/30 ماهي القوة P التي يجب أن يبذلها الرجلان على الحبل لكي ينزلق اللوح على الحامل إذا كان طول اللوح 6m وكتلته 100 kg ومعامل الاحتكاك بين اللوح ونقط الارتكاز 0.50.

الحل:



$$\rightarrow \Sigma F_x =$$

$$0.5N_A + 0.5N_B = P \cos 30$$

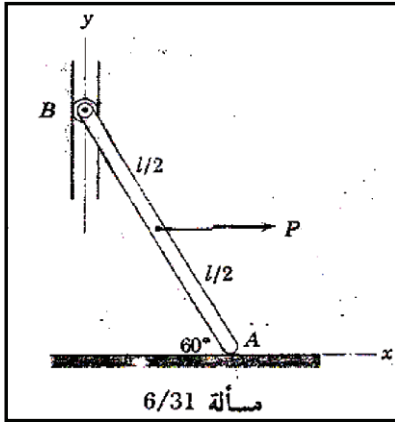
$$N_A + N_B = \frac{P \cos 30}{0.5} \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$N_A + N_B = 100(9.81) + P \sin 30 \quad \dots\dots\dots(2)$$

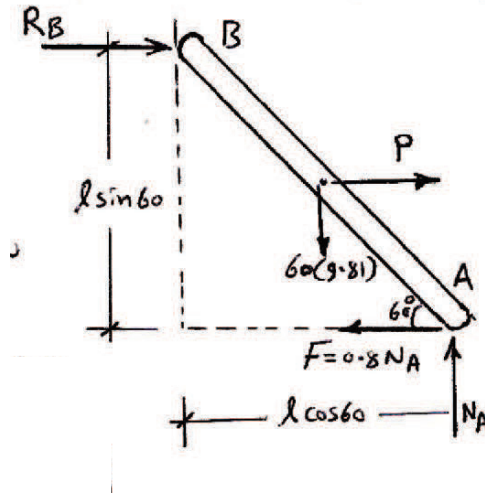
وبتعويض (1) في (2) ينتج:-

$$\frac{P \cos 30}{0.5} = 100(9.81) + P \sin 30 \Rightarrow P = 796 \text{ New}$$



6/31 تثبت الطرف B لفضيب كتلته 60 kg
في بكرة تتحرك في الدليل الرأسى الأملس
فإذا كان معامل الاحتكاك بين الطرف A
والمستوى الأفقى هو 0.80 . فعين القوة
الأفقية P اللازمة لبدء الانزلاق عند A .

الحل:

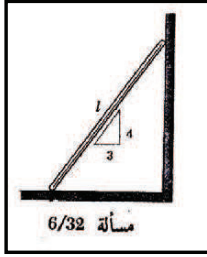


$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_A = 60(9.81) = 588.6 \text{ New}$$

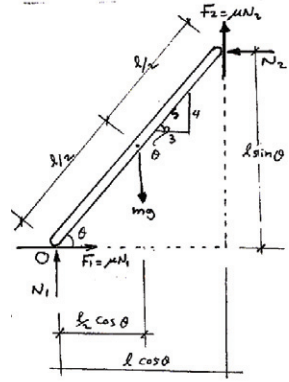
$$\curvearrowleft + \Sigma M_B = 0$$

$$N_A(\ell \cos 60) - 0.8N_A(\ell \sin 60) - 60(9.81)\left(\frac{\ell \cos 60}{2}\right) + P\left(\frac{\ell \sin 60}{2}\right) = 0$$

$$P = 602 \text{ New}$$



6/32 يستند قضيب إلى جدار رأسي بزاوية كما هو موضح في الشكل. أحسب أصغر قيمة لمعامل الاحتكاك μ عند طرفي القضيب بحيث لا يحدث انزلاق.



$$+\uparrow \Sigma F_x = 0$$

$$\mu N_1 = N_2 \text{ ----- (1)}$$

$$\curvearrowleft + \Sigma M_o = 0.0$$

$$-mg\left(\frac{\ell}{2} \cos \theta\right) + N_2(\ell \sin \theta) + \mu N_2(\ell \cos \theta) = 0.0$$

$$-mg\left(\frac{\ell}{2} * \frac{3}{5}\right) + N_2\left(\ell * \frac{4}{5}\right) + \mu N_2\left(\ell * \frac{3}{5}\right) = 0.0$$

ويضرب طرفي المعادلة في $\left(\frac{1}{\ell}\right)$ والتبسيط ينتج:-

$$-\frac{3}{10} mg + \frac{1}{5} N_2(3\mu + 4) = 0.0 \text{ --- (2)}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$N_1 - mg + \mu N_2 = 0.0 \text{ ----- (3)}$$

وبتعويض المعادلة (1) في (3) ينتج:-

$$\frac{N_2}{\mu} - mg + \mu N_2 = 0.0$$

$$N_2\left(\frac{1}{\mu} + \mu\right) = mg \Rightarrow N_2 = \frac{mg\mu}{1 + \mu^2}$$

وبتعويض قيمة N_2 الأخيرة في المعادلة (2) ينتج:-

$$-\frac{3}{10}mg + \frac{1}{5}\left(\frac{mg\mu}{1+\mu^2}\right)(3\mu+4) = 0.0$$

وبضرب طرفي المعادلة $\left(\frac{1}{mg}\right)$ والتبسيط ينتج:-

$$\frac{1}{5}\left(\frac{3\mu^2+4\mu}{1+\mu^2}\right) = \frac{3}{10}$$

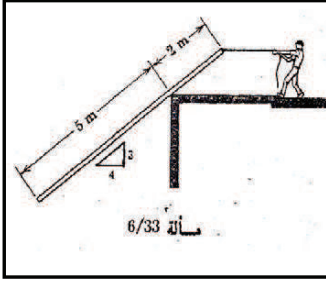
$$3(1+\mu^2) = 2(3\mu^2+4\mu)$$

$$3+3\mu^2 = 6\mu^2+8\mu$$

$$3\mu^2+8\mu-3=0$$

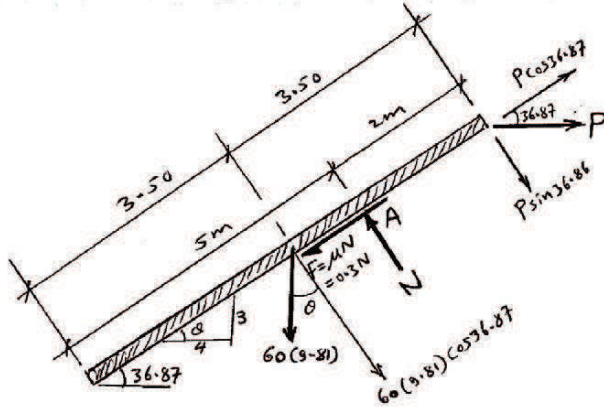
$$\therefore \mu = \frac{1}{3}$$

$$\text{or } \mu = -3 \quad \text{يُهمَل}$$



6/33 هل يستطيع عامل على افتراض أن لديه القوة الكافية أن يحافظ ، بواسطة شد حبل في الاتجاه الأفقي على اتزان لوح طوله 7m في الوضع الموضح في الشكل ؟ علما بأن كتلة اللوح هي 60 kg . ومعامل الاحتكاك الساكن بين اللوح وسطح البناية هو 0.30 . وإذا كان الجواب بنعم فأحسب قوة الاحتكاك في حالة الاتزان .

الحل:



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 36.87^\circ$$

$$\sum M_A = 0$$

$$-P \sin 36.87(2) + 60(9.81) \cos 36.87(3.5 - 2) = 0.0$$

$$P = 588.6 \text{ New}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N - 60(9.81) \cos 36.87 - 588.6 \sin 36.87 = 0.0$$

$$N = 824 \text{ New}$$

$$\mu N = 0.3(824) = 247 \text{ New}$$

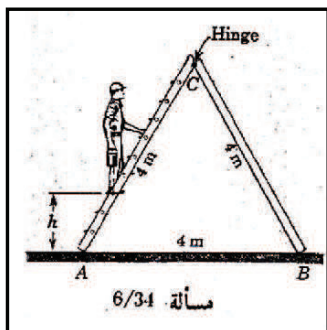
$$\sum F_x = 0$$

$$588.6 \cos 36.87 - F - 60(9.81) \sin 36.87 = 0 \Rightarrow F = 117.7 \text{ New}$$

نعم يستطيع الرجل المحافظة على الاتزان إذا سلط قوة مقدارها (588.6 New).

قوة الاحتكاك اللازمة لعملية الاتزان بمقدار (117.7 New) في الوقت الذي مقاومة الاحتكاك القصوى

(247 New).



6/34 أوجد أعلى ارتفاع h لدرجة سلم يستطيع رجل كتلته 80 kg أن يصل إليها دون أن يسبب انهيار السلم، علماً بأن معامل الاحتكاك عند A هو 0.40 وعند B هو 0.50 وكتلة كل جزء من جزئي السلم هي 10 kg .

الحل:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

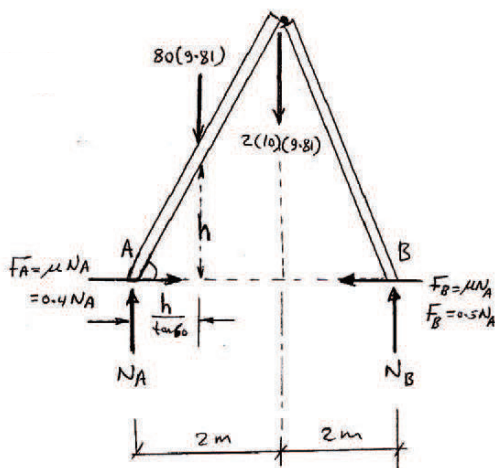
$$N_A + N_B = 2(10)(9.81) + 80(9.81)$$

$$N_A + N_B = 981 \dots\dots\dots(1)$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$0.4 N_A = 0.5 N_B$$

$$N_A = 1.25 N_B \dots\dots\dots(2)$$



وبتعويض (2) في (1) ينتج:-

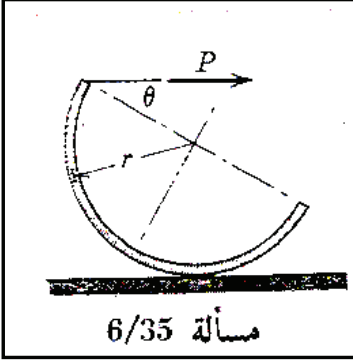
$$1.25 N_B + N_B = 981$$

$$N_B = 436 \text{ New}$$

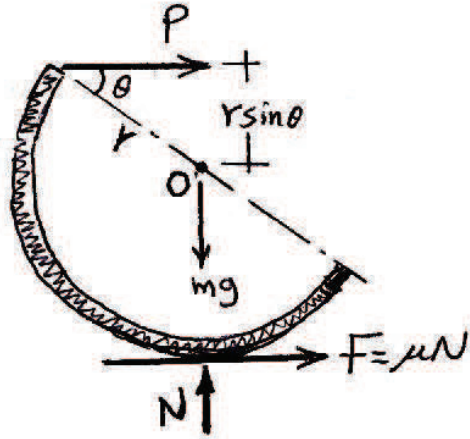
$$\curvearrowleft + \Sigma M_A = 0$$

$$436(4) - 2(10)(9.81)(2) - 80(9.81)\left(\frac{h}{\tan 60}\right) = 0$$

$$h = 2.98 \text{ m}$$



6/35 تدرجت قشرة على شكل نصف اسطوانة مفرغة كتلتها m ونصف قطرها r خلال زاوية θ تحت تأثير قوة أفقية P على طرفها. فإذا بدأنا في زيادة القوة P تدريجياً وكان معامل الاحتكاك هو μ عين الزاوية θ التي تبدأ القشرة فيها بالانزلاق على المستوى الأفقي. ماهي قيمة μ التي تسمح للزاوية θ أن تصل إلى 90° ؟



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$N = Mg$$

$$\curvearrowleft + \Sigma M_o = 0$$

$$Pr \sin \theta = \mu N(r)$$

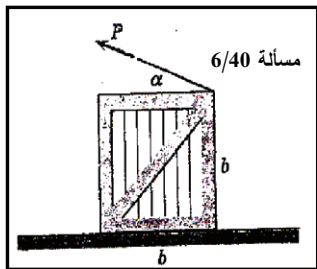
$$Pr \sin \theta = \mu(mg)r$$

$$\sin \theta = \frac{\mu mg}{P} \dots\dots\dots(1)$$

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{\mu mg}{P} \right)$$

بالرجوع إلى المعادلة (1) وبالتعويض بـ $(\theta = 90^\circ)$ نحصل على قيمة μ .

$$\sin 90 = \frac{\mu mg}{P} \Rightarrow \mu = \frac{P}{mg}$$

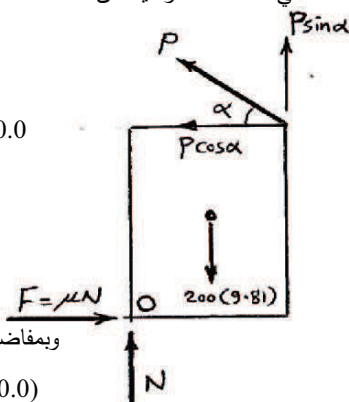


مسألة 6/40

أوجد أصغر قيمة للقوة P والزاوية المناظرة α اللازمة لانقلاب صندوق كتلته 200 kg حول حافته الأمامية ثم عين أصغر قيمة لمعامل الاحتكاك تسمح بحدوث الانقلاب.

الحل: في حالة الانقلاب الوشيك نتركز F, N

في نقطة O - وعليه فأن:-



$$(\sum M_O = 0.0$$

$$- 200(9.81)\left(\frac{b}{2}\right) + P \cos \alpha (b) + P \sin \alpha (b) = 0.0$$

$$- 981 + P(\cos \alpha + \sin \alpha) = 0.0$$

$$P(\cos \alpha + \sin \alpha) = 981 \quad \dots (1)$$

$$P = \frac{981}{\cos \alpha + \sin \alpha}$$

وبمفاضلة P بالنسبة للزاوية α وجعل $\left(\frac{dP}{d\alpha} = 0.0\right)$ فأن:-

$$\frac{dP}{d\alpha} = \frac{981(-\sin \alpha + \cos \alpha) - (\cos \alpha + \sin \alpha)(0.0)}{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2}$$

$$0.0 = 981(-\sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha$$

ويقسم الطرفين على $\cos \alpha$ فأن:-

$$\tan \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

وبتعويض α في المعادلة (1) نحصل على :-

$$P(\cos 45 + \sin 45) = 981 \Rightarrow P = 694 \text{ New}$$

وللتعرف على أصغر معامل احتكاك فأن:-

$$+\uparrow \sum F_y = 0.0$$

$$P \sin \alpha + N - 200(9.81) = 0$$

$$N = 200(9.81) - P \sin \alpha$$

$$N = 1962 - 694 \sin 45 \Rightarrow N = 1471 \text{ New}$$

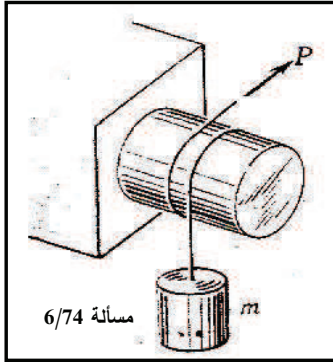
$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$\mu N = P \cos \alpha$$

$$\mu (1471) = 694 \cos 45 \Rightarrow \mu = 0.333 = \frac{1}{3}$$

الفصل السادس عشر

حلول مسائل السيور اللينة



6/74 يحتاج إلى قوة $P=5mg$ في رفع ثقل كتلته m بواسطة حبل ملفوف $1\frac{1}{4}$ دورة حول العمود الثابت. أحسب معامل الاحتكاك μ بين الحبل والعمود.

الحل:

$$T_1 > T_2$$

$$T_1 = T_2 e^{\mu\beta}$$

$$5mg = mg e^{\mu(1.25 \cdot 2\pi)}$$

$$\ln 5 = 7.85\mu$$

$$\mu = 0.205$$

ملاحظات:

$$(1) \text{ الدورة الواحدة } (r) = 2\pi$$

$$(2) \text{ إذا كان } Ina = b \text{ فإن: } a = e^b$$

$$(3) m \text{ تعني الكتلة ، } g \text{ تعني العجلة الأرضية.}$$

$$(4) 1\text{Rad} = 57.3 \text{ degree}$$

6/75 إذا احتيج إلى قوة $P=3kN$ لرفع m وقوة $P=0.48kN$ لخفض m في المسألة 6/74 وذلك بالنسبة لقيمة معينة لمعامل الاحتكاك وعدد معين من الدورات حول العمود فأحسب m .

الحل:

($P=3kN$) هي الأكبر حتى تتغلب على الكتلة (m) والاحتكاك كي يتم رفع الكتلة (m) إلى الأعلى .

$$T_1 = T_2 e^{\mu\beta} \quad \text{وعليه:-}$$

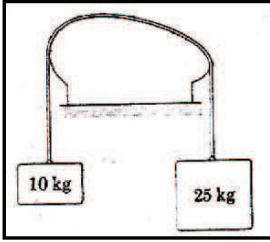
$$3 \cdot 10^3 = mge^{\mu\beta} \Rightarrow m = \frac{3 \cdot 10^3}{ge^{\mu\beta}}$$

($P=0.48kN$) هي الأصغر حتى تتمكن الكتلة (m) بالنزول إلى الأسفل يجب عليها التغلب على P وعلى

$$T_1 = T_2 e^{\mu\beta} \quad \text{الاحتكاك المعاكس لاتجاهها . وعليه :-}$$

$$mg = 0.48e^{\mu\beta} \Rightarrow m = \frac{0.48e^{\mu\beta}}{g}$$

$$\frac{0.48e^{\mu\beta}}{g} \leq m \leq \frac{3}{ge^{\mu\beta}}$$



مسألة 6/76

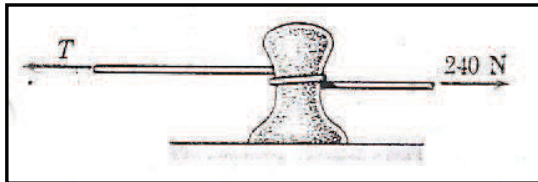
6/76 تتصل الكتلة 10 kg مع الكتلة 25 kg بواسطة حبل معلق على السطح المنحني الثابت. فإذا كانت المجموعة على وشك الانزلاق . فأحسب معامل الاحتكاك بين الحبل والسطح.

الحل:

$$\begin{aligned} T_1 &= 25 \text{ kg} \\ T_2 &= 10 \text{ kg} \\ T_1 &= T_2 e^{\mu\beta} \\ 25 &= 10 e^{\mu\pi} \\ \ln \frac{25}{10} &= \mu\pi \Rightarrow \mu = 0.292 \end{aligned}$$

6/77 يحرك عامل الميناء الحبل الذي يمنع باخرة صغيرة من الانحراف عن الرصيف. ما هي القوة T التي يمكن أن يتحملها الحبل إذا كان يؤثر العامل على الطرف الآخر للحبل بقوة جر قدرها 240 N (أ) إذا لف الحبل دورة واحدة حول مرسى الربط و(ب) إذا لف الحبل دورتين حول مرسى الربط . علماً بأن معامل الاحتكاك بين حبل القنب ومرسى الحديد هو 0.30.

6/78 إذا أراد العامل في المسألة 6/77 أن يتحمل طرف الحبل الموصول بالباخرة شدا قدرها 16kN وكان معامل الاحتكاك بين الحبل والمرسى هو 0.30 فبكم دورة يجب لف الحبل حول المرسى.



مسألة 6/77

الحل:

$$T_1 = T_2 e^{\mu\beta}$$

$$16 * 10^3 = 240 e^{0.3\beta}$$

$$\ln \frac{16 * 10^3}{240} = 0.3\beta$$

$$\beta = 14 \text{ Rad}$$

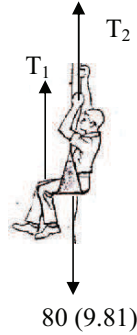
$$\text{No. of circle} = \frac{14}{2\pi} = 2.23r$$

ملاحظة: الدورة الواحدة = 2π



6/79 يهبط رجل كتلته 80 kg بواسطة حبل ملفوف حول فرع شجرة أفقي. فإذا كان معامل الاحتكاك بين الحبل والفرع هو 0.50 فأحسب القوة التي يجب أن يطبقها الرجل على الحبل ليهبط ببطء.

الحل:



$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$T_1 + T_2 = 80 (9.81) \dots\dots(1)$$

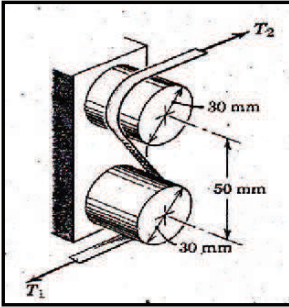
$$T_1 = T_2 e^{\mu\beta}$$

$$T_1 = T_2 e^{0.5\pi}$$

$$T_1 = 4.81 T_2 \dots\dots(2)$$

وبتعويض (2) في (1) نحصل على قيم:-

$$T_1 = 650 \text{ N} \quad \text{و} \quad T_2 = 135 \text{ N}$$



مسألة 6/80

6/80 ينزلق الشريط حول الودتين الثابتين كما هو موضح في

الشكل تحت تأثير الشدين الأفقيين $T_1 = 40 \text{ N}$ و $T_2 = 160 \text{ N}$

أوجد معامل الاحتكاك μ بين الشريط والأوتاد.

الحل :

$$\cos \theta = \frac{15}{25}$$

$$\theta = 53.13^\circ$$

$$\beta = 180 - 53.13 = 126.87^\circ \text{ (لبكرة واحدة)}$$

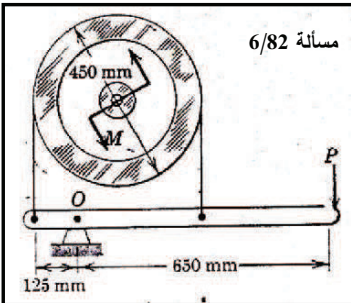
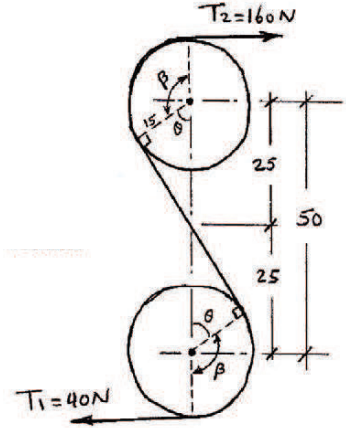
$$\beta = 2 (126.87) = 253.74^\circ \text{ (لبكرتين)}$$

$$\beta = 4.428 \text{ Rad}$$

$$T_2 = T_1 e^{\mu \beta}$$

$$160 = 40 e^{\mu (4.428)}$$

$$\ln \frac{160}{40} = 4.428 \mu \Rightarrow \mu = 0.313$$



مسألة 6/82

6/82 يؤثر عزم. في اتجاه ضد عقرب الساعة، على

الحدافة، قدره $M = 150 \text{ N.m}$ فإذا كان معامل

الاحتكاك بين الحزام والعجلة هو 0.20 . فأحسب

أصغر قوة P لازمة لمنع العجلة من الدوران.

الحل:

T_1 هي القوة الأكبر ويمكن تصور ذلك على أساس العزم المحسوب حول نقطة O . حيث أن بثبات ذراع قوتا الشد T_1 , T_2 يُلاحظ أن العزم الناتج من T_1 حول O يجب أن يتغلب على العزم M والعزم الناتج من T_2 .

$$T_1 = T_2 e^{\mu\beta} = T_2 e^{0.2\pi}$$

$$T_1 = 1.87T_2 \dots\dots(1)$$

$$+\Sigma M_o = 0$$

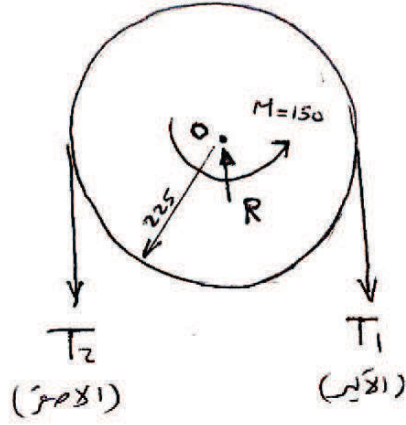
$$T_1 (225) = 150 \cdot 10^3 + T_2 (255) \dots (2)$$

وبتعويض (1) في (2) ينتج:-

$$1.87 T_2 (225) = 150 \cdot 10^3 + (225)T_2$$

$$T_2 = 766 \text{ New}$$

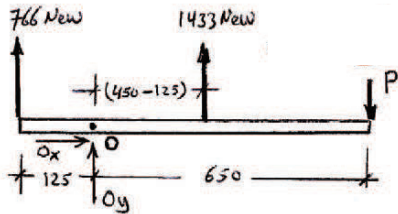
$$\therefore T_1 = 1.87 (766) = 1433 \text{ New}$$



لاحظ أن القوة R هي القوة المبذولة بعمود المحرك على البكرة وهي قوة ثابتة في المجموعة وتسبب الشد الابتدائي في السير عندما يكون المحرك ساكنا وقيمتها هي:-

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow R = T_1 + T_2$$

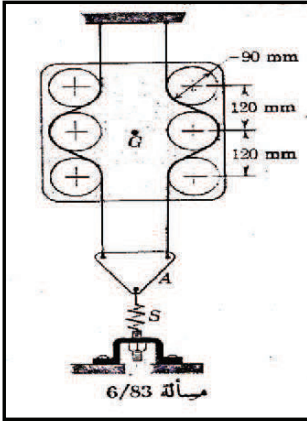
وهي غير مطلوبة في المسألة إنما من أجل التوضيح فقط .



$$\Sigma M_o = 0$$

$$-P (650) + 1433 (450 - 125) - 766(125) = 0$$

$$P = 568 \text{ New}$$



6/84 إن كتلة الجهاز الموضح هي 100 kg ومركز ثقلها G ويحملها حبلان يمران حول الأوتاد الثابتة ويطبق عليها بواسطة اللوح A وال نابض S شدا متساوياً. احسب أصغر شد T في النابض حيث يظل الجهاز معلقا كما هو موضح في الشكل علماً بأن معامل الاحتكاك بين الحبال والأوتاد هو 0.30.

الحل:

$$\cos \theta = \frac{45}{60} \Rightarrow \theta = 41.409^\circ$$

$$\beta = (90 - 41.409) * 4 = 194.36^\circ$$

$$\beta = 3.293 \text{ Rad}$$

$$T_2 = T_1 e^{\mu \beta}$$

$$T_2 = T_1 e^{0.3(3.392)}$$

$$T_2 = 2.766 T_1 \dots (1)$$

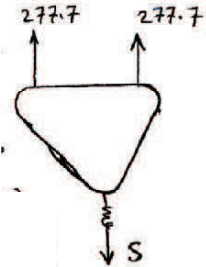
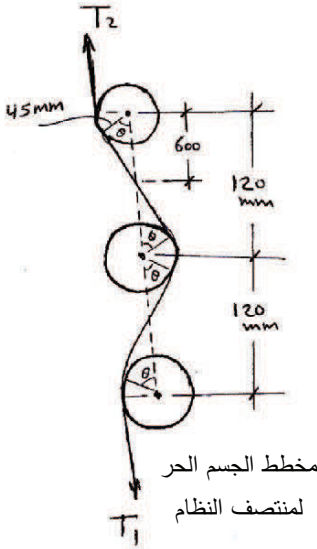
$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$T_2 = \frac{100(9.81)}{2} + T_1 \dots (2)$$

وبتعويض (1) في (2) ينتج:-

$$2.766 T_1 = 490.5 + T_1$$

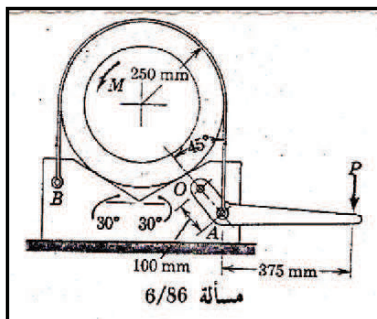
$$T_1 = 277.7 \text{ New}$$



$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

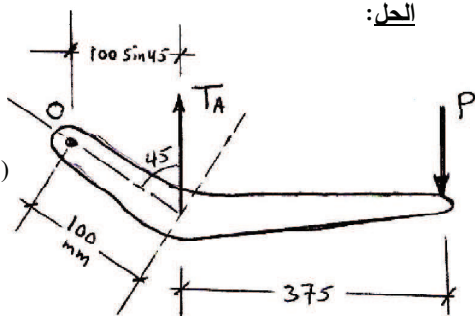
$$S = 277.7 (2)$$

$$S = 555 \text{ New}$$



6/86 أوجد عزم الازدواج M اللازم لدوران الأنبوب في الكتلة ضد تأثير الحزام اللين، علماً بأن القوة $P = 100 \text{ N}$ تؤثر على الذراع المرتكز عند A وأن معامل الاحتكاك بين الحزام والأنبوب هو 0.30 وبين الأنبوب والكتلة هو 0.40 أهمل وزن القطع كلها.

الحل:



$$(\sum M_O = 0$$

$$100 (375 + 100 \sin 45) = T_A (100 \sin 45)$$

$$T_A = 630.33 \text{ New}$$

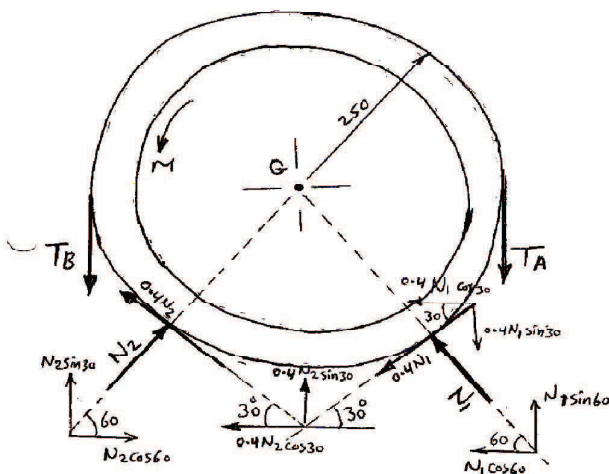
يتضح من خلال رسم مخطط الجسم الحر للأنبوبية بأن T_A هو أكبر من T_B كون المطلوب منه التغلب على عزم الازدواج M والتغلب على T_B . وعليه:-

$$T_A = T_B e^{\mu \beta}$$

$$T_A = T_B e^{0.3\pi}$$

$$630.33 = T_B (2.566)$$

$$T_B = 245.48 \text{ New}$$



$$+ \rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$N_2 \cos 60 - 0.4 N_2 \cos 30 - N_1 \cos 60 - 0.4 N_1 \cos 30 = 0$$

$$N_2 = 5.51 N_1 \dots\dots (1)$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$-245.48 - 630.33 + N_2 \sin 60 + 0.4 N_2 \sin 30 + N_1 \sin 60 - 0.4 N_1 \sin 30 = 0$$

$$1.066 N_2 + 0.666 N_1 = 875.8 \dots\dots\dots(2)$$

وبتعويض (1) في (2) ينتج:-

$$1.066 (5.5 N_1) + 0.666 N_1 = 875.8$$

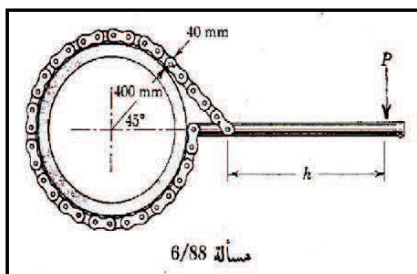
$$N_1 = 133.57 \text{ New}$$

$$\therefore N_2 = 5.51 (133.57) = 737.8 \text{ New}$$

$$+ \Sigma M_G = 0$$

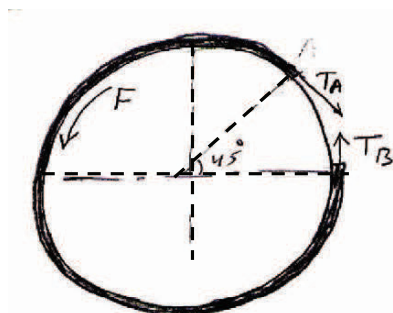
$$-0.4 (737.8)(250) + M - 0.4 (133.57)(250) - 630.33 (250) + 245.48 (250) = 0$$

$$M = 183267 \text{ N. mm} = 183.3 \text{ N.m}$$



6/88 تستخدم سلسلة الاسطوانة الدوارة كقابضة أنابيب. فإذا كان معامل الاحتكاك بين السلسلة والأنبوب الثابت هو 0.25 . فأحسب أصغر قيمة h بحيث لا ينزلق المقبض على الأنبوب مهما كانت قيمة P. أهمل كتلة السلسلة والمقبض وأي احتكاك بين الطرف الأيسر من المقبض والأنبوب.

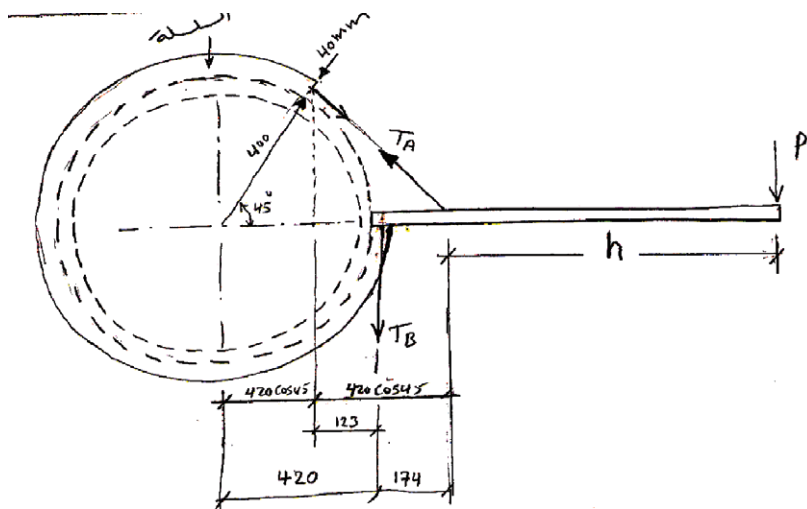
الحل: يلاحظ في السؤال بأن القوة P تعمل عزم مع عقرب الساعة على الأسطوانة وبالتالي تتولد قوة احتكاك (F) الموضحة في الشكل المجاور باتجاه معاكس لحركة السلسلة. وحتى يحصل الاتزان فإن T_A يجب أن تتغلب على T_B وعلى قوة الاحتكاك F. وعليه فإن T_A يجب أن تكون أكبر من T_B .



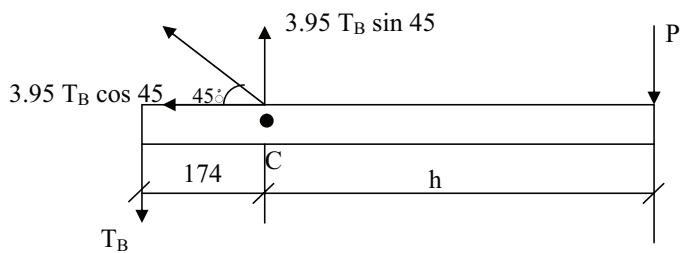
شكل - a

$$\beta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi - \pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$T_A = T_B e^{\mu\beta} = T_B e^{0.25\left(\frac{7\pi}{4}\right)} = 3.95 T_B$$



$$T_A = 3.95 T_B$$



$$\Sigma M_c = 0$$

$$-Ph + T_B(174) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_B = \frac{Ph}{174}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

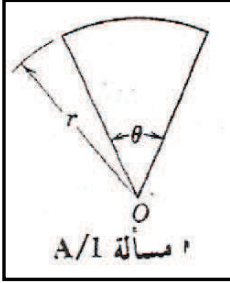
$$-T_B + 3.95T_B \sin 45 - P = 0$$

$$-\frac{Ph}{174} + 3.95 \sin 45 \left(\frac{Ph}{174} \right) - P = 0$$

$$\frac{Ph}{174} (-1 + 3.95 \sin 45) = P \quad \Rightarrow \quad h = 97 \text{ mm}$$

الفصل السابع عشر

حلول مسائل
عزم القصور الذاتي
بطريقة التكامل

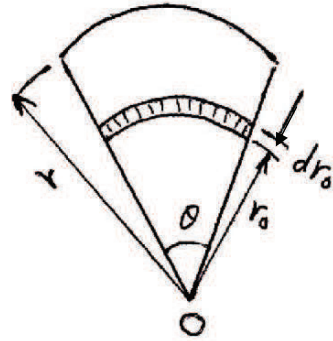


A/1 اكتب معادلة عزم القصور الذاتي القطبي لمساحة القطاع الدائري حول المركز O وذلك باستخدام نتائج المثال A/3 .
الحل:

$$I_z = J_o = \int_0^r r_o^2 dA = \int_0^r r_o^2 (\theta r_o dr_o)$$

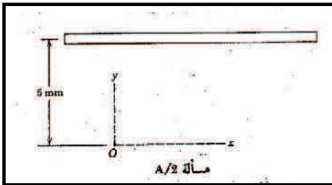
$$J_o = \theta \int_0^r r_o^3 dr_o = \theta \left[\frac{r_o^4}{4} \right]_0^r$$

$$J_o = \frac{\theta r^4}{4}$$



$$\therefore dA = r_o \theta dr_o$$

θr_o = طول القوس



A/2 تساوي مساحة الشريحة المستطيلة 6mm^2 ويساوي عزم قصورها الذاتي حول المحور y إلى 170 mm^4 . أوجد عزم الدوران حول النقطة O بصورة تقريبية.

الحل:

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \Rightarrow k_x^2 A = I_x$$

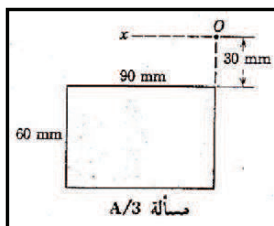
$$\therefore I_x = (5)^2 (6) = 150\text{mm}^4$$

إذا عزم القصور القطبي والذي يرمز له بـ (I_z) أو (J) يساوي:-

$$I_z = J_o = I_x + I_y = 150 + 170 = 320\text{ mm}^4$$

$$k_o = \sqrt{\frac{J_o}{A}} = \sqrt{\frac{320}{6}} = 7.3\text{ mm}$$

ملاحظة: I_z يعني عزم القصور الذاتي حول المحور Z العمودي على مستوى الورقة.



A/3 أوجد عزم القصور الذاتي لمساحة المستطيل

حول المحور x وعزم القصور الذاتي القطبي

حول النقطة O.

ملاحظة: قبل البدء في حل هذا السؤال ، تجدر الإشارة

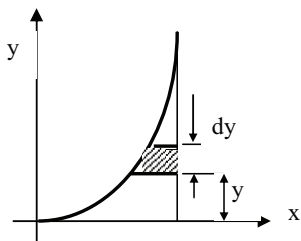
إلى أن الشريحة التي تؤخذ في حساب عزم القصور

الذاتي للمساحات حول محور معين، إما أن تكون موازية

لذلك المحور أو عمودية عليه بشكل مباشر.

فمثلاً لو كانت الشريحة موازية للمحور x. والمطلوب عزم القصور الذاتي حول x والذي يرمز له بـ

(Ix) فأن:-

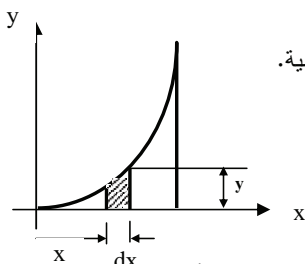


$$I_x = \int y^2 dy$$

أما إذا كانت الشريحة عمودية بشكل مباشر على المحور x والمطلوب Ix فأن:-

$$I_x = \frac{1}{3} \int y^2 dy$$

وللتعرف على المزيد، يزّاجع كتاب (ميريام) في الميكانيكا الهندسية.

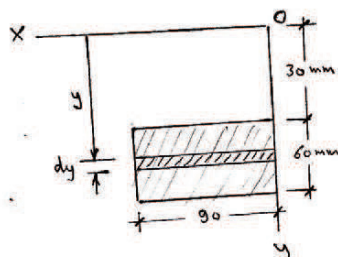


ولإيجاد قيمة Ix في سؤالنا، فأن:-

$$I_x = \int y^2 dA = \int_{30}^{90} y^2 (90 dy)$$

$$I_x = 90 \frac{y^3}{3} \Big|_{30}^{90} = 30[90^3 - 30^3]$$

$$I_x = 21.06 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

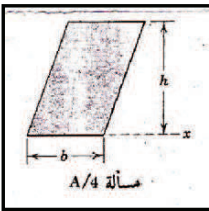
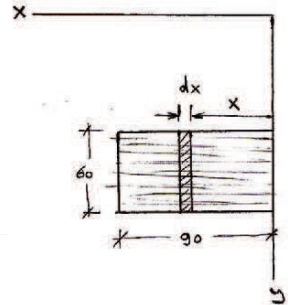


$$I_y = \int x^2 dA$$

$$I_y = \int_0^{90} x^2 (60 dx) = 60 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{90}$$

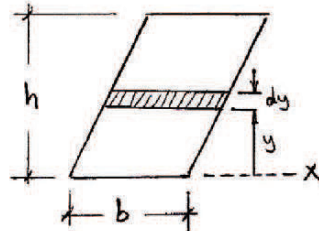
$$I_y = 60 \frac{(90)^3}{3} = 14.58 * 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_z = J_0 = I_x + I_y = 21.06 * 10^6 + 14.58 * 10^6 \\ = 35.64 * 10^6 \text{ mm}^4$$



A/4 أذكر عزم القصور الذاتي لمساحة المتوازي الأضلاع حول المحور x
المر من قاعدته وحول محور يوازيه ويمر من مركزه الهندسي

الحل:

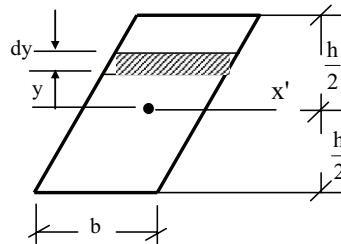


$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 (b dy)$$

$$I_x = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

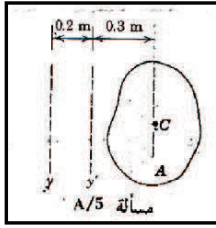
وللتعرف على $I_{x'}$ حول المحور x' الذي يمر من المركز الهندسي الشكل فإن:-

$$I_{x'} = \int y'^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y'^2 (b dy')$$



$$I_{x'} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y'^2 (b dy') = b \left[\frac{y'^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{3} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^3 - \left(-\frac{h}{2} \right)^3 \right] = \frac{b}{3} \left[\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right]$$

$$I_{x'} = \frac{2bh^3}{24} = \frac{bh^3}{12}$$



A/5 إن الفرق بين عزم القصور الذاتي للمساحة A

حول المحورين y, y' هو 0.032 m^4 . أحسب

المساحة A ذات مركز هندسي في C. الحل:

$$I_y = \bar{I}_y + Ad^2$$

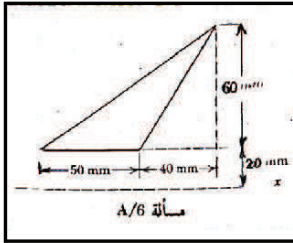
$$I_y = \bar{I}_y + A(0.5)^2$$

$$I'_y = \bar{I}_y + Ad^2$$

$$I'_y = \bar{I}_y + A(0.3)^2$$

$$I_y - I'_y = (\bar{I}_y + A(0.5)^2) - (\bar{I}_y + A(0.3)^2)$$

$$0.032 = A(0.5)^2 - A(0.3)^2 \Rightarrow 0.032 = 0.16A \Rightarrow A = 0.2 \text{ m}^2$$

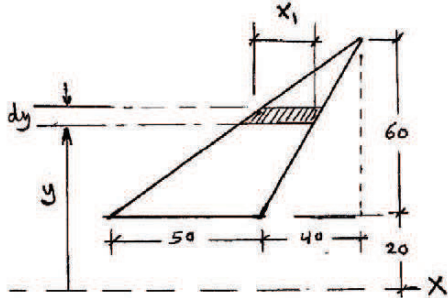


A/6 أحسب عزم القصور الذاتي للمساحة المثلثية

حول المحور x.

الحل: من تناسب المثلثات

$$\frac{50}{60} = \frac{x_1}{80-y} \Rightarrow x_1 = \frac{5}{6}(80-y)$$



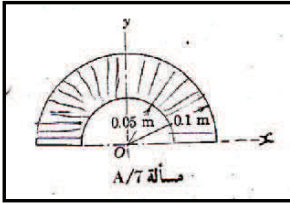
$$I_x = \int_{20}^{80} y^2 dA$$

$$I_x = \int_{20}^{80} y^2 \left[\frac{5}{6}(80-y) \right] dy$$

$$I_x = \frac{5}{6} \int_{20}^{80} (80y^2 - y^3) dy$$

$$I_x = \frac{5}{6} \left[80 \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_{20}^{80}$$

$$I_x = 270 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

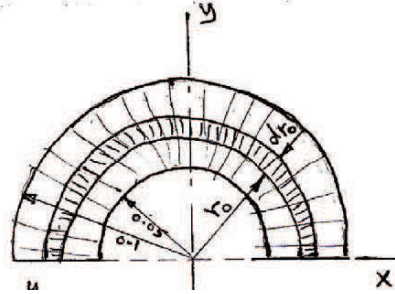


A/7 أوجد عزم القصور الذاتي القطبي لمساحة حلقة نصف دائرية حول O بالتكامل المباشر واستعمل النتيجة لإيجاد عزم القصور الذاتي حول محور x.

الحل:

$$J_o = \int_{0.05}^{0.1} r_o^2 (\pi r_o dr_o)$$

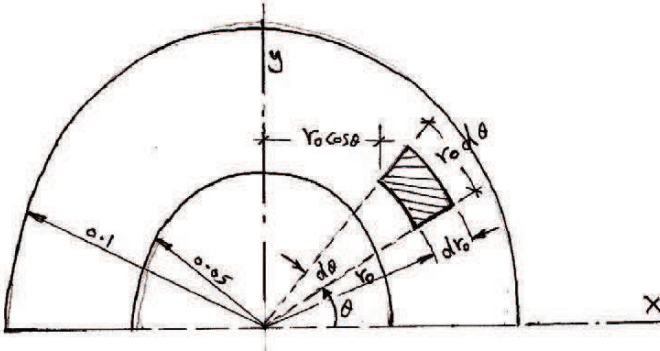
$$J_o = \pi \int_{0.05}^{0.1} r_o^3 dr_o = \pi \left[\frac{r_o^4}{4} \right]_{0.05}^{0.1}$$



$$J_o = \frac{\pi}{4} [0.1^4 - 0.05^4] = 0.736 * 10^{-4} \text{ m}^4$$

ملاحظة: محيط الدائرة $2\pi r_o = \pi D$

محيط نصف الدائرة πr_o



$$I_y = \int_{0.05}^{0.1} \int_0^{\pi} \overbrace{(r_o \cos \theta)^2}^{x^2} \overbrace{(r_o d\theta dr_o)}^{dA}$$

$$I_y = \int_{0.05}^{0.1} \int_0^{\pi} r_o^3 \cos^2 \theta d\theta dr_o$$

$$I_y = \int_0^{\pi} \int_{0.05}^{\frac{r_o^4}{4}} \cos^2 \theta d\theta = 0.234 * 10^{-4} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta$$

$$I_y = \int_{0.05}^{0.1} \int_0^{\pi} \overbrace{(r_o \cos \theta)^2}^{x^2} \overbrace{(r_o d\theta dr_o)}^{dA}$$

$$I_y = \int_{0.05}^{0.1} \int_0^{\pi} r_o^3 \cos^2 \theta d\theta dr_o$$

$$I_y = \int_0^{\pi} \int_{0.05}^{\frac{r_o^4}{4}} \cos^2 \theta d\theta = 0.234 * 10^{-4} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta$$

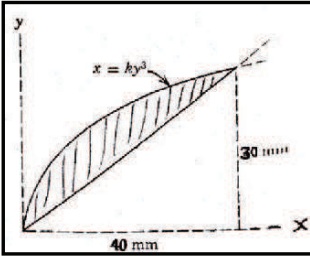
$$\int_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} [\pi + \frac{1}{2} \sin 2\pi] = \frac{\pi}{2}$$

وبالرجوع إلى معادلة I_y نجد أن:-

$$I_y = 0.234 * 10^{-4} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0.367 * 10^{-4}$$

$$I_x = J_o - I_y = 0.736 * 10^{-4} - 0.367 * 10^{-4} = 0.369 * 10^{-4} \text{ m}^4$$



A/8 أحسب عزم القصور الذاتي للمساحة المظللة حول المحور x .

الحل:

للتعرف على قيمة k في الدالة $x = ky^3$ التي تمر بالنقطة (40, 30) فإن:-

$$x = ky^3$$

$$40 = k(30)^3 \Rightarrow k = \frac{40}{30^3}$$

وللتعرف على معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين (40, 30) ، (0,0) فإن:-

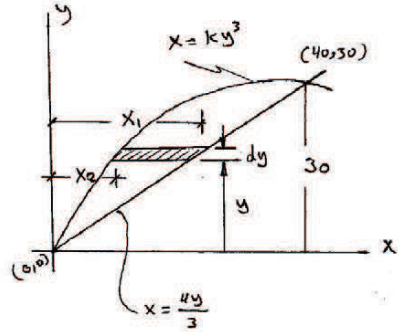
$$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

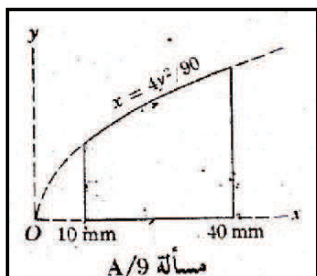
$$(y - 0.0) = \frac{30 - 0.0}{40 - 0.0} (x - 0.0) \Rightarrow y = \frac{3}{4}x \Rightarrow x = \frac{4y}{3}$$

$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^{30} y^2 (x_1 - x_2) dy = \int_0^{30} y^2 \left(\frac{4y}{3} - ky^3 \right) dy$$

$$I_x = \left[\frac{4}{3} \frac{y^4}{4} - k \frac{y^6}{6} \right]_0^{30} = \frac{4}{3} * \frac{30^4}{4} - \frac{40}{30^3} * \frac{30^6}{6}$$

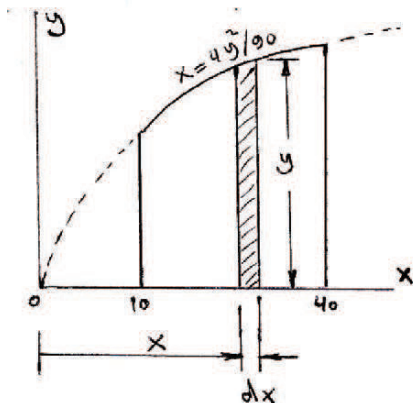
$$I_x = 9 * 10^4 \text{ mm}^4$$





A/9 أحسب عزم القصور الذاتي للمساحة المظللة
حول المحور x

الحل:



ملاحظة:

- 1- حتى تكون الشريحة في حركتها ضمن تكامل محدد محصور ضمن الدالتين ثابتتين، لذا كان من الأفضل أن تكون الشريحة رأسية وليست أفقية.
- 2- بما أن الشريحة عمودية بشكل مباشر على المحور x والمطلوب هو I_x فإن:-

$$I_x = \frac{1}{3} \int_{10}^{40} y^2 dA = \frac{1}{3} \int_{10}^{40} y^2 (y dx)$$

$$x = \frac{4y^2}{90}$$

$$y^2 = \frac{90x}{4}$$

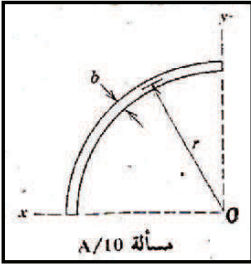
$$y = \sqrt{\frac{90x}{4}}$$

$$I_x = \frac{1}{3} \int_{10}^{40} \left(\sqrt{\frac{90}{4}} \sqrt{x} \right)^2 \left(\sqrt{\frac{90}{4}} \sqrt{x} dx \right)$$

$$I_x = \frac{1}{3} \int_{10}^{40} \left(\frac{90x}{4} \right) \sqrt{\frac{90}{4}} x^{\frac{1}{2}} dx = 35.57 \int_{10}^{40} x^{\frac{3}{2}} dx$$

$$I_x = 35.57 \left[\frac{x^{5/2}}{5/2} \right]_{10}^{40} = 35.57 * \frac{2}{5} [40^{\frac{5}{2}} - 10^{\frac{5}{2}}]$$

$$I_x = 13.95 * 10^4 \text{ mm}^4$$



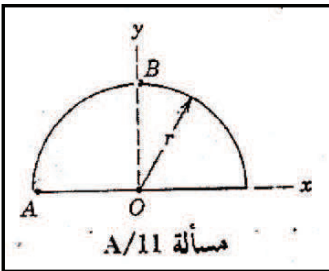
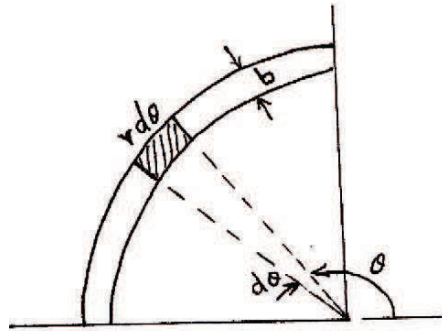
A/10 أن عرض الشريحة b لربع الدائرة مقارنة بنصف القطر r . أوجد عزم القصور الذاتي القطبي للمساحة حول مركزها الهندسي.

الحل:

$$J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r^2 dA = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r^2 (rd\theta \cdot b)$$

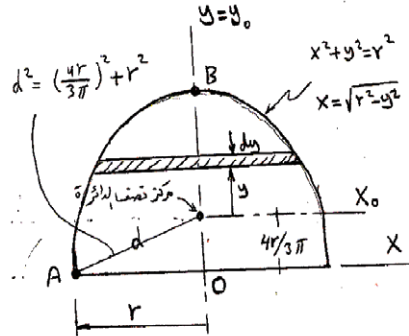
$$J = r^3 b \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta = r^3 b [\theta]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$J = \frac{r^3 b \pi}{2}$$



A/11 أوجد عزم القصور الذاتي القطبي لمساحة نصف دائرة حول النقطتين A و B.

الحل:



نحسب عزم القصور الذاتي حول المحور xO المار في المركز الهندسي لنصف الدائرة حيث:-

$$I_{x_0} = \int_{-\frac{4r}{3\pi}}^{\frac{4r}{3\pi}} y^2 (2\sqrt{r^2 - y^2}) dy$$

راجع صفحة (378) من كتاب (مريام)
للتعرف على تكامل المعادلة.

$$I_{y_0} = \int_{-r}^r x^2 y dx$$

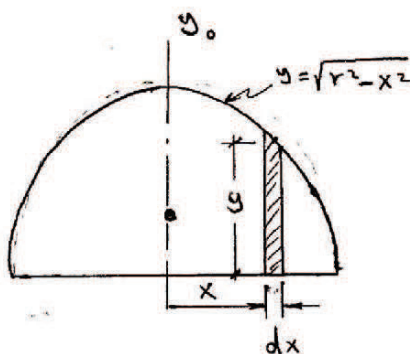
$$I_{y_0} = \int_{-r}^r x^2 \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

راجع صفحة 378 من كتاب مريام
للتعرف على ناتج التكامل.

عزم القصور الذاتي القطبي حول
المركز الهندسي لنصف الدائرة

$$- : (\bar{J}_0)$$

$$\bar{J}_0 = I_{x_0} + I_{y_0}$$



ومنه نحصل على عزم القصور القطبي حول B - وحول A - تبعاً لما يأتي:-

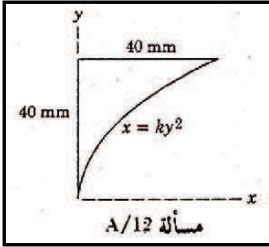
$$J_{OB} = \bar{J}_0 + Ad^2$$

$$J_{OB} = \bar{J}_0 + A(r - \frac{4r}{3\pi})^2$$

$$J_{OA} = \bar{J}_0 + Ad^2$$

$$J_{OA} = \bar{J}_0 + A(\frac{4r}{3\pi})^2 + r^2$$

ملاحظة: تترك النتائج للطالب في الحصول عليها.



A/12 أحسب بطريقة التكامل المباشر عزم القصور الذاتي للمساحة المظللة حول المحور x . حلها باختيار شريحة أفقية أولاً. ثم باستخدام شريحة عمودية ثانياً.
الحل:

الطريقة الأولى: باستخدام شريحة أفقية
حيث:-

$$x = ky^2 \Rightarrow k = \frac{40}{40^2} = 0.025$$

$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^{40} y^2 (ky^2) dy$$

$$I_x = k \frac{y^5}{5} \Big|_0^{40} = 0.025 \frac{40^5}{5} = 512 * 10^3 \text{ mm}^4$$

الطريقة الثانية : باستخدام شريحة عمودية . لفهم أكثر عن هذا الحل ، راجع مثال A/6 صفحة (351) من كتاب (ميريام) . حيث أن I_x يساوي (I_x) للمربع الذي أبعاده (40×40) مطروح منه I_x للمساحة تحت المنحني $x = ky^2$ بمعنى:-

$$I_x = \frac{1}{3} \int_0^{40} 40^2 (40 dx) - \frac{1}{3} \int_0^{40} \left(\sqrt{\frac{x}{k}} \right)^2 \left(\sqrt{\frac{x}{k}} dx \right)$$

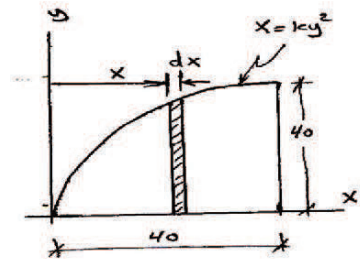
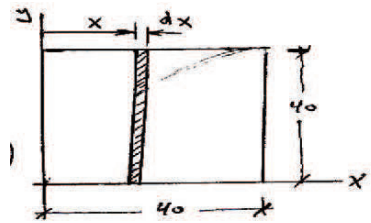
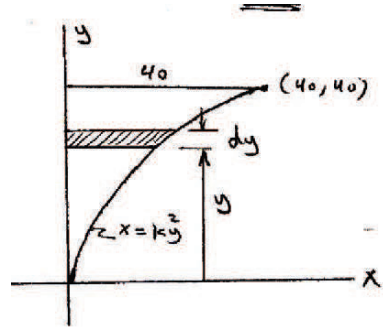
$$I_x = \frac{40^3}{3} \int_0^{40} dx - \frac{1}{3k\sqrt{k}} \int_0^{40} x \cdot x^{\frac{1}{2}} dx$$

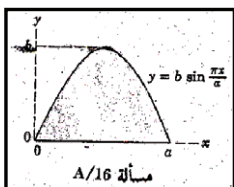
$$I_x = \frac{40^3}{3} [x]_0^{40} - 84.32 \int_0^{40} x^{\frac{3}{2}} dx$$

$$I_x = \frac{40^4}{3} - 84.32 \frac{x^{5/2}}{5/2} \Big|_0^{40}$$

$$I_x = \frac{40^4}{3} - 84.32 \left(\frac{2}{5} \right) (40)^{2.5}$$

$$I_x = 512 * 10^3 \text{ mm}^4$$

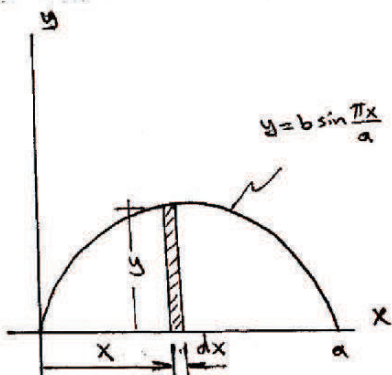




A/16 أوجد عزم القصور الذاتي حول المحور x للمساحة تحت

منحنى الجيب x .

الحل:



$$I_x = \frac{1}{3} \int y^2 dA = \frac{1}{3} \int_0^a (b \sin \frac{\pi x}{a})^2 (b \sin \frac{\pi x}{a}) dx$$

$$I_x = \frac{b^3}{3} \int_0^a \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi x}{a} dx$$

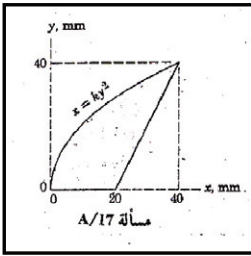
$$I_x = \frac{b^3}{3} \int_0^a (1 - \cos^2 \frac{\pi x}{a}) \sin \frac{\pi x}{a} dx$$

$$I_x = \frac{b^3}{3} \left[\int_0^a \sin \frac{\pi x}{a} dx - \int_0^a (\cos \frac{\pi x}{a})^2 \sin \frac{\pi x}{a} dx \right]$$

$$I_x = \frac{b^3}{3} \left\{ \left[\frac{a}{\pi} (-\cos \frac{\pi x}{a}) \right]_0^a + \frac{a}{\pi} \cdot \frac{(\cos \frac{\pi x}{a})^3}{3} \right\}_0^a$$

$$I_x = \frac{ab^3}{3\pi} \left\{ (-1)[\cos \pi - \cos 0.0] + \frac{1}{3}[(\cos \pi)^3 - (\cos 0.0)^3] \right\}$$

$$I_x = \frac{ab^3}{3\pi} \left[2 - \frac{2}{3} \right] = \frac{ab^3}{3\pi} \left(\frac{4}{3} \right) = \frac{4ab^3}{9\pi}$$



A/17 أوجد عزم القصور الذاتي للمساحة المضللة

حول المحور y .

للتعرف على معادلة المستقيم المار بالنقطتين

– (20,0) ، (40,40) فأن:-

$$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$(y - 0.0) = \frac{40 - 0.0}{40 - 20} (x - 20)$$

$$y = 2x - 40 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(y + 40)$$

حاول الاستفادة من فكرة الطريقة الثانية في حل سؤال (A/12) وتطبيقها في حل هذه

المسألة لإيجاد I_y . حيث أن:-

$$I_y = \frac{1}{3} \int_0^{40} (x_1)^2 (x_1 dy) - \frac{1}{3} \int_0^{40} (x_2)^2 (x_2 dy)$$

$$I_y = \frac{1}{3} \int_0^{40} x_1^3 dy - \frac{1}{3} \int_0^{40} x_2^3 dy$$

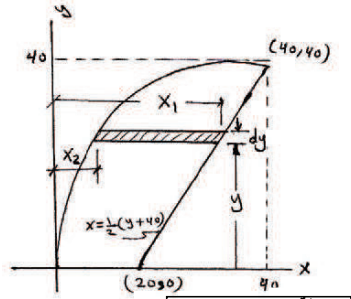
$$I_y = \frac{1}{3} \int_0^{40} \left[\frac{1}{2}(y + 40) \right]^3 dy - \frac{1}{3} \int_0^{40} [0.025y^2]^3 dy$$

$$I_y = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{(y + 40)^4}{4} \Big|_0^{40} - \frac{1}{3} \cdot \frac{(0.025)^3 y^7}{7} \Big|_0^{40}$$

$$I_y = \frac{1}{96} \cdot [(y + 40)^4]_0^{40} - \frac{(0.025)^3}{21} [y^7]_0^{40}$$

$$I_y = \frac{1}{96} \cdot [(80)^4 - (40)^4] - \frac{(0.025)^3}{21} [40^7]$$

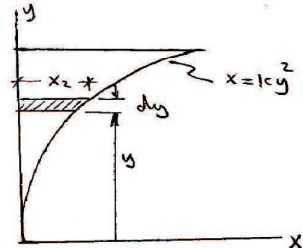
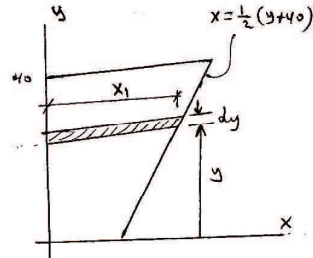
$$I_y = 40 \cdot 10^4 - 12.2 \cdot 10^4 = 27.8 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

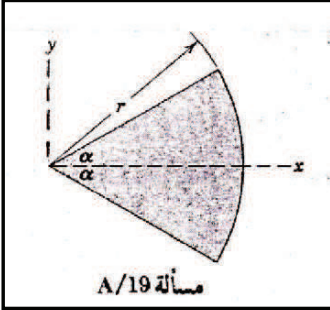


$$x = ky^2$$

$$(40) = k(40)^2$$

$$k = 0.025$$

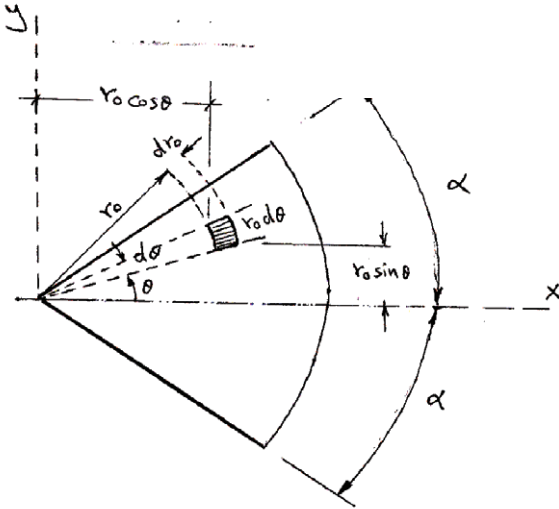




A/19 أوجد عزم القصور الذاتي للشريحة الدائرية

حول المحور x والمحور y :-

الحل:



$$I_y = \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^r x^2 dA$$

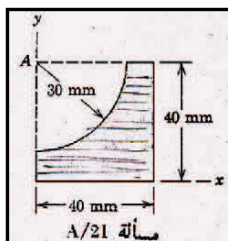
$$I_y = \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^r (r_0 \cos \theta)^2 (dr_0 \cdot r_0 d\theta)$$

$$I_x = \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^r y^2 dA = \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^r (r_0 \sin \theta)^2 (dr_0 \cdot r_0 d\theta)$$

يترك إجراء التكامل إلى الطالب مع الاستفادة من طريقة تكامل سؤال A/7.

الفصل الثامن عشر

حلول مسائل
عزم القصور الذاتي
بطريقة الأشكال الهندسية



A/21 أحسب عزم القصور الذاتي القطبي للمساحة

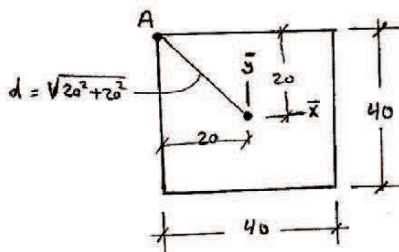
المظللة حول المنطقة A.

الحل: عزم القصور الذاتي حول نقطة A - للمساحة المظللة تساوي

عزم القصور الذاتي للمربع حول A - مطروح منه عزم القصور

القطبي حول A - لربع الدائرة.

أ- عزم القصور الذاتي للمربع:



$$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{(40)(40)^3}{12}$$

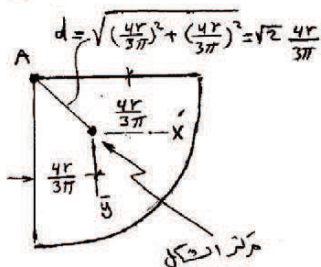
$$\therefore \bar{J} = \bar{I}_x + \bar{I}_y$$

$$\bar{J} = 2 * \frac{40^4}{12}$$

$$J_A = \bar{J} + Ad^2$$

$$= 2 * \frac{40^4}{12} + (40 * 40)(\sqrt{20^2 + 20^2})^2 = 170.67 * 10^4 \text{ mm}^4$$

ب- عزم القصور الذاتي لربع الدائرة:



$$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)r^4$$

$$\therefore \bar{J} = \bar{I}_x + \bar{I}_y$$

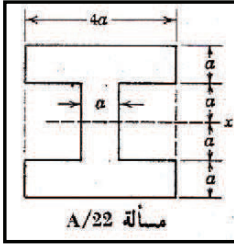
$$\bar{J} = 2\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)(30)^4 = 88903 \text{ mm}^4$$

$$J_A = \bar{J} + Ad^2$$

$$J_A = 88903 + \left(\frac{\pi * 30^2}{4}\right)\left(\sqrt{2} \frac{4 * 30}{3\pi}\right)^2 = 31.81 * 10^4 \text{ mm}^4$$

إذا J_A للشكل المظلل هو:-

$$J_A = 170.67 * 10^4 - 31.81 * 10^4 = 138.9 * 10^4 \text{ mm}^4$$



A/22 أوجد عزم القصور الذاتي للمساحة المظللة

حول المحور x ؟ بطريقتين مختلفتين.

الحل:

أ- الطريقة الأولى:-

نقسم الشكل إلى مركبات منتظمة هندسياً. بحيث يمكن إيجاد عزم قصورها الذاتي حول المحاور المارة بمركزها إضافة إلى إمكانية إيجاد مساحتها ، فيكون:-

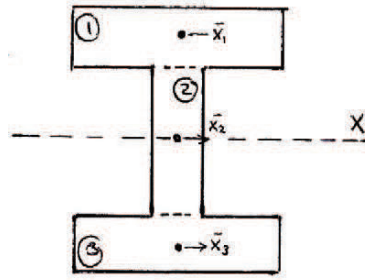
$$I_x = I_{x_1} + I_{x_2} + I_{x_3}$$

$$I_{x_1} = I_{\bar{x}_1} + A_1 d^2$$

$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{12} + A_1 d^2$$

$$I_{x_1} = \frac{4a(a)^3}{12} + (4a * a)(2a - \frac{a}{2})^2$$

$$I_{x_1} = 9.33a^4 = I_{x_3}$$



لاحظ أن d تعني المسافة العمودية بين موقع $\bar{x}_1$ ، وموقع المحور x.

$$I_{x_2} = I_{\bar{x}_2} + A_2 d^2$$

الحد الثاني قيمته صفراً لأن $d = 0.0$. عليه:-

$$I_{x_2} = \frac{bh^3}{12} = \frac{a(2a)^3}{12} = 0.67a^4$$

$$\therefore I_x = 9.33a^4 + 0.67a^4 + 9.33a^4$$

$$I_x = 19.33a^4$$

ب- الطريقة الثانية:-

حيث يتم إيجاد عزم القصور الذاتي للشكل بالكامل ثم يتم طرح المساحات

الغير داخلية في الحساب المظللة في الشكل الذي سيلي:-

عزم القصور للشكل بالكامل هو بمقدار :-

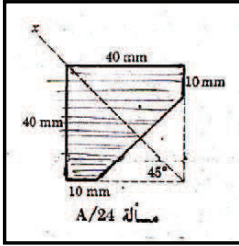
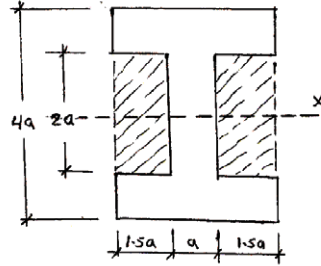
$$\frac{bh^3}{12} = \frac{4a(4a)^3}{12}$$

عزم القصور للأشكال المظلة هي بمقدار :-

$$2 \frac{bh^3}{12} = 2 \frac{1.5a(2a)^3}{12}$$

وبالتالي فإن I_x للشكل المطلوب في المسألة هو :-

$$I_x = \frac{4a(4a)^3}{12} - 2 \frac{1.5a(2a)^3}{12} = 19.33a^4$$



A/24 أوجد عزم القصور الذاتي للمساحة المظلة
حول محور التناظر x بزاوية 45°.

الحل: بنظرية فيثاغورس يتم إيجاد قيمة h

$$40^2 = h^2 + \left(\frac{56.57}{2}\right)^2$$

$$h = 28.28 \text{ mm}$$

يتم تقسيم الشكل المطلوب حساب I_x له إلى مركبتين

هما (1) ، (2) وبذلك يكون :-

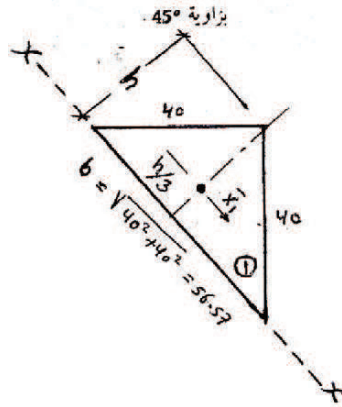
$$I_x = 2I_{x_1} - 2I_{x_2}$$

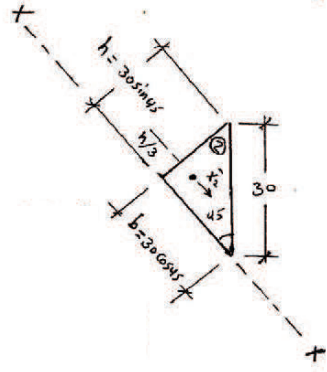
$$I_{x_1} = I_{\bar{x}_1} + A_1 d^2$$

$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{36} + A_1 d^2$$

$$I_{x_1} = \frac{56.57(28.28)^3}{36} + \left(\frac{1}{2} * 56.57 * 28.25\right) \left(\frac{28.28}{3}\right)^2$$

$$I_{x_1} = 19.55 * 10^4 \text{ mm}^4$$





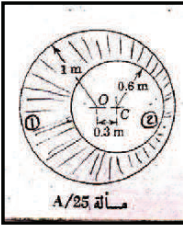
$$I_{x_2} = I_{\bar{x}_2} + A_2 d^2 = \frac{bh^3}{36} + \left(\frac{1}{2}bh\right)\left(\frac{h}{3}\right)^2$$

$$I_{x_2} = \frac{(30 \cos 45)(30 \sin 45)^3}{36} + \frac{1}{2} * 30 \cos 45 * 30 \sin 45 \left(\frac{30 \sin 45}{3}\right)^2$$

$$I_{x_2} = 16875 \text{ mm}^4$$

$$I_x = 2 I_{x_1} - 2 I_{x_2}$$

$$I_x = 2(19.55 * 10^4) - 2(16875) = 35.725 * 10^4 \text{ mm}^4$$



A/25 أوجد عزم القصور الذاتي القطبي للمساحة المظللة حول النقطة O.

الحل: يقسم الشكل إلى مركبتين . المركبة (1) تمثل الدائرة الكبيرة والمركبة (2) تمثل الدائرة الصغيرة. وبذلك يكون قيمة J_O بمقدار :-

$$J_O = J_{O_1} - J_{O_2}$$

عزم القصور الذاتي للدائرة حول المحاور $\bar{x}$, $\bar{y}$ المارة في مركزها هو :-

$$I_{\bar{x}} = I_{\bar{y}} = \frac{\pi r^4}{4} \Rightarrow \bar{J} = I_{\bar{x}} + I_{\bar{y}} = 2\left(\frac{\pi r^4}{4}\right)$$

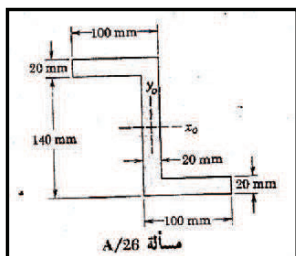
$$\bar{J} = \frac{\pi r^4}{2}$$

$$J_{O_1} = \bar{J}_{O_1} + A_1 d^2 = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi (1)^4}{2} = 1.57 \text{ m}^4 \quad (\text{للدائرة الكبيرة})$$

$$J_{O_2} = \bar{J}_{O_2} + A_2 d^2 = \frac{\pi (0.6)^4}{2} + (\pi * 0.6^2)(0.3)^2 \quad (\text{للدائرة الصغيرة})$$

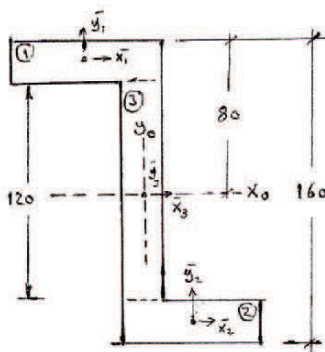
$$J_{O_2} = 0.305 \text{ m}^4$$

$$\therefore J_O = J_{O_1} - J_{O_2} = 1.570 - 0.305 = 1.265 \text{ m}^4$$



A/26 أوجد عزوم القصور الذاتي للشكل Z
حول المحاور المركزية x_0 و y_0 .

الحل: نقسم الشكل إلى ثلاث مركبات كما موضح
في الشكل المجاور وبذلك يكون :-



$$I_{x_0} = I_{x_{01}} + I_{x_{02}} + I_{x_{03}}$$

$$I_{x_{01}} = I_{\bar{x}_1} + A_1 d^2$$

$$I_{x_{01}} = \frac{100(20)^3}{12} + (100 * 20)(80 - \frac{20}{2})^2$$

$$I_{x_{01}} = 9.86 * 10^6 \text{ mm}^4 = I_{x_{02}}$$

$$I_{x_{03}} = I_{\bar{x}_3} + A_3 d^2 = \frac{bh^3}{12} = \frac{20(120)^3}{12} = 2.88 * 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\therefore I_{x_0} = 9.86 * 10^6 + 9.86 * 10^6 + 2.88 * 10^6 = 22.6 * 10^6 \text{ mm}^4$$

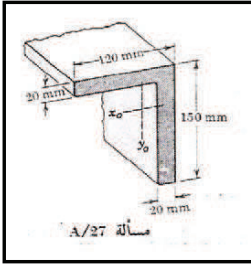
$$I_{y_0} = I_{y_{01}} + I_{y_{02}} + I_{y_{03}}$$

$$I_{y_{01}} = I_{\bar{y}_1} + A_1 d^2 = \frac{20(100)^3}{12} + (100 * 20)(50 - \frac{20}{2})^2$$

$$I_{y_{01}} = 4.86 * 10^6 \text{ mm}^4 = I_{y_{02}}$$

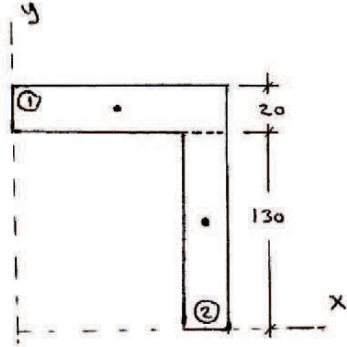
$$I_{y_{03}} = I_{\bar{y}_3} + A_3 d^2 = \frac{bh^3}{12} = \frac{120(20)^3}{12} = 8 * 10^4 \text{ mm}^4$$

$$\therefore I_{y_0} = 4.86 * 10^6 + 4.86 * 10^6 + 8 * 10^4 = 9.8 * 10^6 \text{ mm}^4$$



A/27 احسب عزم القصور الذاتي لمقطع العارضة

حول محورها المركزي X_0 .



الحل: في البداية يجب التعرف على موقع X_0 المار في المركز الهندسي للشكل وذلك من خلال تقسيم الشكل إلى مركبتين ووضعهما ضمن الربع الأول للإحداثيات x , y كما هو عليه في الشكل المجاور.

$$\bar{y} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2}$$

$$\bar{y} = \frac{(150 - \frac{20}{2})(120 * 20) + (\frac{130}{2})(130 * 20)}{(120 * 20) + (130 * 20)} = 101 \text{ mm}$$

$$I_{x_0} = I_{x_{01}} + I_{x_{02}}$$

$$I_{x_{01}} = I_{\bar{x}_1} + A_1 d^2$$

$$I_{x_{01}} = \frac{120(20)^3}{3} + (120 * 20)(49 - \frac{20}{2})^2$$

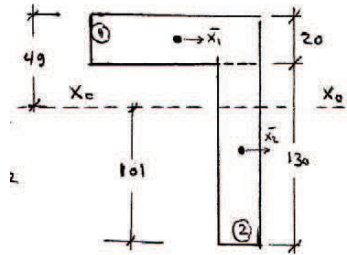
$$I_{x_{01}} = 3.73 * 10^6 \text{ mm}^4$$

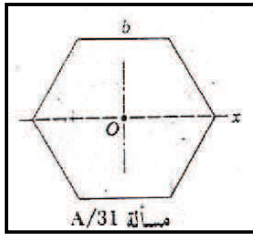
$$I_{x_{02}} = I_{\bar{x}_2} + A_2 d^2$$

$$I_{x_{02}} = \frac{20(130)^3}{12} + (130 * 20)(101 - \frac{130}{2})^2$$

$$I_{x_{02}} = 7.03 * 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\therefore I_{x_0} = 3.73 * 10^6 + 7.03 * 10^6 = 10.76 * 10^6 \text{ mm}^4$$





A/31 استخراج معادلة عزم القصور الذاتي لمساحة الشكل الذي طول ضلعه b حول المحور المركزي x .

$$I_x = I_{x_1} + 4I_{x_2}$$

$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{x_1} = \frac{b(b\sqrt{\frac{3}{4}})^3}{12} = 0.433b^4$$

$$I_{x_2} = I_{\bar{x}_2} + A_2d^2$$

$$I_{x_2} = \frac{bh^3}{36} + A_2d^2$$

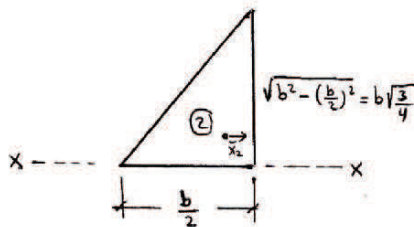
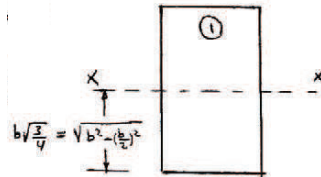
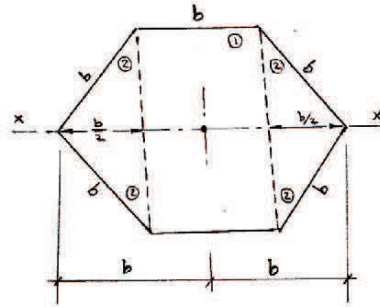
$$I_{x_2} = \frac{(\frac{b}{2})(b\sqrt{\frac{3}{4}})^3}{36} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot b\sqrt{\frac{3}{4}}\right) \left(\frac{1}{3}b\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2$$

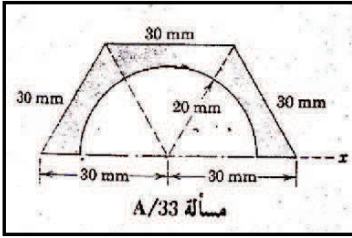
$$I_{x_2} = 0.027b^4$$

$$\therefore I_x = I_{x_1} + 4I_{x_2}$$

$$I_x = 0.433b^4 + 4(0.027b^4)$$

$$I_x = 0.541b^4 = \frac{5\sqrt{3}}{16}b^4$$



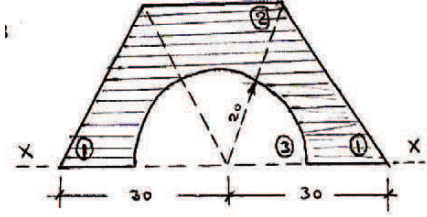


A/32 أوجد معادلة نصف قطر الدوران لمساحة
الشكل السداسي للمسألة A/31 حول المحور
القطبي المار من المركز O.

الحل:

للمثلثين للمثلثين لربع الدائرة
الطرفين الوسطي

$$I_x = 2I_{x_1} + I_{x_2} - 2I_{x_3}$$



للمثلث الطرفي:

$$I_{x_1} = \frac{30(15\sqrt{3})^3}{36} + \left(\frac{1}{2} * 30 * 15\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{3} * 15\sqrt{3}\right)^2$$

$$I_{x_1} = 4.38 * 10^4 \text{ mm}^4$$

للمثلث الوسطي:

$$I_{x_2} = \frac{30(15\sqrt{3})^3}{36} + \left(\frac{1}{2} * 30 * 15\sqrt{3}\right)\left(\frac{2}{3} * 15\sqrt{3}\right)^2$$

$$= 13.15 * 10^4 \text{ mm}^4$$

لربع الدائرة:

$$I_{x_3} = I_{\bar{x}_3} + A_3 d^2 = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)r^4 + A d^2$$

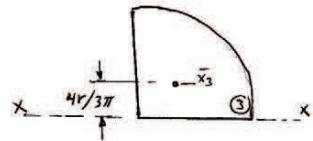
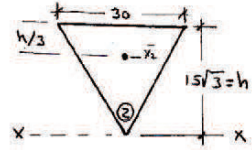
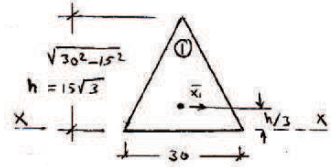
$$I_{x_3} = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)(20)^4 + \left(\frac{\pi * 20^2}{4}\right)\left(\frac{4 * 20}{3\pi}\right)^2$$

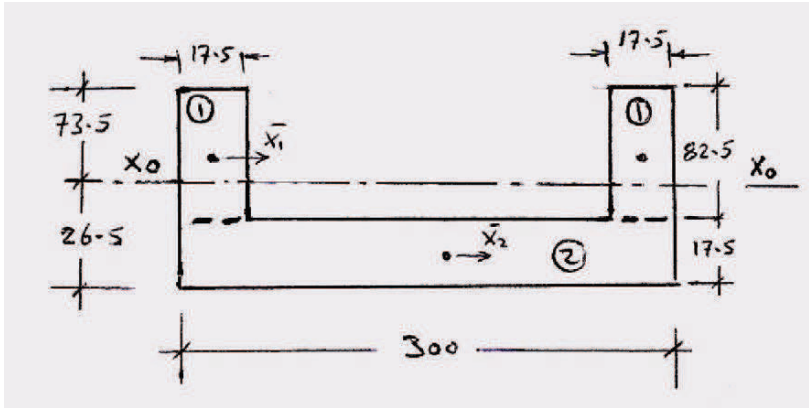
$$I_{x_3} = 3.14 * 10^4 \text{ mm}^4$$

$$\therefore I_x = 2I_{x_1} + I_{x_2} - 2I_{x_3}$$

$$I_x = 2(4.38 * 10^4) + 13.15 * 10^4 - 2(3.14 * 10^4)$$

$$I_x = 15.63 * 10^4 \text{ mm}^4$$





$$I_{x_0} = 2I_{x_{o1}} + I_{x_{o2}}$$

$$I_{x_{o1}} = I_{\bar{x}_1} + A_1 d^2$$

$$I_{x_{o1}} = \frac{17.5(82.5)^3}{12} + (17.5 * 82.5)(73.5 - \frac{82.5}{2})^2 = 2.32 * 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_{o2}} = I_{\bar{x}_2} + A_2 d^2 = \frac{300(17.5)^3}{12} + (300 * 17.5)(26.5 - \frac{17.5}{2})^2$$

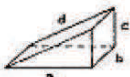
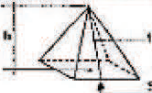
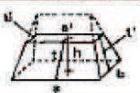
$$I_{x_{o2}} = 1.79 * 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_0} = 2I_{x_{o1}} + I_{x_{o2}} = 2(2.32 * 10^6) + 1.79 * 10^6 = 6.43 * 10^6 \text{ mm}^4$$

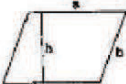
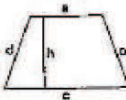
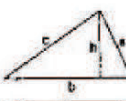
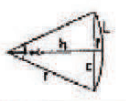
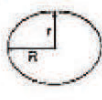
المراجع

- 1- ج.ل. ميريام ، الميكانيكا الهندسية ، إساتيكا، المجلد الأول، دار الكتب الأردني، 1998، الأردن.
- 2- جوزيف شيلي، الميكانيكا الهندسية- إساتيكا، دار ماكجروهيل للنشر، أمريكا، 1980.
- 3- Beer and Johnson, "Vector Mechanics for Engineer statics and dynamics", fourth Edition, McGraw – Hill, USA 1984.
- 4- Fowler , "Statics Engineering Mechanics", Addison – Wesley Publishing , USA ,1995.
- 5- Schaum's Outline Series, "Engineering Mechanics", Fourth Edition, McGraw –Hill, USA , 1988.

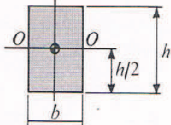
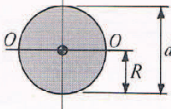
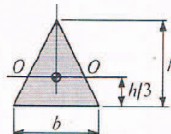
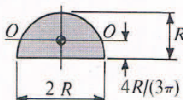
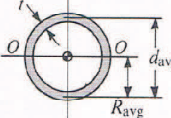
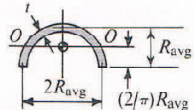
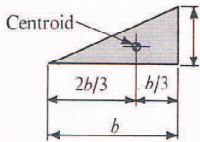
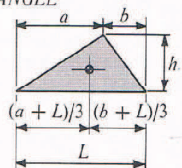
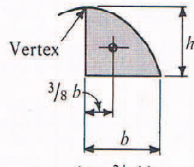
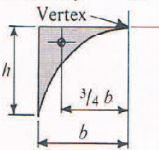
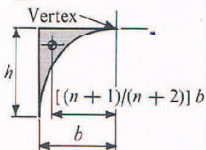
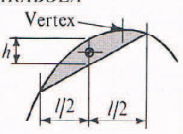
Appendix – A

DENOMINATION	FIGURE	SURFACE	VOLUME
PARALLELEPIPEDE RECTANGLE		$2(ab + bc + ca)$	$a b c$
PRISME DROIT TRIANGULAIRE		$b(a + c + d) + ac$	$\frac{a b c}{2}$
PYRAMIDE		$\frac{1(per S)}{2} + S$	$\frac{h}{3} \times S$
TRONC DE PYRAMIDE		$\frac{1(per S + per s)}{2} + S + s$	$\frac{h}{3} (S + s + \sqrt{S \cdot s})$
TAS DE SABLE		$l(a + a') + l'(b + b') + ab + a'b'$	$\frac{h}{6} [2(a + a') + b(2a' + a)]$
CYLINDRE		$2 \pi R h + 2 \pi R^2$	$\pi R^2 h$
CÔNE		$\pi R s + \pi R^2$	$\frac{h}{3} \pi R^2$
TRONC DE CÔNE		$\pi(n+r)s + \pi(R^2 + r^2)$	$\frac{h}{3} \pi (R^2 + r^2 + R r)$
SPHERE		$4 \pi R^2$	$\frac{4}{3} \pi R^3$

Appendix – B

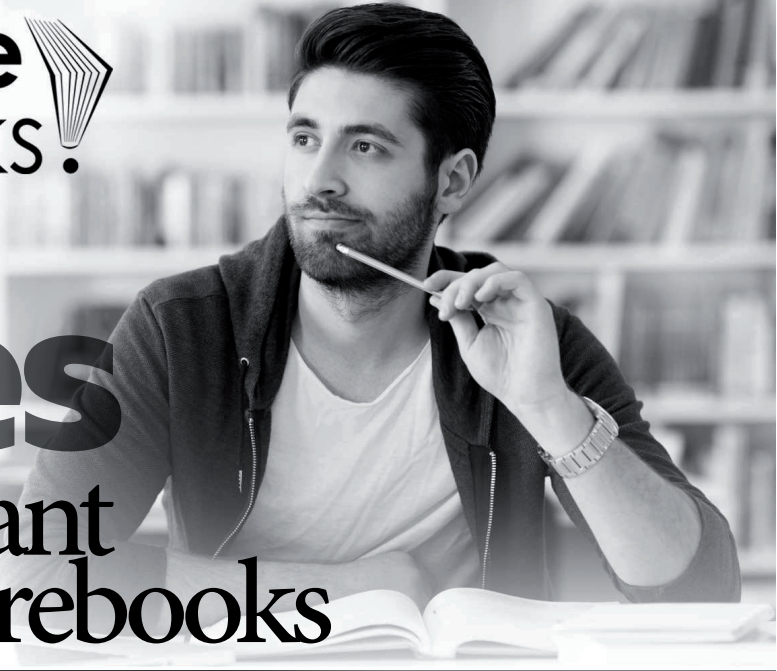
DENOMINATION	FIGURE	PERIMETRE	SURFACE
RECTANGLE		$2(a + b)$	$a \cdot b$
PARALLELOGRAMME		$2(a + b)$	$a \cdot h$
TRAPEZE		$a + b + c + d$	$\frac{(a + c)}{2} h$
TRIANGLE		$a + b + c$	$\frac{b \cdot h}{2}$
CERCLE		$2 \pi r = \pi D$	$\pi r^2 = \frac{\pi D^2}{4}$
POLYGONE REGULIER A n COTES		$n \cdot c$	$\frac{n \cdot c \cdot a}{2}$
SECTEUR CIRCULAIRE		$L = 2 \pi r \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$	$\pi r^2 \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$
SEGMENT		$L + c$	$\pi r^2 \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} - \frac{c \cdot h}{2}$
ELLIPSE		$\pi (R + r)$	$\pi R r$

Appendix – C

AREAS AND MOMENTS OF INERTIA OF AREAS AROUND CENTROIDAL AXES		
RECTANGLE  $A = bh$ $I_o = bh^3/12$	CIRCLE  $A = \pi R^2$ $I_o = J/2 = \pi R^4/4$	
TRIANGLE  $A = bh/2$ $I_o = bh^3/36$	SEMICIRCLE  $A = \pi R^2/2$ $I_o = 0.110R^4$	
THIN TUBE  $A = 2\pi R_{avg}t$ $I_o = J/2 \approx \pi R_{avg}^3 t$	HALF OF THIN TUBE  $A = \pi R_{avg}t$ $I_o \approx 0.095\pi R_{avg}^3 t$	
AREAS AND CENTROIDS OF AREAS		
TRIANGLE  $A = bh/2$	TRIANGLE  $A = hL/2$	PARABOLA  $A = 2/3 bh$
PARABOLA: $y = -ax^2$  $A = bh/3$	$y = -ax^n$  $A = bh/(n+1)$	PARABOLA  The area for any segment of a parabola is $A = 2/3 hl$

More Books!

Yes I want morebooks



اشتري كتبك سريعا و مباشرة من الأنترنت, على أسرع متاجر الكتب الالكترونية في العالم
بفضل تقنية الطباعة عند الطلب, فكتبنا صديقة للبيئة

اشتري كتبك على الأنترنت

www.get-morebooks.com

Kaufen Sie Ihre Bücher schnell und unkompliziert online – auf einer der am schnellsten wachsenden Buchhandelsplattformen weltweit!
Dank Print-On-Demand umwelt- und ressourcenschonend produziert.

Bücher schneller online kaufen

www.morebooks.de

OmniScriptum Marketing DEU GmbH
Bahnhofstr. 28
D - 66111 Saarbrücken
Telefax: +49 681 93 81 567-9

info@omniscrptum.com
www.omniscrptum.com

OMNIscriptum



