# الرسم الهندسى

## ( الإسقاط )

# الهندسة الوصفية

د.م. أحمد محمد القصاص



منتدى سور الأزبكية
www.books4all.net

مكتبة الأنجلو المصرية




المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

# الرسم الهندسى «الإسقاط»

## الهندسة الوصفية

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

# الرسم الهندسى «الإسقاط»
# الهندسة الوصفية

تأليف
**دكتور مهندس / أحمد محمد القصاص**
مدرس الهندسة الصناعية ـ كلية الهندسة

المكتبة نت
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

مكتبة الأنجلو المصرية
١٦٥ ش محمد فريد - القاهرة

## بطاقة فهرسة

فهرسة أثناء النشر إعداد الهيئة المصرية العامة لدار الكتب والوثائق القومية ، إدارة الشئون الفنية .

القصاص ، أحمد محمد

الرسم الهندسى " الاسقاط " : الهندسة الوصفية / تأليف أحمد محمد القصاص. – ط١. –

القاهرة : مكتبة الانجلو المصرية ، ٢٠٠٦ .

٣٥٢ ص ، ٢٠ × ٢٨ سـم

١- الهندسة الوصفية أ- العنوان

٢- الرسم الهندسى

رقم الإيداع : ٤٤١٩

ردمك: ٦-٢٢٢٣-٠٥-٩٧٧ تصنيف ديوى :٥١٦,٦

النـاشـر : مكتبـة الإنجلـو المصريـة

١٦٥ شارع محمد فريد

القـاهرة – جمهوريـة مصر العربيـة

ت : ٣٩١٤٣٣٧ (٢٠٢) ؛ ف : ٣٩٥٧٦٤٣ (٢٠٢)

E-mail : angloebs@anglo-egyptian.com

Website : www.anglo-egyptian.com


www.Maktabah.Net

# إهـداء

إلى أبى الغالى الذى تفانىً وضحى بكل شىء حتى أكون أحسن الناس

وجعلنى دائما أبحث عن مسلكى الصحيح

وروح أمى التى قالت يوما ما /لن تكون إلا كذلك

وروح جدى الذى وهبنى العمق والأصالة ومنحنى الأسباب

وزوجتى التى ضحت من وقتها حتى أتفرغ لهذا العمل

وإلى

أستاذى الأستاذ الدكتور/توفيق توفيق الميدانى

وأستاذى الأستاذ الدكتور/أحمد البهلول

وإلى

كل من حاول ولم يصل

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

# محتويات الكتاب


**الباب الأول: تمهيد** 23

**الباب الثانى : الإسقاط العمودى**

مبادئ الإسقاط 27

**الباب الثالث: النقطة**

تمثيل النقطة فى الفراغ 35

التمثيل الوصفى للنقطة 36

التماثل 38

طبيعة الإسقاط فى الهندسة الوصفية والرسم الهندسى 39

**الباب الرابع: المستقيم**

المستقيم العام 47

الأثر الأفقى للمستقيم : ( Horizontal ) 48

الأثر الرأسى للمستقيم : ( Vertical ) 49

الأثر الجانبى للمستقيم : ( Side ) 50

إستنتاج الأثار من المساقط للمستقيمات 50

إستنتاج المساقط للمستقيمات من الأثار 53

الأوضاع الخاصه بالمستقيمات 54

الطول الحقيقى للمستقيم 58

علاقة النقطة بالمستقيم الواقعة عليه (شرط وقوع نقطة على مستقيم ) 60

العلاقة بين أى مستقيمين فى الفراغ 60

نظرية توليد المستقيمات 62

إيجاد الإحداثيات الناقصة للنقاط بإستخدام قاعدة توليد المستقيمات 63

تطبيقات 65

أوضاع المستقيمات فى الفراغ والإسقاط من منظور الرسم الهندسى 82

**الباب الخامس: المستوى**

أثار المستوى 97

تمثيل المستوى 98

الأوضاع الخاصة للمستوى 100

| | |
|---|---|
| علاقة المستقيم بالمستوى الواقع فيه | 109 |
| علاقة المستقيم الأفقى بالمستوى الواقع فيه | 111 |
| علاقة المستقيم الوجهى بالمستوى الواقع فيه | 112 |
| إستخدامات المستقيمات الأفقية و الوجهية | 112 |
| إيجاد الإحداثيات الناقصة للنقاط | 113 |
| أمثلة | 115 |
| المستقيم ذو الميل الأعظم | 118 |
| تمرير مستوى بالمستقيم | 121 |
| أمثلة | 122 |
| أوضاع المستويات فى الفراغ والإسقاط من منظور الرسم الهندسى | 125 |


## الباب السادس: الموضع


| | |
|---|---|
| التوازى بين المستقيم والمستوى | 139 |
| رسم مستوى يوازى مستوى من نقطة معلومة | 140 |
| رسم مستوى ممثل بمستقيمين يوازى مستوى ممثل بمستقيمين من نقطة معلومة | 140 |
| خط تقاطع مستويين يوازى أحدهما أحد مستويات الإسقاط | 141 |
| خط تقاطع مستويين متعامدين على أحد مستويات الإسقاط | 144 |
| نقطة تقاطع مستقيم مع المستوى العام | 146 |
| نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى خطى المسقط | 147 |
| خط تقاطع مستويين أحدهما مستوى خطى المسقط والأخر ممثل بمستقيمين (بمجرد النظر) | 149 |
| نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى ممثل بمستقيمين (متقاطعين أو متوازين) | 150 |
| خط تقاطع مستويين كلاهما ممثل بمستقيمين | 151 |
| خط تقاطع مستويين بإستخدام مستويات مساعدة | 152 |
| خط تقاطع مستويين كلاهما ممثل بمستقيمين ' بإستخدام إسلوب خط تقاطع | 153 |
| خط تقاطع مستويين أثارهم تتلاقى فى نقطة واحدة على خط الارض | 154 |
| قاطع لمستقيمين شماليين ويمر بنقطة معلومة | 157 |
| قاطع لمستقيمين شماليين ويوازى إتجاه معلوم | 158 |
| النقطة المشتركة بين الثلاث مستويات $\alpha, \beta, \gamma$ | 159 |
| تحديد الظاهر والمختفى فى الإسقاط | 161 |
| أمثلة محلولة | 162 |

## الباب السابع: الإسقاط المساعد


| | |
|---|---|
| الإسقاط المساعد للنقطة | 171 |
| الإسقاط المساعد للمستقيم | 172 |
| إيجاد الطول الحقيقي للمستقيم | 174 |
| أمثلة | 177 |
| تحويل المستقيم إلى نقطة | 181 |
| أمثلة | 182 |
| قاطع لمستقيمين شماليين ويوازى إتجاه معلوم | 185 |
| الزاوية الزوجية بين مستويين ( الطريقة الأولي ) | 186 |
| تحويل المستوى إلى مستوى خطى المسقط | 187 |
| أمثلة | 189 |
| جعل مستوى موازيا لمستوى المسقط | 193 |
| أمثلة | 195 |


## الباب الثامن: القياس


| | |
|---|---|
| التعامد بين المستقيمات والمستويات | 203 |
| تمثيل المستقيم العمودي من نقطة معلومة N على مستوى معلوم $\alpha$ | 203 |
| تمثيل مستوى يمر بنقطة معلومة N وعمودي على مستقيم معلوم | 204 |
| تمثيل مستوى يمر بمستقييم معلوم وعمودى على مستوى معلوم | 205 |
| أقصر بعد بين مستويين متوازين أقصر بعد بين مستقيمين متوازيين المحل الهندسي للنقط متساوية البعد عن نقطـــتين A,B رسم مستوى يوازي مستوى ويبعد عنه مسافة معين | 208 |
| بعد نقطة N عن مستوى $\alpha$ | 206 |
| أمثلة | 208 |
| الدوران | 218 |
| دوران النقطة | 218 |
| إستخدام الدوران فى الحصول على الطول الحقيقى للمستقيم | 220 |
| إستخدام الدوران فى الحصول على الشكل الحقيقى للمستوى | 224 |


## الباب التاسع: الدائرة


| | |
|---|---|
| تعريف الدائرة فى الهندسة المستويه | 235 |
| التمثيل الوصفى للدائرة فى المسقط الرأسى والأفقى | 237 |




www.Maktbah.Net

التفسير الوصفى لإسقاط المحورالأكبرفى الدائرة 237
التفسير الوصفى لإسقاط المحورالأصغر للدائرة 241
تعيين قيمة المحور الأصغر 242
طرق رسم القطع الناقص 243
أمثلة 245

**الباب العاشر: الكرة**
الكرة فى الفراغ والإسقاط 259
إستنتاج المسقط الناقص للنقاط على سطح الكرة 261
تمثيل المستوى المماس للكرة 264
تمثيل تقاطع المستوى مع الكرة 268
تطبيقات تقاطع المستوى مع الكرة 269
نقطة تقاطع مستقيم مع الكرة 280

**الباب الحادى عشر: كثيرات السطوح**
وصف كثيرات السطوح 289
تمثيل القاعدة والأحرف فى كثيرات السطوح 291
تمارين 292
تعين مضلع التقاطع 302
إيجاد مضلع التقاطع بإستخدام المستوى العمودى خطى المسقط 303
بإستخدام الإسقاط المساعد 305
التألف المركزى والمتوازى 307
تعين مضلع التقاطع بإستخدام التألف 309
إفراد كثيرات السطوح 311
نقطة تقاطع المستقيم مع كثيرات السطوح 323

**الباب الحادى عشر: بعض النظريات الهامة في الهندسة المستوية** 329

www.Maktbah.Net

# المؤلف

عزيزى القارىء ماهى حياتك وماهى الإستفادة من ما تفعله وهل لك هدف أم لا وهل أنت صاحب قضية وهل أنت صاحب رأى وهل أنت إنسان تأكل وتشرب أولا أم تحيا ليحيى معك البشر وتعيش فى التاريخ. يجب أن نعلم أن أستاذ الجامعة منظومة من الأخلاق والعلم والمبادىء من شأنه أن يُغير الواقع تغيرا إرتقائيا ليتغير هو فى مجرى تغيره للواقع شريطة أن يُقدم للمجتمع من هو أفضل منه خُلقا وعلما– فهل أنت ممن قيل عنهم " خير الناس أنفعهم للناس" أو " دنيا سكك حافظ على مسلكك ..... أهلك لاتهلك إنت بالناس ترتقى" إن كنت كذلك فسوف تفعل للناس ماينفعهم ولن تفعل للناس وهم أهلك ماينفعهم إلا إذا كنت تؤمن بالله الواحد القهار ورُسله. وإن كنت كذلك فإنه يكون لديك ماتعطيه للناس ولاتبحث عن ما تأخذ من الناس ، فتبزل الغالى والنفيس فى خدمة مجتمعك والبشرية وتعمل بمبدأ الحديث الشريف ..أعمل لدنياك كأنك تعيش أبدا وأعمل لأخرتك كأنك تموت غدا. ومن هذا المبدأ ، فقد أجتهدت فى عمل هذا الكتاب راجيا من الله أن يُسهل به على كل متعسر فى فهم المادة كعلم وكمنهج ويرحمهم من تكبر وتعالى من يُدرسوا هذه المادة دون فهم ووعى ويسهل على كل أستاذ أن يعى ما يقول ويكون لديه الطريق والتسلسل العلمى والفكرى لتتابع العمليات بالنسبة لفكر الطالب، وخاصة أنها طُبقت على شريحة كبيرة من الطلاب وتمت الإستفادة من تعثراتهم فى فهم الأمور لإعادة ترتيب عرض البنود. وقد فضلت أن أشرح هذا الكتاب بإسلوب الحديث مع الطالب وكأنه يجلس أمامى أشرح له. وقد أطلقت أسم يخصنى على هذا العلم وهو *علم الكلام وتفسير الأحلام* ، لأن هذا العلم يعتمد على الكلام أكثر بكثير من الأرقام وتأتى الصعوبة عندما يقرأ الطالب الأرقام ويترك الكلام. لذلك عند المُذاكرة يجب جيدا أن ترى الأساسيات وتعرف كيف تم وصفها ومميزاتها حتى تستطيع أن تستغلها جيدا. لذا فلقد حاولت أن أسهل على الناس كل ماأستطعت عليه فى هذا العلم وليعلم القارىء أننى الذى كتبت الكتاب بنفسى وكذلك التمارين الموجودة فيه وإن كان هناك أى خطأ فأرجو أن تراسلونى على عنوانى البريدى أو هاتفيا حتى يمكن تصحيح أى خطأ وأسألكم الدعاء فأنا لم أبغى من هذا الكتاب إلا أن أسهل على الناس طلاب وأساتذة فهم هذا العلم.

دكتور مهندس/ أحمد محمد القصاص

مدرس الهندسة الصناعية – كلية الهندسة

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

# المقدمة

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

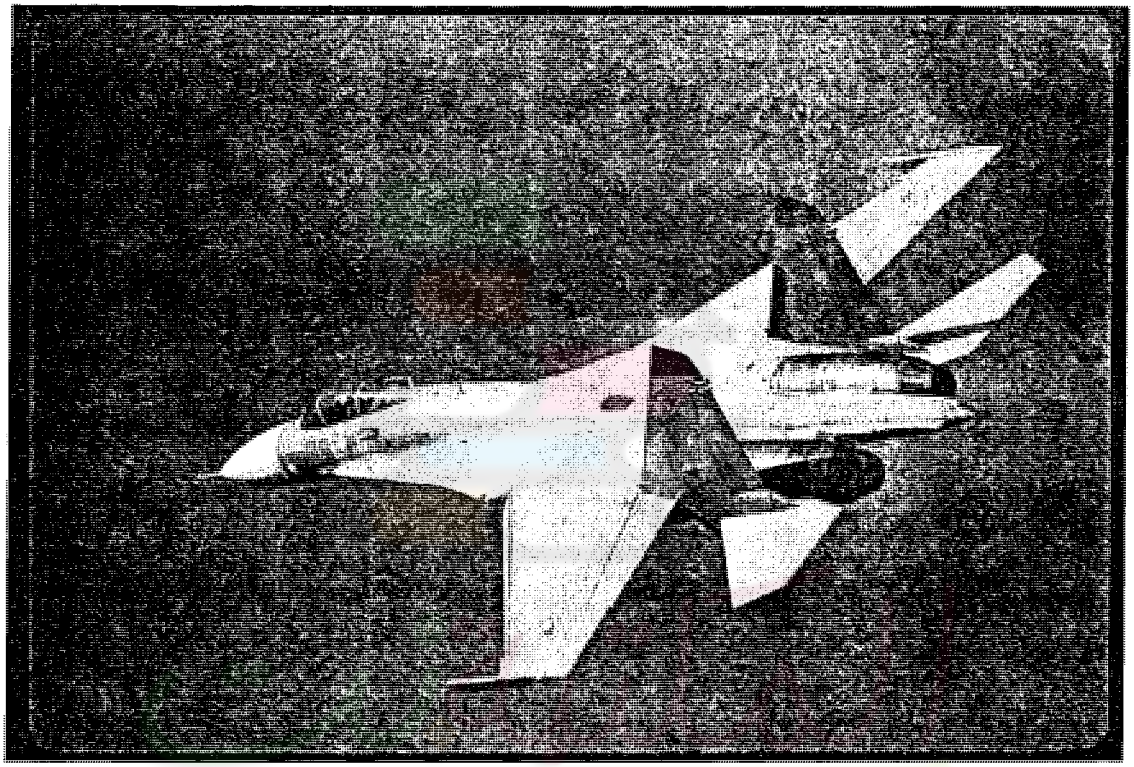
المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

# المقدمة

هذا الكتاب هو مؤلف فى علوم الإسقاط لمكونات الأجسام وكذلك الأجسام بأنواعها وهى ماتسمى بالهندسة الوصفية. وقد يغيب عن البعض أو يسأل كثيرا من الطلاب السؤال المعتاد لماذا ندرس هذا العلم وماهى الفائدة من دراسة هـذا العلم. والإجابة على هذا السؤال أعتبرها أنا شخصيا حضارة الأمة الماضى والحاضر. ففى الماضى فعلها الفراعنة وجعلونا فوق الأعناق كأصحاب تاريخ وحضارة وصنعوا لنا أهرامات ظل وسيظل العالم على تقدمه يتمنى أن يعلم كيف فعلوها وحولوها من إسقاط على أوراق البردى إلى أجسام فاعلة تنير خطى العالم من ناحية وتُشعره بعجزه من ناحية أخـرى. صنعوا سفن الشمس وصنعوا الأدوات الحربية وصنعوا المسلات وكلها أجسام ذات صفات كثيرة. والعالم الأن يصـنع الكثير، فرمز دولة الكويت تجده مخروط ومتوسطه كرة. صناعات كثيرة من طائرات وسفن وأجهزة معقـدة الشـكل الخارجى وكلها تُرسم على الورق أولا ثم تُحول للواقع بعد ذلك. ولكى نتعامل مع مجرد الفكرة التى تأتى للمصمم لابد أن يصيغها وصفيا (كوصف للفكرة من خلال خطوط عريضة، ثم يبدأ فى وضع هيكل عام للفكرة، ثم يبـدأ فى رسمهـا تفصيليا فى إتجاهات متعددة حتى تتضح رؤيتها من بعض الإتجاهات. والإجابة النهائية تكون فى كيفيـة تحويـل مـاعلى الأوراق إلى حقيقة. وليتم ذلك سنفعله بخامات نأتى بها وفى الغالب تكون خامات مسطحة ، أوراق مفرودة، ألواح من المعادن، وغيرها. ولكن يبقى أن نعرف ماهو الشكل الذى يجب أن نقطع علية الألواح حتى تتحول عند تشـكيلها إلى الشكل النهائى الذى صممناه. هذا يتطلب أن تكون الأجسام المُصممة مفرودة على الورق ومعلوم مساحاتها وشـكلها وكذلك التقاطعات الموجودة فيها أى إفراد كامل لها.

إفراد السطوح تعتبر من الموضوعات الهامه فى الحياة العملية وهى تلخص ماسعينا لتعلمه من بداية هـذا العلـم. والأمثلة كثيرة على ذلك، لأننا عندما نصمم جسما فإن هذا الجسم له أبعاده الخارجية وأشـكاله وكـذلك كـثيرات السطوح والسطوح الدورانية كما فىالشكل الوضح، الجزء الأمامى من الطائرة وكيفية أنه يتكون من أكثر من جـزء منحنى. وكمثال أخر فى مداخن المصانع هى إسطوانات متقاطعة وهى كانت فى الأصل قبل التصنيع ألواح من الصـاج لذلك كانت الخطوة الأولى بعد التصميم هى معرفة مساحة الألواح الصاج التى سيتم قطعها مفرودة ومسطحة بحيـث يكون شكلها عند التصنيع والتطبيق تعطى الشكل الذى تم تصميمه. وقِس على ذلك كل الأشكال التى تُصـمم مـن

أجسام الأجهزة والمعدات وعبوات التعبئة والعلب الكرتون التى توضع بها البضائع. ومن هنا ظهر أهمية هذه الجزء من العلم والتى يجب على المهندس تعلمه جيدا. حيث وجب على طالب كلية الهندسة أن يجيد هذا العلم. وإننى شخصيا أُرجع التأخر فى عملية التصنيع فى الدول النامية إلى أن المهندسين لايجيدوا هذا العلم ويتركوه للفنيين ( الصنايعية) للعمل فيه بالشبهه أو بالقياس. وأخيرا يُستغل فى إيضاح مستويات بعض المناطق على الخرائط وتطبيقات الإسقاط المرقوم وخاصة فى المساحة الجوية.



لذلك فأنا أنصح المهتمين ومخططى الدولة والصناعة أن يُعطوا هذا العلم مزيدا من الأهمية والفاعلية وكذلك إيفاد البعثات للتعلم فى هذا الإتجاه حتى نعلم كيف نُنتج مانفكر فيه ونتطور أكثر من الوضع الذى أصبحنا عليه.

## علم الهندسة الوصفية

علم الهندسة الوصفية هو علم يهتم بإسقاط مكونات الأجسام سواء النقطة أو المستقيم أو المستوى وكذلك تعاملهم مع بعض من ناحية التوازى والتعامد والتقاطع وتكون الأجسام وإفرادها وتقاطع الأجسام مع بعضها وغيره من التعاملات بينهما. لذلك فإن هذا الكتاب يتناول الموضوعات الأتية:

**الباب الأول:تمهيد**

يوضح طبيعة العمل ونوع الرموز المستخدمة والأنواع المختلفة من الإسقاط

**الباب الثانى: الإسقاط العمودى**

وفيه يتم التعريف للفراغ الهندسى وطبيعته فى التعامل معه سواء فى الرسم الهندسى أو الهندسة الوصفية، ثم طبيعة الإسقاط العمودى على المستويات.

**الباب الثالث: النقطة**

وفيه يتم تعريف النقطة فى الإسقاط ووضعها فى الفراغ وكذلك كيفية إسقاطها سواء كان من منظور الهندسة الوصفية أو الرسم الهندسى

**الباب الرابع: المستقيم**

وفيه يتم تعريف المستقيم فى الفراغ ثم تمثيل المستقيم وأوضاعه الخاصة وكذلك العلاقة بين المستقيمات وبعضها ثم الإسقاط الكامل لأوضاع المستقيمات على مستويات الإسقاط، ثم يشرح نظرية توليد المستقيمات من خلال علاقة النقطة بالمستقيم، وأخيرا أوضاع نفس المستقيمات فى الفراغ من منظور الرسم الهندسى.

**الباب الخامس: المستوى**

وفيه يتم تعريف المستوى فى الفراغ ثم تمثيل المستوى وأوضاعه الخاصة وكذلك العلاقة بين المستقيمات الواقعه فى المستوى وبعضها ثم الإسقاط الكامل لأوضاع المستويات على مستويات الإسقاط، ثم يشرح نظرية توليد المستقيمات من خلال علاقة النقطة بالمستقيم ووقوعهم داخل المستوى ، وأخيرا أوضاع نفس ا المستويات فى الفراغ من منظور الرسم الهندسى.

**الباب السادس: الموضع**

وفيه ثلاثة محاور : أولا رسم مستوى يوازى مستوى سواء كان المستوى ممثلا بأثاره أو بمستقيمين ، ثانيا خط تقاطع مستويين بالأوضاع الخاصة للمستويات، ثالثا: نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى متضمنا الأوضاع الخاصة للمستقيمات والمستويات. وهذا الباب تم تقديمه بإسلوب مختلف عن ماسبقونا لسهولة التعامل معه

**الباب السابع: الإسقاط المساعد**

وفيه كيفية التعامل مع المستقيمات لتحويلها لأوضاعها الخاصة التى يظهر فيها طولها الحقيقى ثم الإسقاط المتتالى للوصول لأوضاع المستقيمات الخاصة التى تظهر فيها نقطة، ثم الإسقاط المساعد للمستويات لتحويلها لأوضاعها الخاصة التى تظهر فيها خط المسقط ثم الإسقاط المتتالى للوصول لأوضاع المستويات الخاصة التى تظهر فيها بشكلها الحقيقى. ويشمل هذا الباب تطبيقات كثيرة. وهذا الباب تم تقديمه بإسلوب مختلف عن ماسبقونا لسهولة التعامل معه وفهمه الجيد وتم فيه ذكر بعض الأسرار والمفاهيم التى لم تُذكر من قبل.

**الباب الثامن: القياس**

وفيه ظهر التعامل مع التعامد سواء تعامد مستقيمات على مستويات أو العكس، وكيفية التعامل مع التطبيقات المعتمدة عليها. أيضا يعرض عملية الدوران وكيفية الحصول على الأطوال الحقيقية للمستقيمات والأشكال الحقيقية للمستويات.

**الباب التاسع: الدائرة**

هذا الباب قدم الدائرة بمنظور يخص الطالب لكى يستوعبها سريعا ويخص الأساتذة قليلى الخبرة فى المادة لمعرفة أسرار هذا الباب جيدا وسهولة التعامل مع الدائرة، وخاصة أن معظم المؤلفات السابقة لم تعطى معظمها هذا الباب حقة من ناحية الإيضاح. وفى هذا الباب تم إستغلال الأوضاع الخاصة للمستويات فى تسهيل الفهم والحصول على المعلومة الناقصة بسهولة ويسر.

**الباب العاشر: الكرة**

فى هذا الباب قد إجتهدنا أيضا لنوضح طبيعة الكرة وكيفية التعامل معها وكذلك علاقة الدائرة بالكرة وكذلك علاقة المستوى القاطع للكرة والمستقيمات بدائرة التقاطع.

**الباب الحادى عشر: كثيرات السطوح**

فى هذا الباب تم شرح المادة العلمية وتقديمها بشكل يبعث على الفهم السريع والواضح. وتم إستعراض معظم التطبيقات على كثيرات السطوح من ناحية تمثيلها بأوضاعها المختلف ، تقاطعها مع المستويات، إظهار مضلعات التقاطع، نقاط تقاطع المستقيم مع كثيرة السطوح، ثم أخيرا إفراد كثيرات السطوح والحصول على شكل أوجهها ومضلعات التقاطع معها الحقيقية.

**الباب الثانى عشر:**

وفيه النظريات الهامة فى الهندسة المستوية والهندسة الفراغية والتى سنعتمد عليها فى كثير من العمليات الخاصة.

هذا الجزء من المؤلف هو الجزء الأول من الكتاب والذى تجاوز إعداده أربع سنوات حيث قمت شخصـــيا بالتـــأليف والكتابة والرسم بإستخدام الحاسب الألى، لذلك أرجو من الله أن يكون عونا للطلاب ونحاول الأن الإعداد للجزء الثانى من هذا الكتاب وإضافة مالم يتم شرحه فى هذا الجزء.

المكتبة نت
خـــير جليس في الـزمان كـــتـــاب
www.Maktbah.Net

دكتور مهندس/ أحمد محمد القصاص

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

# الباب الأول

## التمهيد

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

# التـــمـــهـــيـــد

## الهندسة الوصفية

علم الهندسة الوصفية هو علم يهتم بإسقاط مكونات الأجسام سواء النقطة أو المستقيم أو المستوى بأوضاعها الخاصـــة والعامة وكذلك تعاملهم مع بعض من ناحية التوازى والتعامد والتقاطع وتكون الأجسام وإفرادها وتقاطع الأجسام مع بعضها وغيره من التعاملات بينهما.

### الرموز المستخدمة

يتم فى هذا العلم إسقاط كل من النقاط والمستقيمات والمستويات، لذلك سنستخدم رموز خاصة للتعبير وتمثيـــل كـــل منهما كالأتى:

بالنسبة للنقاط: نستخدم الحروف الإنجليزية الكبيرة **A,B,C,D,.....**

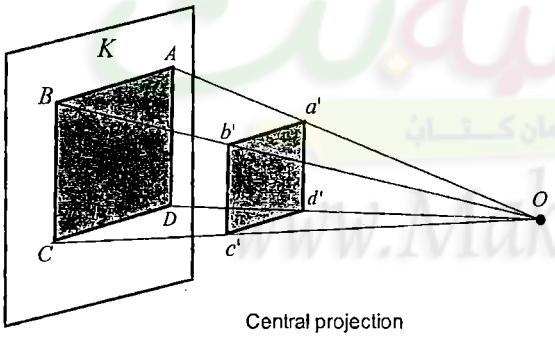
بالنسبة للمستقيمات: نستخدم الحروف الإنجليزية الصغيرة **a,b,c,d,e,f,.....**

بالنسبة للمستويات : نستخدم الحروف $\alpha,\beta,\delta,\gamma,\lambda,\pi,\psi,\eta,...$

### طرق الأسقاط المختلفة

#### الإسقاط المركزى

هو أكثر أنواع الإسقاط توضيحا للمجسمات الطبيعية وفيه نتصور إسقاط الجسم من نقطة ثابتة فى الفراغ **O** تســـمى مركز الإسقاط ويكون المســـتوى رأســـيا ويســـمى مستوى الإسقاط $k$ ويكون الخط الواصل بـــين أى نقطة فى الفراغ مثل **A** ومركز الإسقاط **O** تســـمى شعاع الإسقاط الخاص بالنقطة **A** وهـــذا الشـــعاع يلاقى المسنوى فى $\bar{a}$ والتى تسمى المسقط المركـــزى للنقطة **A** . ويوضح الشكل المقابل الإسقاط المركزى للنقاط **A,B,C,D** ويعتبر هذا النوع من الإســـقاط الأكثـــر إستخدام فى مجال العمارة حيث يحاكى الصورة التى ترى بها العين الجسم.

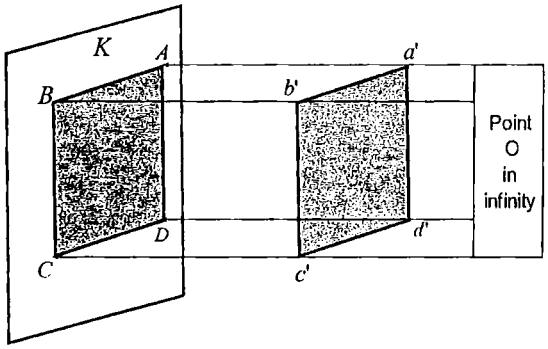


Central projection

www.Maktbah.Net

## الإسقاط المتوازى

فى هذا النوع من الإسقاط تتوازى أشعة الإسقاط ويسخدم هذا النوع من الإسقاط فى تعيين الظلال لأن الأشعة المنبعثة من مصدر الضوء الكونى مثل الشمس أو القمر يُعتبر على بعد لانهائى وتكون متوازية وهى التى تعين إتجـــاه الإضاءة فى مسائل الظلال والشكل المقابـــل يوضـــح الإسقاط المتوازى للشكل الرباعى **ABCD** علـــى المستوى **k** ينتج إسقاط هذا الشكل **abcd** .




## الإسقاط العمودى (الإسقاط المرقوم أو الرقمى)

فى هذا النوع من الإسقاط يتم الإسقاط على مستوى واحد فقط ويستعمل بصفة عامة فى خرائط المساحة الطبوغرافية والتى يمكن بواسطتها تمثيل سطح الأرض الغير منتظمة

## الإسقاط الإكسونومترى

هو إسقاط متوازى على مستوى مائل على الإتجاهات الرئيسة (الإحداثيات الثلاثة **X,Y,Z** )

## الإسقاط العمودى ( مونج)

فهو أسهل وأبسط طرق الإسقاط فى تحديد الأبعاد الطبيعية والأشكال الهندسية ويعتبر أكثر الأنواع السابقة إقتصادا وتوفيرا فى الوقت

المكتبة نت
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

# الباب الثانى

# الإسقاط العمودى

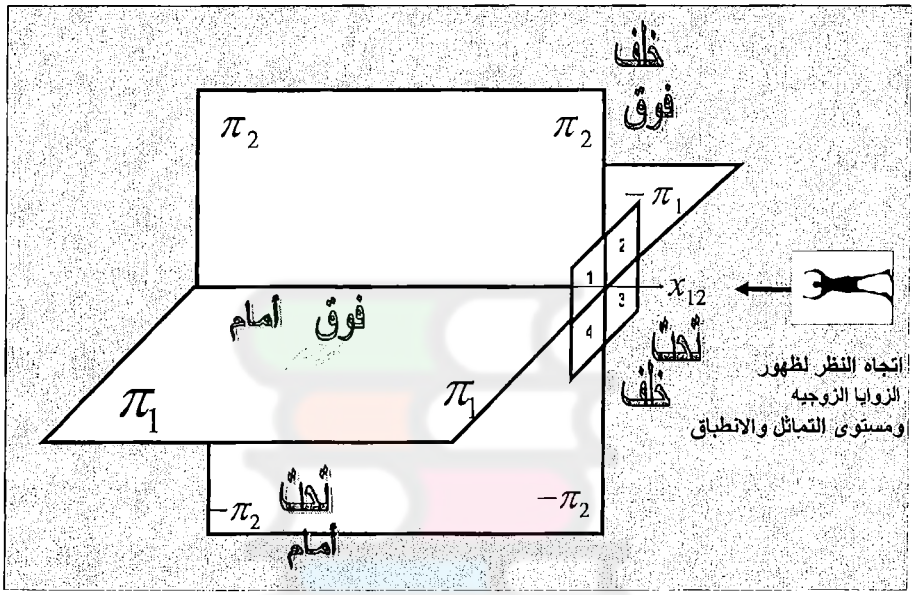
www.Maktbah.Net

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

# الإسقاط العمودى

## مبادئ الإسقاط

يعتبر العالم الفرنسى جاسبار مونج أول من وضع أسس الإسقاط العمودى (1746-1818) ، لذا سمي الإسقاط بإسقاط مونج نسبة إليه.

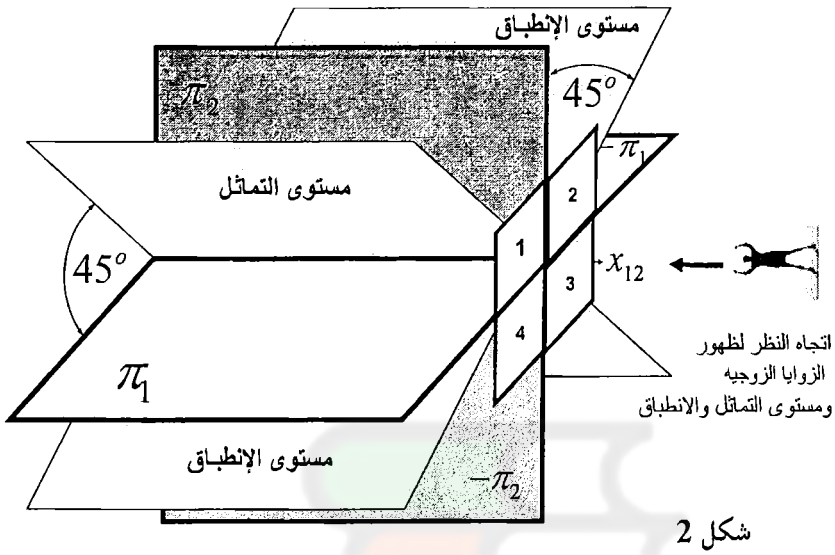



فى هذا النوع من الإسقاط نستعمل مستويين متعامدين للإسقاط أحدهما أفقى ويعرف بالمستوى الأفقى $\pi_1$ ، والأخر رأسى ويعرف بالمستوى الرأسى $\pi_2$ وخط تقاطعهما يسمى خط الأرض X، شكل 1. وبهذا الشكل عندما يمتد كل من المستويين لمالا نهاية فإنهما يقسما الفراغ لأربع فراغات متساوية ويطلق عليها الزوايا الزوجية. الزاوية الزوجية الأولى وتقع أمام المستوى الرأسى وفوق المستوى الأفقى 1 ـ ، الزاوية الزوجية الثانية وتقع خلف المستوى الرأسى وفوق المستوى الأفقى 2 ـ ، الزاوية الزوجية الثالثة وتقع خلف المستوى الرأسى وتحت المستوى الأفقى 3 ـ ، الزاوية الزوجية الرابعة وتقع أمام المستوى الرأسى وتحت المستوى الأفقى 4 ـ كما هو واضح فى الشكل 1.

يجب أن نعلم أن الجزء من المستوى الأفقى الموجود أمام المستوى الرأسى هو المستوى الأفقى الموجب $\pi_1$ ، بينما الجزء من المستوى الأفقى الموجود خلف المستوى الرأسى هو المستوى الأفقى السالب $-\pi_1$ . وكذلك بالنسبة إلى جزء المستوى الرأسى الموجود فوق المستوى الأفقى فهو الجزء الموجب من المستوى الرأسى $\pi_2$ ، أما جزء المستوى الرأسى الموجود تحت المستوى الأفقى فهو الجزء السالب من المستوى الرأسى $-\pi_2$ .

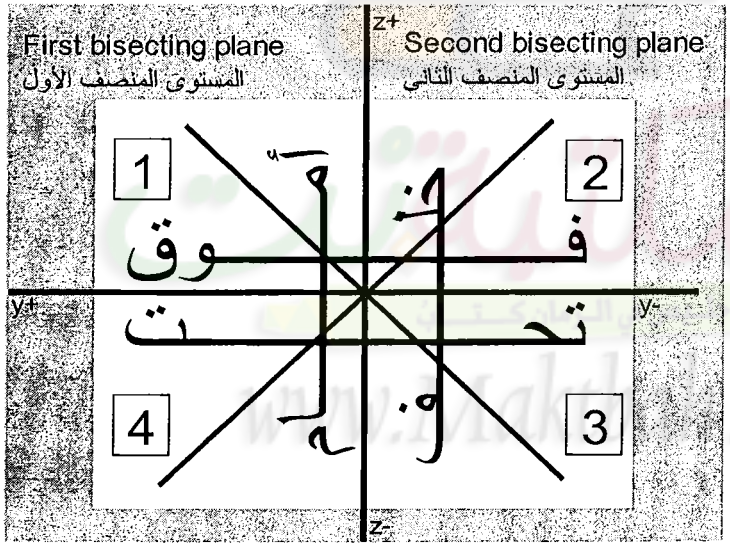
يجب أن نلاحظ فى الشكل الموضح شكل 2 أن الزوايا الزوجية التى تحدثنا عنها يتعامل معها مستويات أخرى مثل المستوى المنصف الأول وهو يسمى مستوى التماثل وهو مستوى يمر بين المستويين

الرأسى والأفقى ويميل عليهما ميل متساوى بقيمة $45^o$ وينصف الزاوية الأولى والثالثة.وكذلك المستوى المنصف الثانى وهو يسمى مستوى الإنطباق وهو مستوى يمر بين المستويين الرأسى والأفقى ويميل عليهما ميل متساوى بقيمة $45^o$ وينصف الزاوية الثانية والرابعة، وقد سمى الإنطباق لأنه هو الذى ينطبق عليه كل من المستويين الأفقى والرأسى كما تحدثنا سابقا حتى ينطبقوا ويتم الإعتماد عليهم فى وصف الفراغ ثلاثى الأبعاد داخل مستوى الورقة ذات البعدين.




شكل 2

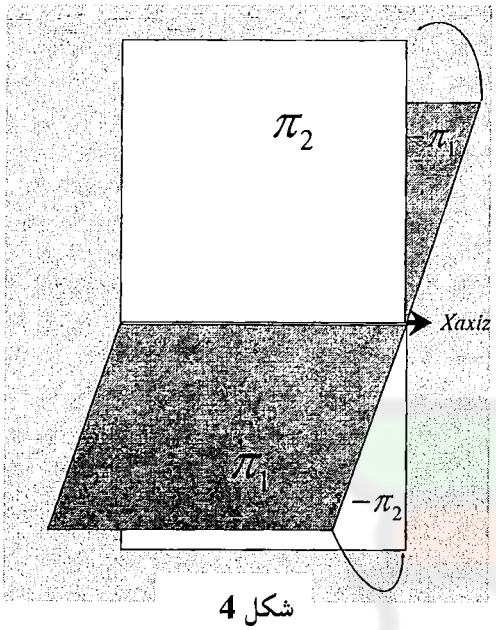
وعند النظر فى الشكل 2 عموديا على خط الأرض فإن خط الأرض يظهر نقطة فى شكل 3 وتظهر هذه المستويات خطوط تُنصف الزوايا بين مسقطى كل من المستوى الأفقى والرأسى كما فى شكل3 وتظهر الزوايا الزوجية كاملة وكذلك أوضاع مستويات التماثل والإنطباق بالنسبة للمستويين الرأسى والأفقى وهذا ما سنتحدث عنه فى إسقاط النقطة وكذلك يتضح أيضا فى إسقاط المستوى.




شكل 3

وتبقى المشكلة فى كيفية التمثيل الفراغى لمستويات الإسقاط على ورقة لاتملك سوى بعدين. هذه المشكلة يمكن حلها بإحداث إنطباق لمستويى الإسقاط على بعضهما شكل 4 حيث يتم دوران كل من

المستويين الأفقى الرأسى حول محور X فينطبق الجزء الموجب من المستوى الرأسى على الجزء السالب من المستوى الأفقى والعكس صحيح كما فى شكل 4.



شكل 4

كما تعلمنا سابقا أن الفراغ محدود بثلاث محاور x, y, z وهذة المحاور تشكل ثلاث مستويات متعامده ناتجه من إتحادهما كما فى شكل 1 ، لذا تم إضافة المستوى العمودى الجانبى وهو عمودى على كل من المستويين الأفقى والرأسى. ومن وضع المستوى الجديد أصبح الفراغ مقسم لثمانى أجزاء ، حيث كل زاوية زوجية مقسمة لجزئين أحدهما موجب والأخر سالب. نجد إتحاد محورى x و y يكونا المستوى الافقى والذى يرمز له بالمستوى $\pi_1$ ، وإتحاد x z يشكل المستوى الراسى $\pi_2$ ، أما إتحاد y وz يشكل المستوى المتعامد عليهما وهو المستوى الجانبى $\pi_3$ ويتضح ذلك من شكل 1.

ومن طبيعه المستويات الثلاثه المتعامده نجد أن المستوى $\pi_1$ يتقاطع مع $\pi_2$ فى خط يسمى X وهو ناتج من تقاطع 1 مع 2 لذلك يسمى $X_{12}$، وايضا $\pi_2$ يتقاطع مع $\pi_3$ فى خط يسمى Z وهو ناتج من تقاطع 3 مع 2 لذلك يسمى $Z_{23}$، وايضا $\pi_1$ يتقاطع مع $\pi_3$ فى خط يسمى Y وهو ناتج من تقاطع 3 مع 1 لذلك يسمى $Y_{13}$. هذه الخطوط تسمى المحاور الكرتيزيه والخط $X_{12}$ يسمى خط الأرض وهو الذى يظل بهذا التعريف لأن هناك خطوط أرض أخرى ستظهر بعد ذلك تأخذ أرقام أخرى أما كل من y و z فلن نحتاج لأرقام مرافقه لهما لأنه لن يتواجد مثيل لهما بعد ذلك .

وتتضح طبيعه المستويات الثلاثه المتعامده مع إمتدادها فى شكل 5 حيث تتمدد المستويات لتعطى كل أبعاد المستويات وتقاطعها. فمثلا إذا رمزنا للأرض بأنها المستوى الأفقى فهذا يعنى أن لها فوق وتحت " فهناك أشياء فوق الارض و أشياء تحتها" ونجد أن المستوى الأفقى"الأرض" مكوناته X,Y وبالتالى الإتجاه فوق وتحت تعنى الإتجاه Z المتعامد علي مكونات المستوى شكل 5.

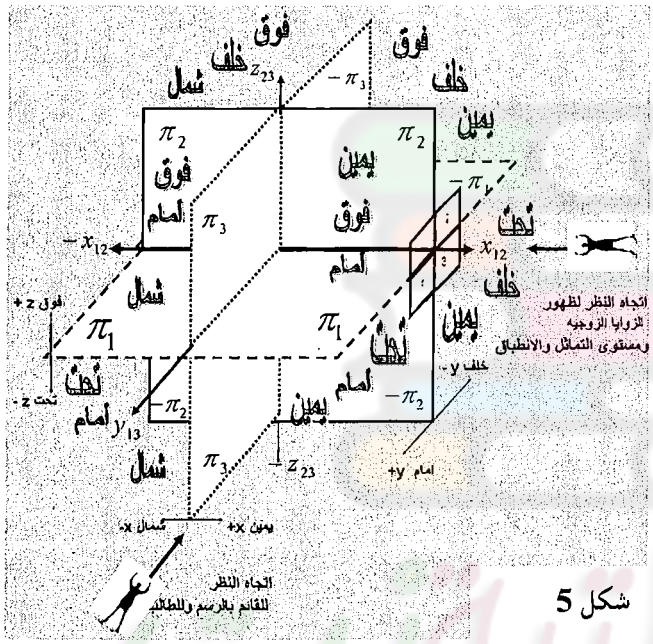
ومن شكل 2 أيضا نجد المستوى الرأسى المكون من X,Z يمكن أن يطلق عليه الحائط أى الحائط الموجود بالمنزل فنجد أناس تجلس أمام الحائط وأناس خلف الحائط وبالتالى معنى أمام وخلف أنه الاتجاه y وهو الاتجاه العمودى على مستوى الحائط .

أما الفرد الموجود فى شكل 5 والذى ينظر فى إتجاه المستوى الجانبى فله يمين وشمال لهذا المستوى الجانبى $\pi_3$ وهذا المستوى مكوناته Y, Z وبالتالى يمين وشمال هذا المستوى هو الإتجاه العمودى

عليهم وهو x. وبالتالى يمكن وصف أى نقطه من خلال ماتم استعراضه، أن تكون نقطه فوق $\pi_1$ وأمام $\pi_2$ وعلى يمين $\pi_3$. وتبعا لعلم الكلام فإنه يمكن وضع جدول-1 الذى يوضح معنى اشارات النقاط حسب أوضاعها بالنسبه لمستويات الاسقاط .

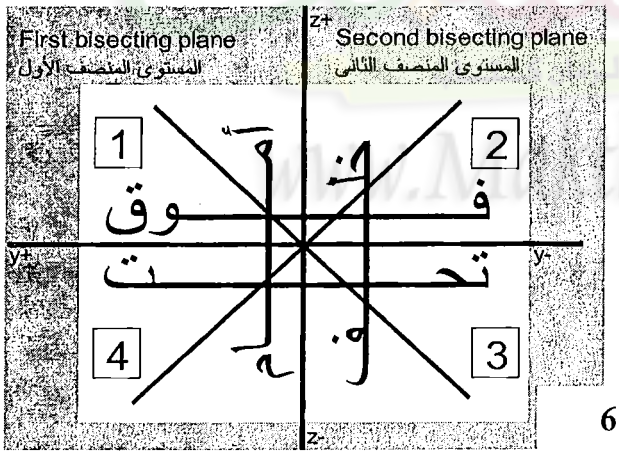
| جدول 1 | $\pi_3$ | $\pi_2$ | $\pi_1$ |
|---|---|---|---|
| الوصف ← | الفرد | الحيطه | الأرض |
| + ← | يمين | أمام | فوق |
| - ← | شمال | خلف | تحت |
| البعد ← | X | Y | Z |
| تقع فى أى مستوى | X=0 | Y=0 | Z=0 |

أيضا يتضح أن المستويين الأفقى $\pi_1$ والرأسى $\pi_2$ ،والجانبى بعد أن قسما الفراغ الى أربع زوايا زوجيه عند النظر من أقصى اليمين على شكل 5 نجد أن شكل 6 يوضح الأتى:



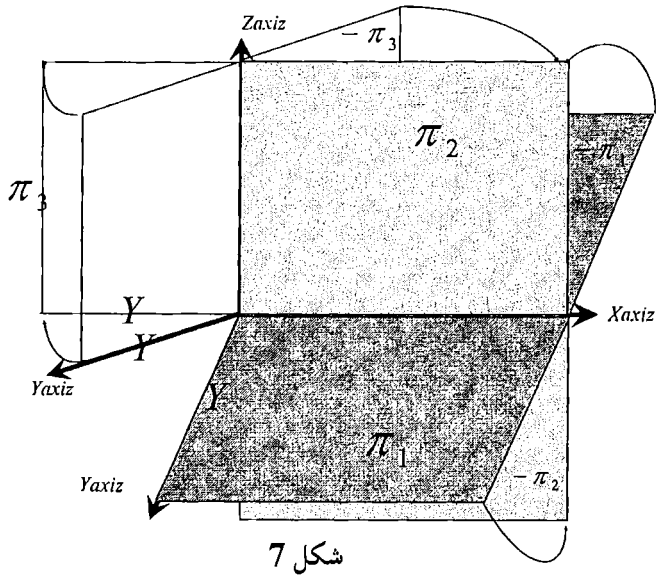

شكل 5

الزاويه الزوجيه الأولى +y و+z ، الزاويه الزوجيه الثانيه -y و+z، الزاويه الزوجيه الثالثه +y و-z الزاويه الزوجيه الرابعه -z و +y ومن إتجاه النظر المحدد فى شكل 5 يمكن إسقاط شكل الزوايا والمحاور لتحديد الأربع زوايا الزوجيه شكل 6. ومن هنا يجب تعريف الاتى:




شكل 6

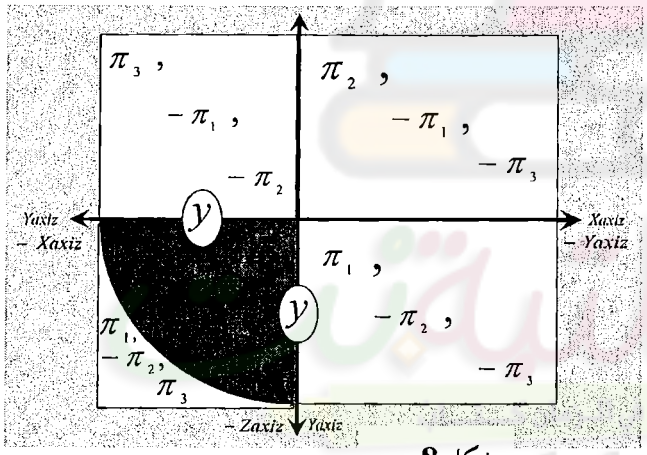
- المستوى المنصف الأول "مستوى التماثل" وهو الذى ينصف الزاويه الزوجيه الأولى والثالثه وفيه z= +y, -z = -y + شكل 6، 2.
- المستوى المنصف الثانى "مستوى الانطباق" الذى ينصف الزوايا الزوجيه الثانيه والرابعه وفيه +y= -z, -y=+z شكل 2، 6.



شكل 7

من شكل 5 يتحدد طبيعه المستويات الثلاثه العموديه ولكن هم الأن فى الفراغ، لذا كيف يتم توقيع النقاط الفراغيه كما فى الأشكال 2,5,1 داخل مستوى الورقه؟ إجابه هذا السؤال تحتاج الى أن ننظر إلى شكل 5 جيدا ثم يتم عمل الأتى:

1. نحاول أن نقطع المحور $y_{13}$ وما يماثله فى الخلف إلى خطين متوازيين كما فى شكل 7 .
2. ندور بالمستوى الأفقى عكس عقارب الساعه فينطبق الجزء السالب الخلفى من المستوى الأفقى $-\pi_1$ على الجزء الموجب العلوى من $\pi_2$ والعكس صحيح فى النصف السفلى حيث ينطبق الجزء السالب السفلى من المستوى الرأسى $-\pi_2$ على الجزء الموجب الأمامى من $\pi_1$ وكل ذلك الدوران يتم حول محور $x_{12}$ من خلال محور الإنطباق الذى ينصف الزاويه الثانيه والرابعه. بعد زلك يتم دوران المستوى الثالث العمودى $\pi_3$ حول محور $Z_{23}$ مع عقارب الساعه الى أن ينطبق على المستويين الباقيين فيتنج شكل 7 من شكل 8 وتتضح الصوره كامله ويظهر أماكن المستويات السالبه والموجبه.



شكل 8

www.Maktbah.Net

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

# الباب الثالث

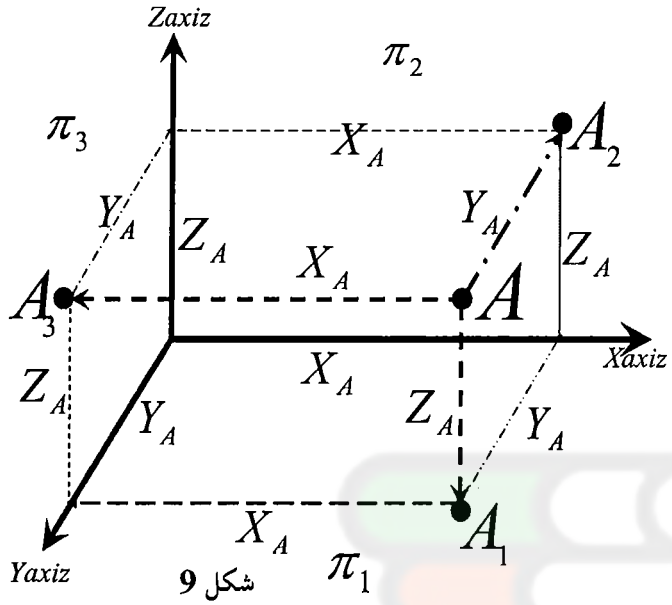
# النقطة

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

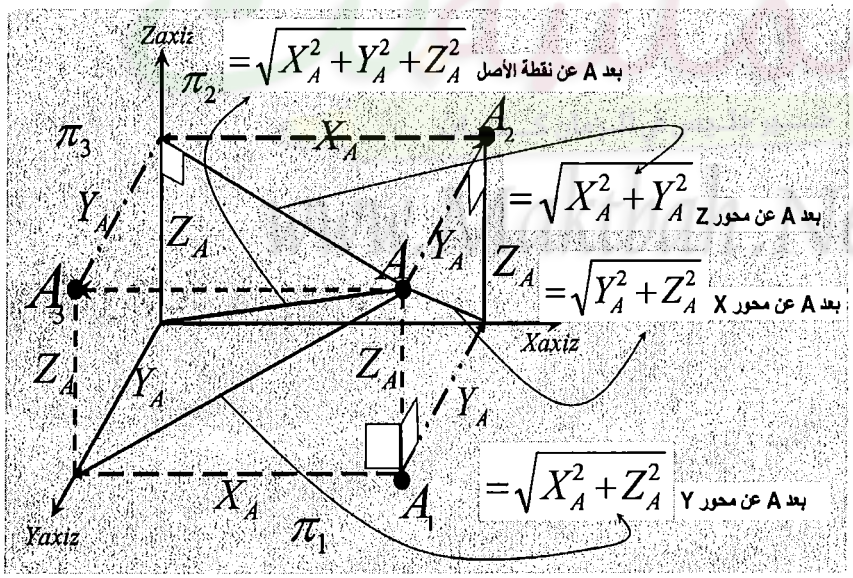
# النقطة

## تمثيل النقطة فى الفراغ




شكل 9

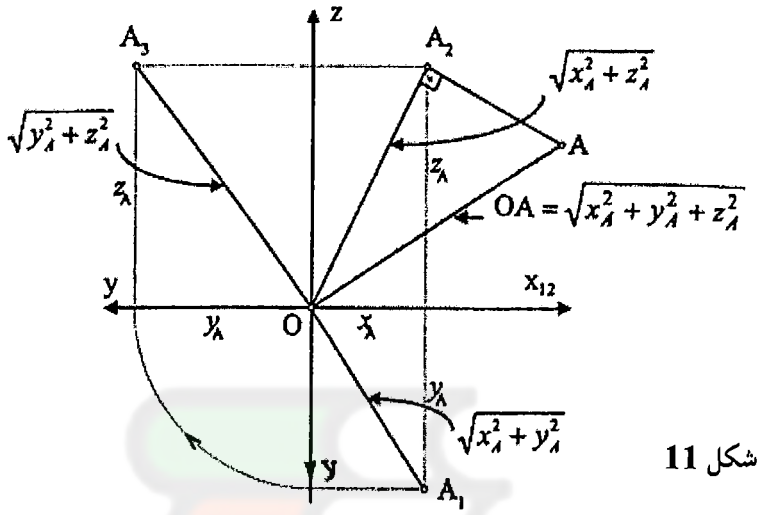
يتم تمثيل الإسقاط "للهندسة الوصفية" فى الفراغ على أحد أركان الفراغ الموجبة الإحداثيات من مجمل أجزاء الإسقاط شكل 9 ، وهو الذى يشمل الأبعاد الموجبة لكل من المحاور الثلاثة **X,Y,Z** وبالتالى يتم الإسقاط على المستويات العامة التى تكونها هذه المحاور. لذا نجد أن أى نقطة **A** فى الفراغ لو تم النظر عليها فى الإتجاه العمودى على أى مستوى ينتج مسقط لها " أى ظل عمودى أو صوره لها" هذا المسقط يسمى بإسم النقطة ورقم المستوى الذى تم النظر عليه. فإذا نظرنا عمودى على المستوى الأفقى فإن النقطة **A** ينتج لها ظل أو مسقط على المستوى الأفقى يسمى المسقط الأفقى للنقطة ويكون حينئذ هذا المسقط فى $\pi_1$ أى يأخذ إسم النقطة مع رقم المستوى الواقع فيه فيكون $A_1$ وكذلك المسقط فى المستوى الرأسى يكون $A_2$ وايضا فى المستوى الجانبى يكون $A_3$ شكل 9.




شكل 10

**مثال: عين بعد نقطة A=(2,3,5) عن كل من : محور X ، محور Y ، محور Z ، نقطة الأصل**

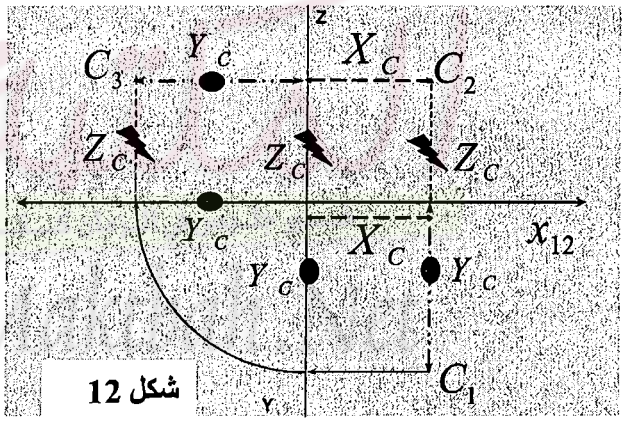
الحل: شكل **10** و شكل **11**




شكل **11**

## التمثيل الوصفى للنقطة

نستخدم الحروف اللاتينية الكبيرة للرمز للنقاط مثل (**A,B,C,D,.....**). وتمثيل النقطة **C** الواقعة فى الفراغ وصفيا يتم من خلال مساقطها الثلاثة على المستويات الثلاثة من خلال بيانات النقطة **($X_C$,$Y_C$,$Z_C$)** :




شكل **12**

*أولا* : من نقطة الاصل نوقع قيمه $X_C$ على المحور $X_{12}$، فاذا كانت قيمه $X_C$ موجبه يكون القياس ناحيه اليمين واذا كانت سالبه يكون القياس ناحيه اليسار شكل **12**.

*ثانيا* : من نهايه قياس $X_C$ يتم توقيع البعد $Y_C$، فاذا كانت $Y_C$ موجبه فأنها توقع لاسفل فى إتجاه محور **Y** الموجب والعكس صحيح. فيجب أن تعلم أن بعد كل الوحايد عن خط الأرض هى **y**، أى أنه طالما كان الإسم مثلا $C_1$ أي كان مكانه بالنسبة لخط الأرض فوق أو تحت فإن بعده عن خط الأرض هو **y** بالسالب أو بالموجب تبعا لوضعه شكل **12**.

*ثالثا* : من نهايه قياس $X_C$ يتم قياس البعد $Z_C$ وهو أيضا بنفس إسلوب قياس Y ، حيث يجب أن نعلم أن بعد كل الإثنينات عن خط الأرض هو Z أى أن طالما كان الإسم مثلا $C_2$ أى كان مكانه بالنسبة لخط الأرض فإن بعده عن خط الأرض هو Z سواء كان تحت "سالب" أو فوق "موجب" تبعا لوضعه شكل 12و 13و 14.

*رابعا* : إستنتاج المسقط الجانبى مثل $C_3$ يمكن أن يتم بطريقتين :

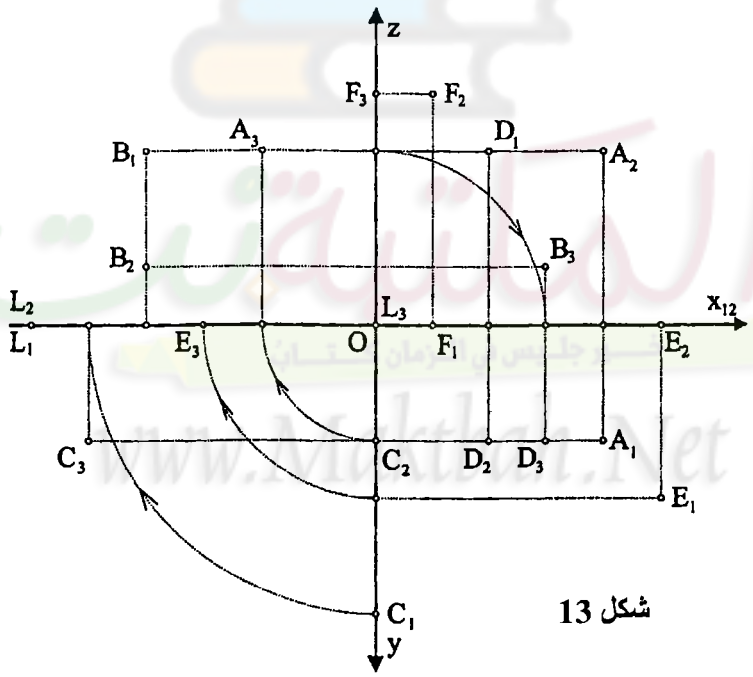
الأولى: أنها على نفس إرتفاع المسقط الرأسى للنقطة $C_2$ وتبعد عن محور Z مسافه $Y_C$ فنوجد $C_3$ .

الثانيه : أن نعتمد على دوران البعد $Y_C$ كما بالشكل 12 فى إتجاه الأسهم حتى يتقابل مع المناظر الأفقى للإرتفـــاع من المسقط الرأسى $C_2$ فينتج المسقط الثالث $C_3$. شكل 12

**مثال: أوجد المساقط الثلاثة للنقاط الأتية :**

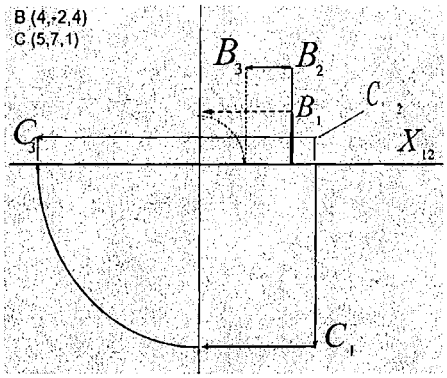
**A(4,2,3), B(-4,-3,1), C(0,5,-2), D(2,-3,-2), E(5,3,0), F(1,0,4), L(-6,0,0)**

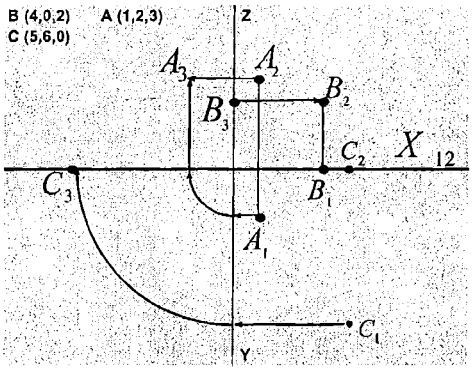
الحل: شكل 13




شكل 13

مثل النقاط الأتية: الحل: شكل 14



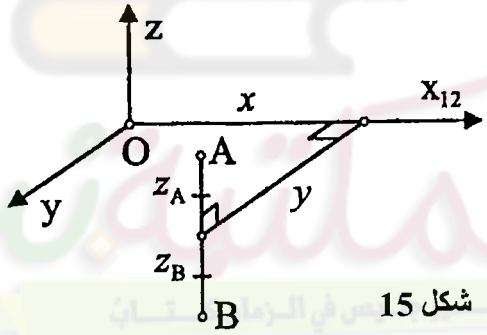

شكل 14

## التماثل

- التماثل بالنسبة للمستويات: وفيه النقطة المتماثلة بالنسبة لأحد المستويات الرئيسه تتغير إشارة بعدها عن هذا المستوى فقط وباقى أبعادها عن المستويين الأخرين تظل كما هى فى شكل 15 حيث

1. النقطة المتماثلة بالنسبة الأفقى $\pi_1$ تتغير إشارة z

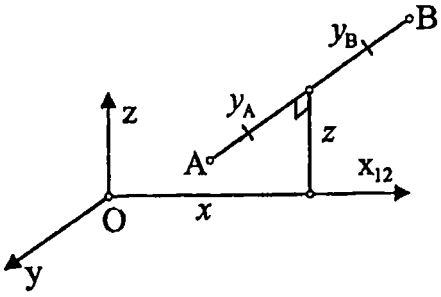
$$x_A = x_B, y_A = y_B, z_A = -z_B$$




شكل 15

2. النقطة المتماثلة بالنسبة للمستوى الرأسى $\pi_2$ تتغير إشارة y شكل 16

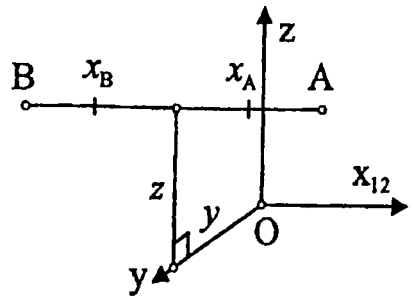
$$x_A = x_B, y_A = -y_B, z_A = z_B$$




شكل 16

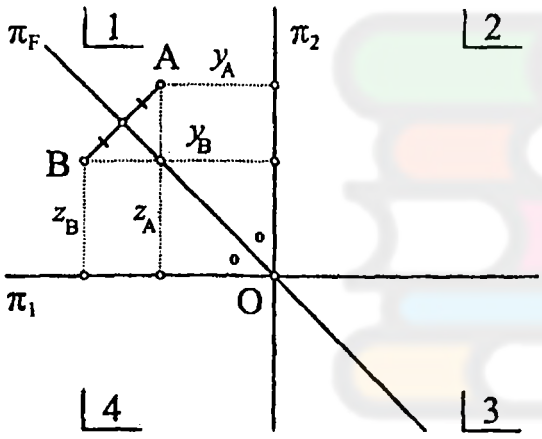
3. النقطة المتماثلة بالنسبة للمستوى الجانبى $\pi_3$ تتغير إشارة x شكل 17

$$x_A = -x_B, y_A = y_B, z_A = z_B$$



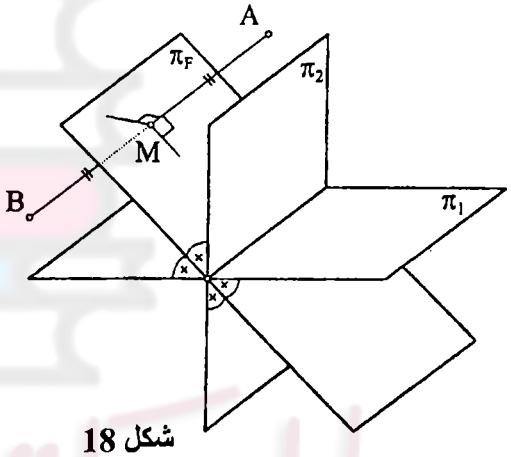

شكل 17

- تماثل النقطتين حول المستوى المنصف الأول " التماثل" شكل 18 و شكل 19



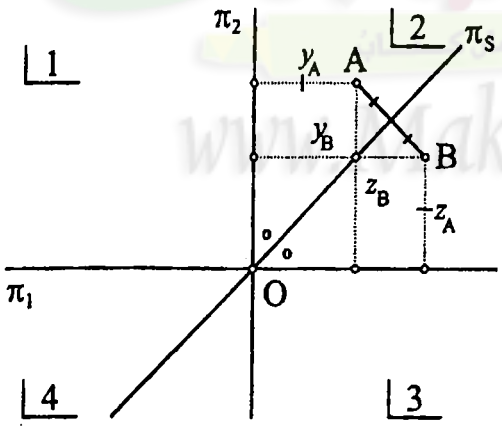

شكل 19

$$x_A = x_B, y_A = z_B, z_A = y_B$$



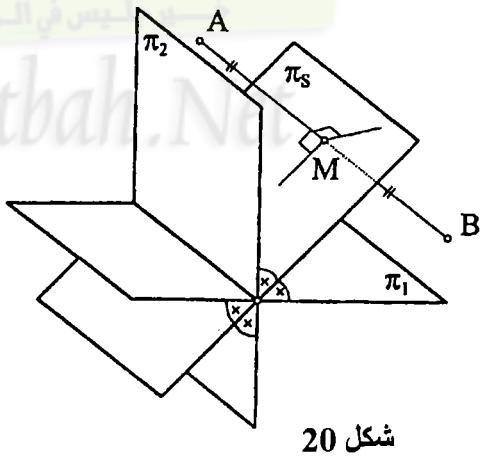

شكل 18

- تماثل النقطتين حول المستوى المنصف الثانى " الإنطباق"




شكل 21

$$x_A = x_B, y_A = -z_B, z_A = -y_B$$

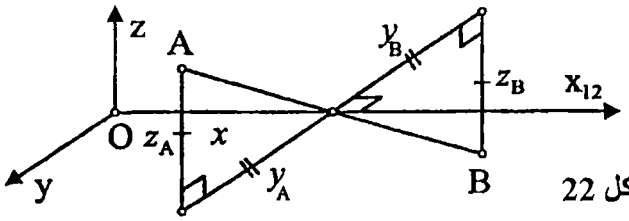



شكل 20

- التماثل بالنسبة للمحاور : وفيه تتغير إشارة أحداثياتها فى إتجاهى المحورين الأخرين فقط ويظل أحـــداثيها فى إتجـــاه المحور الثالث كماهو فى شكل 20 حيث

1. النقطة المتماثلة بالنسبة لمحور x تتغير إشارة y, z

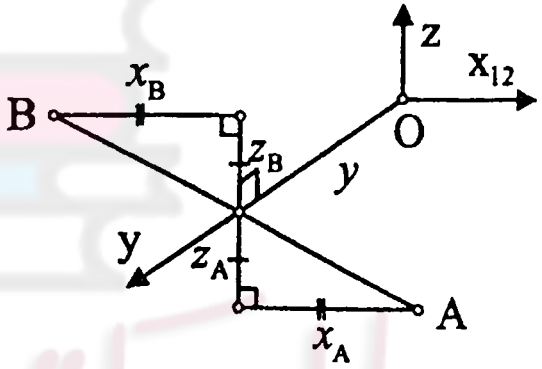
$x_A = x_B, y_A = -y_B, z_A = -z_B$




شكل 22

2. النقطة المتماثلة بالنسبة لمحور y تتغير إشارة x, z

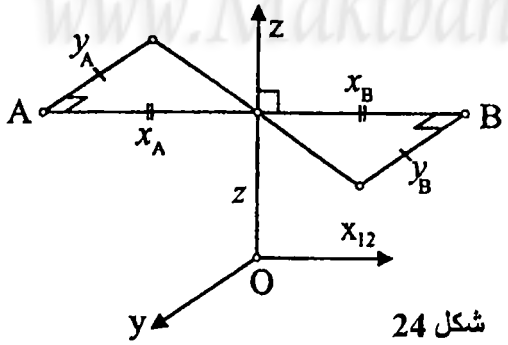
$x_A = -x_B, y_A = y_B, z_A = -z_B$




شكل 23

3. النقطة المتماثلة بالنسبة لمحور z تتغير إشارة x, y

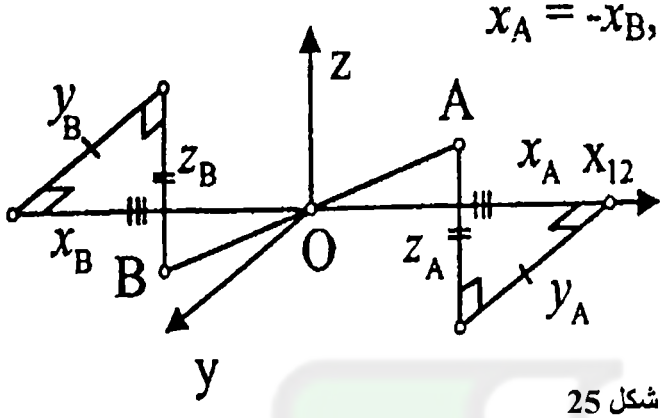
$x_A = -x_B, y_A = -y_B, z_A = z_B$




شكل 24

● التماثل بالنسبة لنقطة الأصل: تتغير إشارات الإحداثيات الثلاثة

$$x_A = -x_B, y_A = -y_B, z_A = -z_B$$

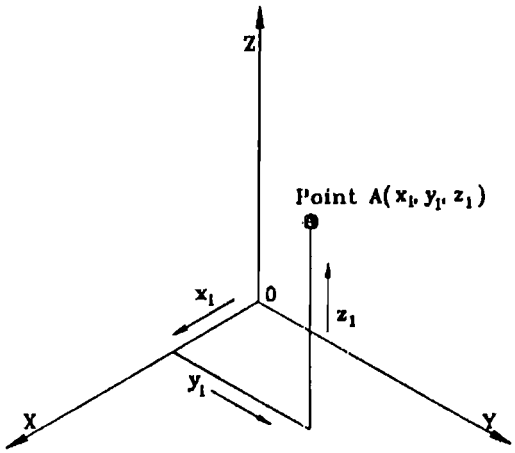



شكل 25

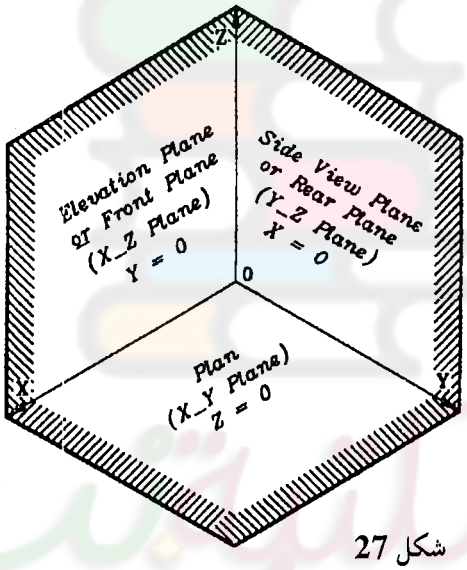
## طبيعة الإسقاط فى الهندسة الوصفية والرسم الهندسى

فى الهندسة الوصفية يتم أخذ الركن الموجب من الزاوية الزوجية الأولى لإفراد وإنطباق المستويات وكذلك إسقاط النقاط وهو يمين المستوى الجانبى وأمام المستوى الرأسى وفوق المستوى الأفقى. وبناء على ذلك فإن المسقط الجانبى يأتى على شمال القائم بالرسم كما يتضح فى شكل 5 ويسمى **Right side view** وهذا هو الحال فى الهندسة الوصفية. والسؤال ماذا لو تم إعتماد الإسقاط على الجزء الموجود بجواره فى نفس الزاوية الزوجية وعلى شمال المستوى الجانبى. سنجد أن المسقط الجانبى سيأتى على يمين القائم بالرسم لأننا سننظر له من ناحية يدينا الشمال وسمى هذا **Left hand side** الأشكال 26 و27و 28و29

www.Maktbah.Net

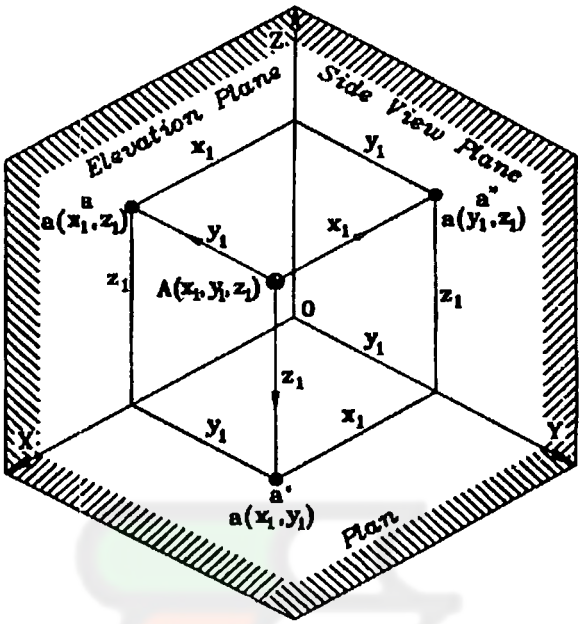



شكل 26

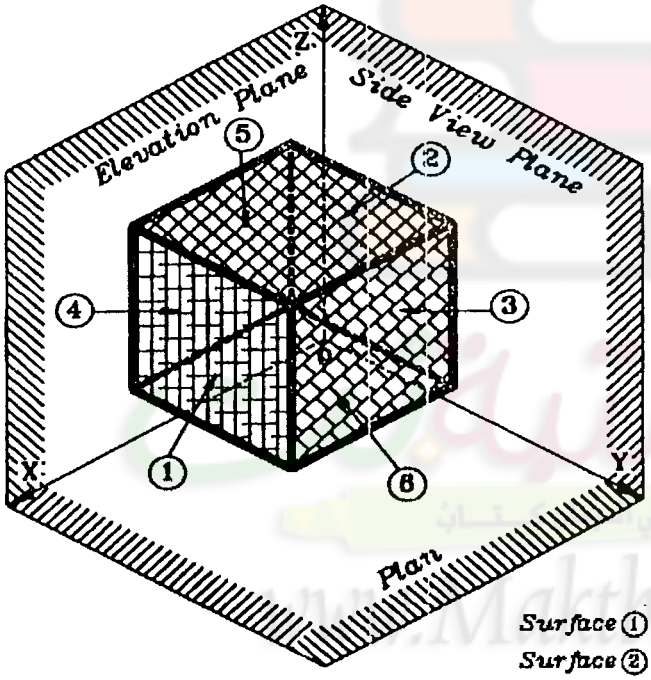



شكل 27

www.Maktbah.Net




شكل 28




شكل 29

Surface ① X = Constant
Surface ② X = Constant – L } For Y_Z Plane

Surface ③ Y = Constant
Surface ④ Y = Constant – L } For X_Z Plane

Surface ⑤ Z = Constant
Surface ⑥ Z = Constant – L } For X_Y Plane

# تمارين النقطة

1- عين المسقط الأفقي والرأسي لكل من النقاط الآتية:

A( 4,3,2 ); B ( 3,-3,5 ); C ( 2, 4 , -6 ); D ( 5, -2,-4 ); E (7 , 0,-3); F( 6 , 2 , 0 );

G ( 9, -3 ,0); H (10,0,4) ; L(11,5,0) ; M (1, 3,-3 ); N ( 8,-4,4);

2- عين المسقط الأفقي والرأسي *والجانبى* لكل من النقاط الآتية:

A( 4,3,2 ); B ( 3,-3,5 ); C ( 2, 4 , -6 ); D ( 5, -2,-4 ); E ( 7 , 0 , -3) ; F ( -6 , 2 , 0 );

G ( -9,-3 ,0); H (-10,0,4) ; L(-11,5,0) ; M (-1,3,-3 ); N ( -8,-4,4);

3- أوصف أوضاع النقاط الآتية بالنسبه لمستويات الإسقاط $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ :

A( 3,4,5 ) B ( -2,-1,5 ) C ( 2, -2 , 3 ) D ( -1, 2,-4 ) ;

E ( -7 , -3 , -3) ;F ( 6 , 0 , 0 ) M ( 0 , 0 , 2) N ( 0 , -3 , 0 )

4- إستنتج إحداثيات كلا من النقاط الأتية ثم مثل بالإسقاط كل من المساقط الثلاثة:

A- على يمين $\pi_3$ وتبعد عنه 2 سم وأمام $\pi_2$ وتبعد عنه 5 سم وأسفل $\pi_1$ وتبعد عنه 3 سم .

B- على يسار $\pi_3$ وتبعد عنه 6 سم وخلف $\pi_2$ وتبعد عنه 3 سم وفي $\pi_1$ .

C - على محور X , وعلى يسار $\pi_3$ وتبعد عنه 2 سم.

D- على محور Z واسفل $\pi_1$ بمسافه 2 سم .

E- على محور Y وخلف $\pi_2$ بمسافه 6 سم

F- فى $\pi_3$ وأمام $\pi_2$ وتبعد عنه 5 سم وأسفل $\pi_1$ وتبعد عنه 3 سم .

G- على يمين $\pi_3$ وتبعد عنه 6 سم وخلف $\pi_2$ وتبعد عنه 3 سم وفي $\pi_1$ .

5- عين مساقط الهرم الرباعي القائم الذي قاعدته A B C D مربعة الشكل وتقع في المستوى الافقي $\pi_1$ وأحد رؤوس المربع ( ? , 0.5 , 1.5 ) A و رأ س الهرم ( ? , 2.5 , 3 ) V وارتفاع الهرم 7 سم .

6- عين مسا قط إسطوانة دائرية قائمة قاعدتها السفلى تقع في المستوى الأفقي ومركزها ( ? , 3.5 , 3 ) M وإرتفاعها 7 سم ونصف قطرها 3 سم .

7- عين مساقط مكعب A B C D EF J H وطول ضلعه 5 سم ووجهه A B C D يقع في المستوى الافقي حيث ( ? , ? , 8 ) B , A ( 5,1,? ) .

8- عين مسا قط مخروط دائري قائم قاعدته تقع في المستوى الرأسي ويقع أحد روإسمه على المستقيم L J ، حيث ( 2,1,5 ) L و ( 4,5,5 ) J وإرتفاع المخروط 7 cm .( لاحظ أن إرتفاع المخروط يُقاس طول حقيقى فى المستوى الرأسى إبتداء من خط الأرض لأن القاعدة موقعها فى المستوى الأفقى)

# الباب الرابع

# المستقيم

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

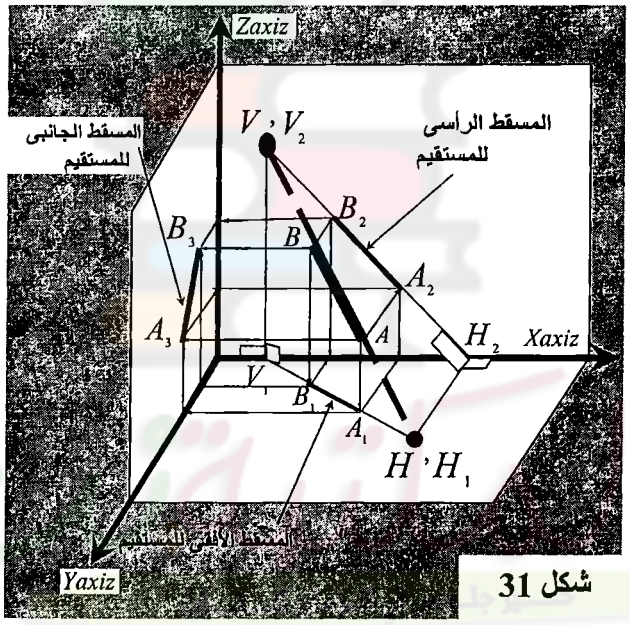
# المستقيم

نجد أن أى مستقيم يتم تمثيلة إمّا بنقطتين فيكون المستقيم العام، وإما بنقطة وإتجاة فتكون الأوضاع الخاصة للمستقيم.

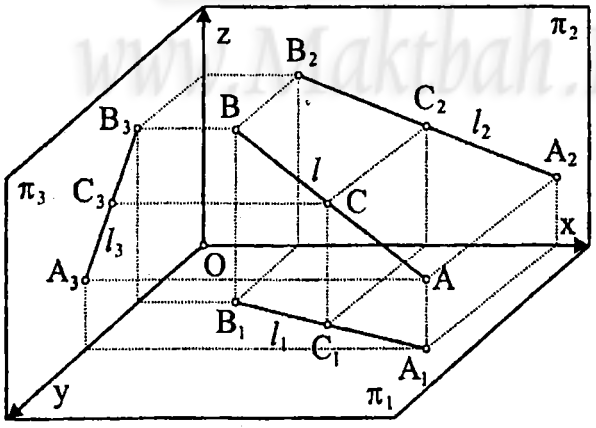
وعامة يستخدم لتمثيل المستقيمات الرموز الصغرى للغه الإنجليزيه ( **a,b,c,d,e,.....**).

## المستقيم العام

نجد أن لو كان هناك نقطتين **A, B** فإن الخط الواصل بينهما هو خط مستقيم، وبالتالى المسقط الواصل بين المسقطين الأفقين للنقطتين $A_1, B_1$ هو المسقط الأفقى للمستقيم، والمسقط الواصل بين المسقطين الرأسيين للنقطتين $A_2, B_2$ هو المسقط الرأسى للمستقيم، والمسقط الواصل بين المسقطين الجانبيين للنقطتين $A_3, B_3$ هو المسقط الجانبى للمستقيم ( شكل **31-32** ).



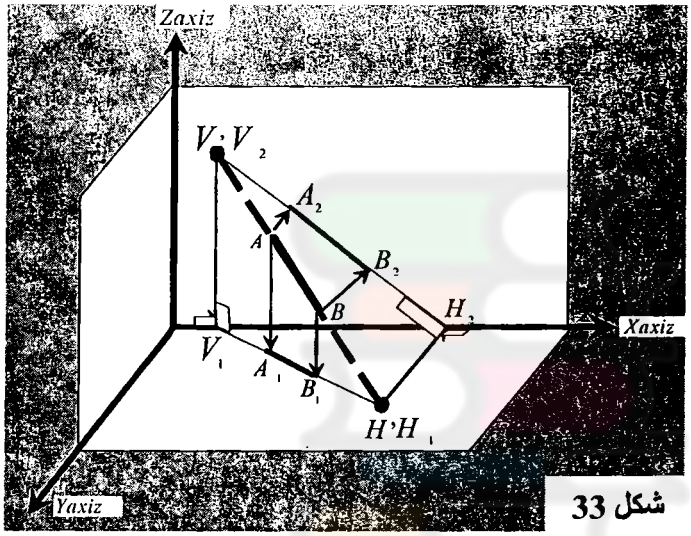

**شكل 31**




**شكل 32**

من شكل 32 نجد أن مساقط المستقيم على المستويات الثلاثة تتم بالإسقاط على المستويات الثلاثة وكذلك ترتبط مساقط النقاط على المستقيم بمساقط المستقيم.

ومن الشكلين 31 و 33 نجد أن لو تم توصيل النقطتين $A, B$ ومد إتجاههم فإن هذا المستقيم يقطع كل من $\pi_1$، $\pi_2$، $\pi_3$ فى نقطة لكل منهما، نقطة تقاطع المستقيم مع $\pi_1$ تسمى الأثر الأفقى للمستقيم $H$، ونقطة تقاطع المستقيم مع $\pi_2$ تسمى الأثر الرأسى للمستقيم $V$. ونقطة تقاطع المستقيم مع المستوى الجانبى $\pi_3$ هى الأثر الجانبى للمستقيم $S$، وكل من هذة النقاط لها مساقط سيتم الحديث عنها لاحقا.



شكل 33

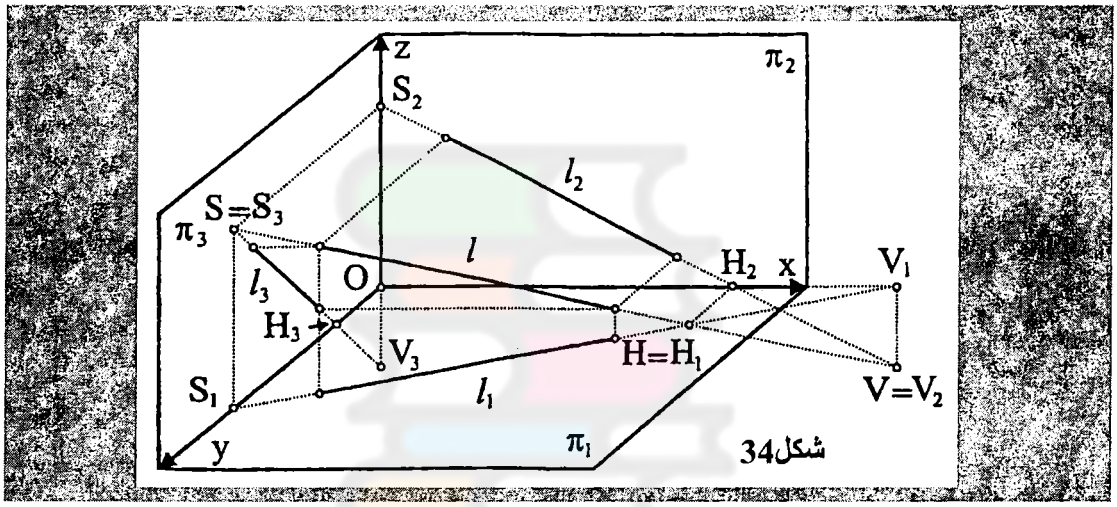
والأن نريد تعريف ماهو *الأثر للمستقيم* لأن أثار المستقيمات هى من النتائج المطلوبة دائما والتى سنعتمد عليها فى كثير من المعطيات القادمة.

والتعريف العام لأثر المستقيم *هو نقطة تقاطع المستقيم مع مستوى أسمه*، حيث أن الأثر الأفقي للمستقيم هو نقطه تقاطع المستقيم مع المستوى الأفقي، الأثر الرأسي للمستقيم هو نقطة تقاطع المستقيم مع المستوى الرأسي، الأثر الجانبي للمستقيم هو نقطة تقاطع المستقيم مع المستوى الجانبي. وتمثيل مكان الاثر الأفقى والرأسى والجانبى للمستقيم يظهر فى شكلى 31و 32 ومنهم سيتم شرح طبيعة الأثار للمستقيمات.

## الأثر الأفقى للمستقيم : (Horizontal )

الأثر الأفقى للمستقيم هو نقطة تقاطع المستقيم مع المستوى الأفقى ويرمز له بالرمز $H$ ، وهو كأى نقطة له ثلاث مساقط ، وهو النقطة التى تقع على المستقيم وفى $\pi_1$ وهى $H_1$ ، أى أن قيمة المسافة لها فوق $\pi_1$ هى $Z_H$ تساوى صفر أى $Z_H = 0.0$ ، وطالما $Z_H$ تساوى صفر فإنها مثل أى نقطة $Z$ لها تساوى صفر أى مسقطها الرأسى على خط الأرض وبالتالى $H_1$ تقع فى $\pi_1$ على بعد $Y_H$ من خط الأرض و $H_2$ تقع على $X_{12}$ حيث $Z_H = 0.0$ ، والمسقط الجانبى للأثر الأفقى هو $H_3$ *يقع على محور* $Y$ *فى المستوى الجانبى* $\pi_3$ . و يمكن الأن وضع الإحداثيات للأثر الأفقى

حيث $H(X,Y,Z) = H(X,Y,0) = H_1(X,Y)$ حيث أصل النقطة $H$ أصبح هو نفس مكان المسقط الأفقى لنفس النقطة $H_1$ لأن النقطة $H$ فى الواقع تقع فى $\pi_1$ لأن العمود الساقط منها على المستوى الأفقى=0، وعليه فلابـد أن نعلم أنه لن يوجد $H$ بعد ذلك لأن $H$ تعنى أنها $H_1$ وإحداثياته هو $X,Y$ ويتم تمثيله كما فى شكل 33و 34 حيث نوقع $H_1$ بالإحداثيات $X_H, Y_H$ وتكون $H_2$ بالإسقاط المباشر على خط الأرض و $H_3$ تقع على محور Y الأفقى فى المسقط الجانبى.



شكل34

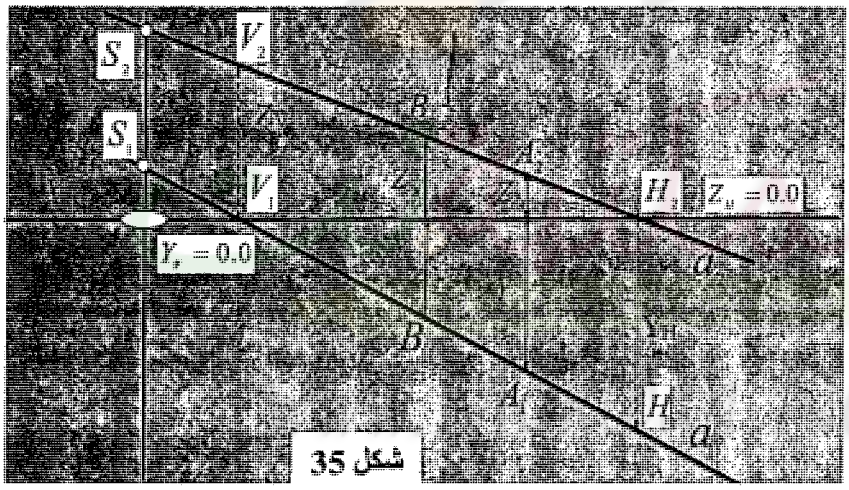
## الأثر الرأسى للمستقيم : ( Vertical )

الأثر الرأسى للمستقيم هو نقطة تقاطع المستقيم مع المستوى الرأسى ويرمز له بالرمز $V$ شكل 34و 35، وهو كـأى نقطة له ثلاث مساقط ، وهو النقطة التى تقع على المستقيم وفى $\pi_2$ ، أى أن قيمة $Y_V$ تساوى صفر أى $Y_V = 0.0$ لأن العمود الساقط منها على المستوى الرأسى $Y_V$=0، وطالما $Y_V$ تساوى صفر فإنها مثل أى نقطة $Y$ لها تساوى صفر أى مسقطها الأفقى على خط الأرض وبالتالى $V_2$ تقـع فى $\pi_2$ علـى بعـد $Z_V$ ، و $V_1$ تقـع علـى $X_{12}$ أشـكال 33و34و35 . يمكن الأن وضع الإحداثيات للأثر الرأسى حيث $V(X,Y,Z) = V(X,0,Z) = V_2(X,Z)$ حيـث أصل النقطة $V$ أصبح هو نفس مكان المسقط الرأسى لنفس النقطة $V_1$ لأن النقطة $V$ أصلا تقع فى $\pi_2$ ، وعليه فلابد أن نعلم أنه لن يوجد $V$ بعد ذلك لأن $V$ تعنى أنها $V_2$ وإحداثياته هو $X,Z$ ويتم تمثيلها كما فى شكل 34 حيـث

نوقع $V_2$ بالإحداثيات $X,Z$ وتكون $V_1$ بالإسقاط المباشر على خط الأرض و $V_3$ تقع على نفس إرتفاع $V_2$ ولكن مسقطها على محور **Z**.

## الأثر الجانبى للمستقيم : ( Side )

الأثر الجانبى للمستقيم هو نقطة تقاطع المستقيم مع المستوى الجانبى ويرمز له بالرمز $S$ ، وهو كأى نقطة لـه ثـلاث مساقط كم بالأشكال **34**و **35** ويعرف بأنه النقطة التى تقع على المستقيم وفى $\pi_3$ ، أى أن قيمة $X_S$ تساوى صـفر أى $X_S = 0.0$ ، وطالما $X_S = 0.0$ تساوى صفر فإن مسقطها الأفقى والرأسى على العمودى على خط الأرض مـن نقطة الأصل وبالتالى $S_2$ تقع على محور **Z** فى $\pi_2$ على بعد $\mathbf{Z_S}$ ، $\mathbf{S_1}$ تقع على محور **Y** اللرأسى فى $\pi_1$ على بعـد $Y_S$ ، $X_S = 0.0$ . يمكن الأن وضع الإحداثيات للأثر الجانبى حيث $S(0,Y,Z) = S(0,Y,Z) = S_3(Y,Z)$ حيـث أصل النقطة أصبح هو نفس مكان المسقط الجانبى لنفس النقطة $S$ لأن النقطة $S$ أصلا تقع فى $\pi_3$ ، وعليه فلابـد أن نعلم أنه لن يوجد $S$ بعد ذلك لأن $S$ تعنى أنها $S_3$ وإحداثياته هو $Y,Z$ ويتم تمثيله كما فى شكلى **34**و **35** حيـث نوقع $S_3$ بالإحداثيات $Y,Z$ وتكون $S_1,S_2$ بالإسقاط المباشر على العمودى على خط الأرض أو العكس.

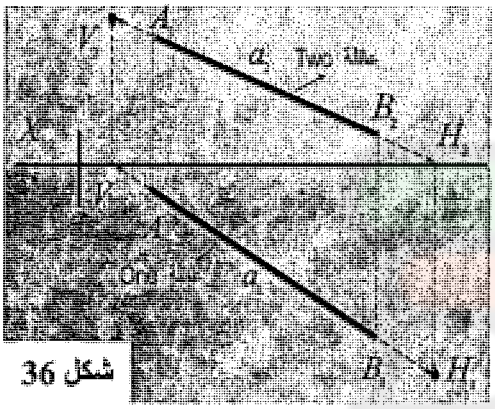


شكل 35

### إستنتاج الأثـار مـن المساقط

شكل **35** يوضح كيـف يمكن إيجاد النقاط التى تقع على المسـتقيم وتقـع فى المستوى الأفقى والرأسـى والجانبى والتى تُستنتج بالإمتدادات الخاصه بالمساقط للمستقيم. ومن شكل **34** الذى يوضح وضع المستقيم فى الفـراغ وكذلك مساقطه يتضح فيه أوضاع الاثار كنقاط أصليه واقعة فى مستوياتها وكذلك مساقطها وكيف أن المساقط تتفاعل مع إمتداداتها مع أصل المستقيم فى الفراغ. من شكل **35** نلاحظ ان المستقيم $a$ يقع عليه نقطة $A,B$ وكل منهما لها $Y,Z$ . والمطلوب إيجاد النقاط التى تقع على المستقيم وتقع فى المستوى الأفقى والرأسى والجانبى. لذا نلاحظ ان النقطة

التى تقع على المستقيم $a$ وتقع فى المستوى الأفقى تكون $Z$ لها تساوى صفر لذلك فاننا نبحث على المسقط الرأسى للمستقيم وهو $a_2$ عن النقطه التى $Z$ لها تساوى صفر ( حيث أن المساقط الرأسية هى التى تحمل القيم $Z$ وبالتالى نبحث تقاطع المسقط الرأسى مع خط الأرض) فتكون $H_2$ تقع على $X_{12}$ وبالتالى $H_1$ تكون بالتناظر على $a_1$ وتسمى هذة النقطة بالاثر الأفقى للمستقيم. لذلك تابع معى بعينيك شكل 35 و36 هذه المقولة: لو معطى المساقط للمستقيم *فإننا بديهيا لو وصلنا المسقط الرأسى حتى يقطع خط الأرض ثم أقمنا عمود حتى يقابل المسقط الأفقى فانة سيقابلة مباشرة فى الاثر الأفقى للمستقيم* $H_1$ . من الشكل 35 و36 نلاحظ أن النقطة التى تقع على المستقيم $a$ وتقع فى المستوى الرأسى تكون $Y$ لها تساوى صفر لذلك فاننا نبحث على المسقط $a_1$ عن هذة النقطه ( حيث أن المساقط الأفقية هى التى تحمل القيم $Y$ وبالتالى نبحث تقاطع المسقط الأفقى مع خط الأرض) فتكون $V_1$ تقع على $X_{12}$ وبالتالى $V_2$ تكون بالتناظر على $a_2$ وتسمى هذة النقطة بالاثر الرأسى للمستقيم لذلك لذلك تابع معى بعينيك شكل 35 وهذه المقولة: لو معطى المساقط للمستقيم *فإننا بديهيا لو وصلنا المسقط الأفقى حتى يقطع خط الأرض ثم أقمنا عمود حتى يقابل المسقط الرأسى فإنة سيقابلة مباشرة فى الاثر الرأسى للمستقيم* $V_2$.



شكل 36

من الشكلين 34و 35 يتضح مكان $S_2, S_1$ وهما المساقط للأثر الجانبي عند الإحداثى $X = 0.0$ . لذلك فان المعطيات بالنسبه إلى $H$ تكون هى $H_1$ اى ان إحداثياتها $X, Y$ وكذلك المعطيات بالنسبه إلى $V$ تكون $V_2$ اى ان إحداثياتها $X, Z$ ، وأيضا المعطيات بالنسبه إلى $S$ تكون $S_3$ اى ان إحداثياتها $Y, Z$ . ويمكن تلخيص القاعده السابقة فى النتيجه الأتية بالنسبة للأثر الأفقى والرأسى:

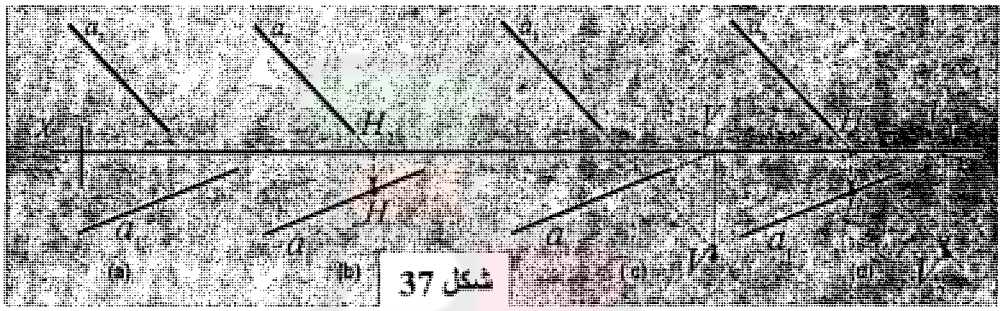
**عندما يكون معطى المساقط ومطلوب الأثار** يتم تطبيق القاعدة [ *وصل وقيم عمود*] وتطبق وتحفظ وتجـرب

وأنت تقرأها كالأتى :

1. وصل المسقط الأفقى ( حتى يقابل خط الأرض ) قيم عمود يقابل المسقط الرأسى إذا هذا هو الأثر الرأسى. شكل 36 و 37

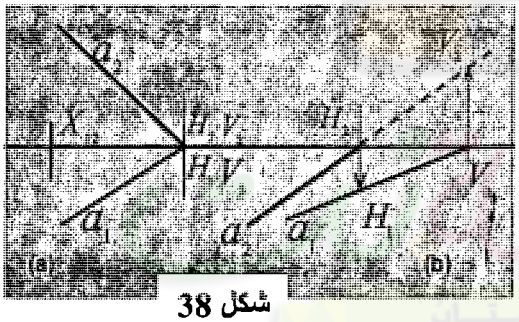
2. وصل المسقط الرأسى ( حتى يقابل خط الأرض ) قيم عمود يقابل المسقط الأفقى إذا هذا هو الأثر الأفقى شكل 36.

ويمكن الأن أستعراض بعض الأمثلة التى توضح إستخدام هذه القاعدة كالأتى:

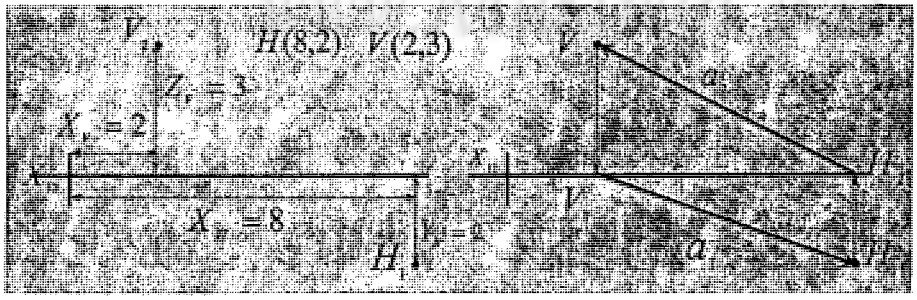


شكل 37

من شكل37 –a معطى مسقطين لمستقيمين ومن الشـــكل b–37 يتضح كيفية تطبيق القاعـــدة بـــنفس المنطـــوق لإستنتاج الأثر الأفقى ثم مـــن الشـــكل c–37 يتضـــح إسلوب إيجاد الأثر الرأسى والشكل d–37 يوضـــحهما معا. ومن الشكل 38– b-a يتضح كـــذلك وضـــعين أخرين لمستقيمين وكيفية تطبيـــق القاعـــــــدة لإستنتاج الأثار.



شكل 38




a- 39 شكل

b- 39 شكل

## إستنتاج المساقط من الاثار

مثال: إذا علمت أن الأثر الأفقى للمستقيم $a$ هو $H(8,2)$ والاثر الرأسى له هو $V(2,3)$ مثل المستقيم $a$ بمساقطة. شكل 39. فى المثال شكل **39-a** معطى الأثر الأفقى **H** والرأسى **V** ونحن قد رأينا مما سبق أن معنى $H$ تعنى أنها $H_1$ وإحداثياته هو $X,Y$ و $V$ تعنى أنها $V_2$ وإحداثياته هو $X,Z$ وبالتالى بعد توقيع المعطيات يكون موجود $H_1$ و $V_2$ وعلية يمكن أن نسقط عمود من $H_1$ على خط الأرض نحصل على $H_2$ وبالتالى لو وصلنا $H_2$ ب $V_2$ فإننا نحصل على $a_2$ شكل**39-b** حيث أنها كلها تحمل رقم 2، ونسقط عمود من $V_2$ على خط الأرض نحصل على $V_1$ وعلية لو وصلنا $H_1$ ب $V_1$ فإننا نحصل على $a_1$ حيث أنها كلها تحمل رقم **1** شكل**39-b** .وبالتالى نستنتج القاعدة القادمة

## لإستنتاج المساقط من الاثار

لو *معطى الأثار ومطلوب المساقط* للمستقيم نتبع القاعدة [ إسقط عمود ووصل] وتحفظ وتطبق وتجرب كالأتى من شكل**39-b** : من $H_1$ أسقط عمود على خط الأرض نحصل على $H_2$ و $V_2$ $H_2$ هو $a_2$ إذا نصل $H_2$ ب $V_2$. ومن $V_2$ أسقط عمود على خط الأرض نحصل على $V_1$ و $V_1$ $H_1$ هو $a_1$ إذا نصل $H_1$ ب $V_1$. ولابد أن نقولها كما ذكرت لك وتحفظ بهذا الشكل حتى لايتم الخطأ مهما كان التطبيق صعب وذلك تبعا للأوضاع المختلفة التى ستأتى لكل $H_1$ و $V_2$.

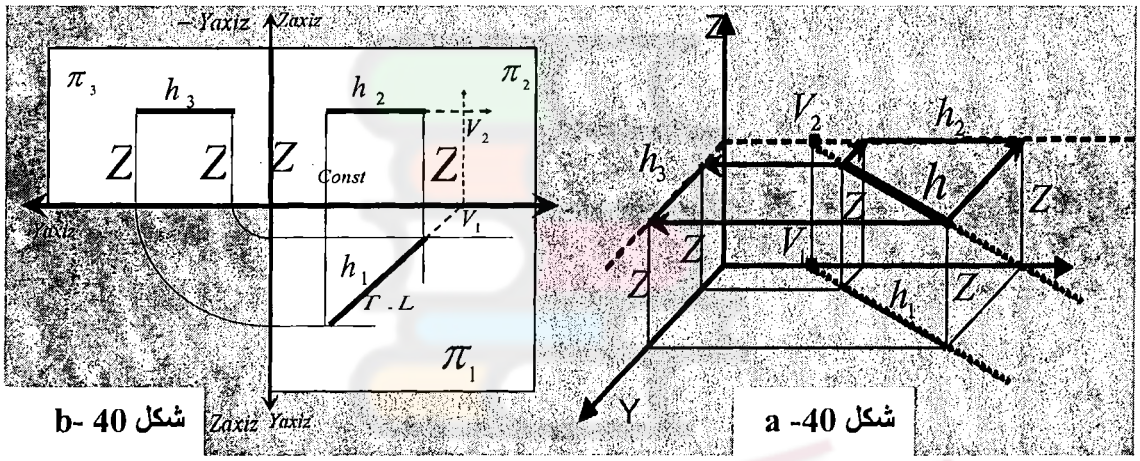
المكتبة نت
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

## الأوضاع الخاصه بالمستقيمات

### 1- المستقيم الأفقى *horizontal*

المستقيم الأفقى ($h$) فى الفراغ يوازى المستوى الأفقى الرئيسى $\pi_1$ لذا فمميزات هذا المستقيم كثيره وهى كالأتى :

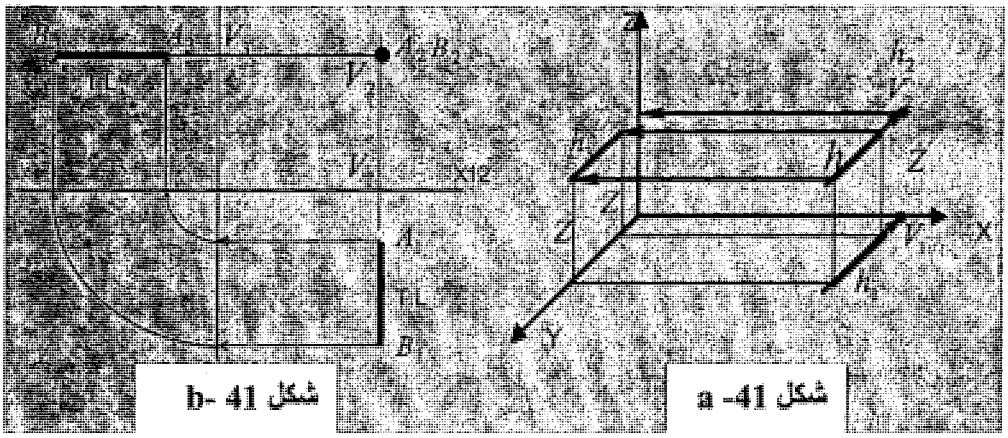
1. كل النقاط على هذا المستقيم قيمه Z لها ثابته كما بالشكل a–40
2. ، المسقط الرأسى والجانبى لهذا المستقيم يوازى خط الأرض على إرتفاع ثابت Z شكل 40– b- a
3. يظهر بطوله الحقيقى وزاويه ميله الحقيقيه (على المستوى الرأسى) فى المستوى الأفقى $\pi_1$ شكل 40 -b
4. له أثر رأسى وجانبى وليس له أثر أفقى شكل 40 –a-b




شكل 40 -b شكل 40- a

### 2- المستقيم العمودى على المستوى الوجهى

هو حاله خاصه من المستقيم الأفقى حيث يوازى المستوى الأفقى وعمودى على المستوى الوجهى وله كل مميزات المستقيم الأفقى ويضاف إليه أن مسقطه الرأسى نقطه فى $\pi_2$ وزاويه ميله على $\pi_2$ هى 90 درجه. ومن الشكل الفراغى للمستقيم الأفقى فإن وضع هذا المستقيم



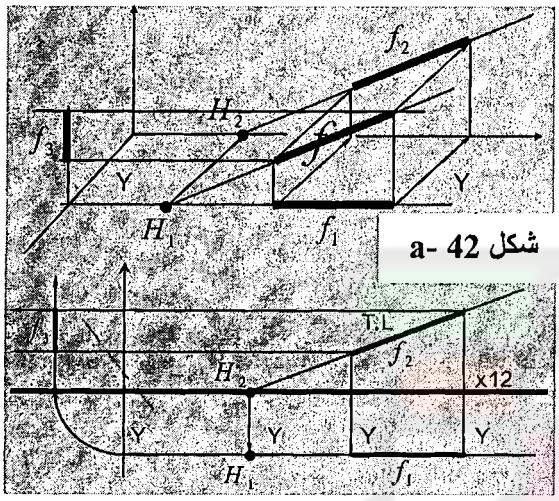

شكل 41 -b شكل 41- a

أن يكون واقع فى مستوى أفقى ولكن عمودى على المستوى الوجهى شكل 41-a-b.

## 3- المستقيم الوجهى *face*

المستقيم الوجهى (*f*) فى الفراغ يوازى المستوى الرأسى الرئيسى $\pi_2$ لذا فمميزات هذا المستقيم كثيره وهى كالأتى :

1. كل النقاط على هذا المستقيم قيمه **Y** لها ثابته كما بالشكل 42-a-b




شكل 42 -a

شكل 42 -b

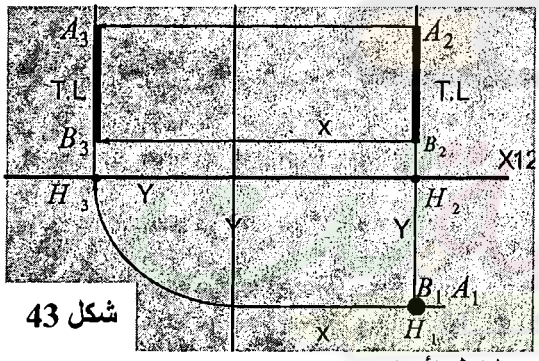
2. المسقط الأفقى لهذا المستقيم يوازى خط الأرض على إرتفاع ثابت **Y**

3. يظهر بطوله الحقيقى وزاويه ميله الحقيقيه (على المستوى الأفقى) فى المستوى الرأسى

4- له أثر أفقى وجانبى وليس له أثر رأسى.

## 4- المستقيم العمودى على المستوى الأفقى ( المستقيم الرأسى)

هو حاله خاصه من المستقيم الوجهى حيث يوازى المستوى الرأسى والجانبى وعمودى على المستوى الأفقى وله كل مميزات المستقيم الوجهى ويضاف إليه أن مسقطه الأفقى نقطه فى $\pi_1$ وزاويه ميله على $\pi_1$ هى 90 درجه ، شكل 43.




شكل 43

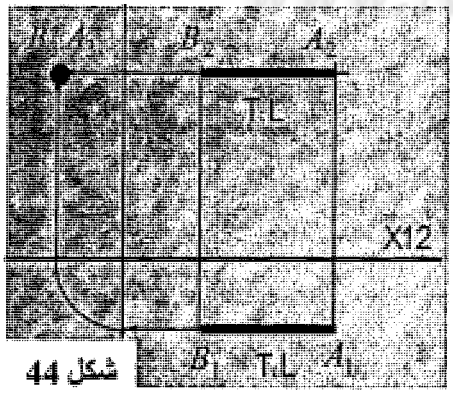
## 5- المستقيم العمودى على المستوى الجانبى / الموازى لخط الأرض

وهو حاله خاصه من كل من المستقيم الأفقى والوجهى شكل 44

ولكنه يختلف عنهم فى الأتى:

1. أنه ليس له زاويه ميل على المستويين الأفقى والرأسى حيث يوازيهم

2. مسقطيه الأفقى والرأسى يوازيا خط الأرض ويظهرا بطولهما

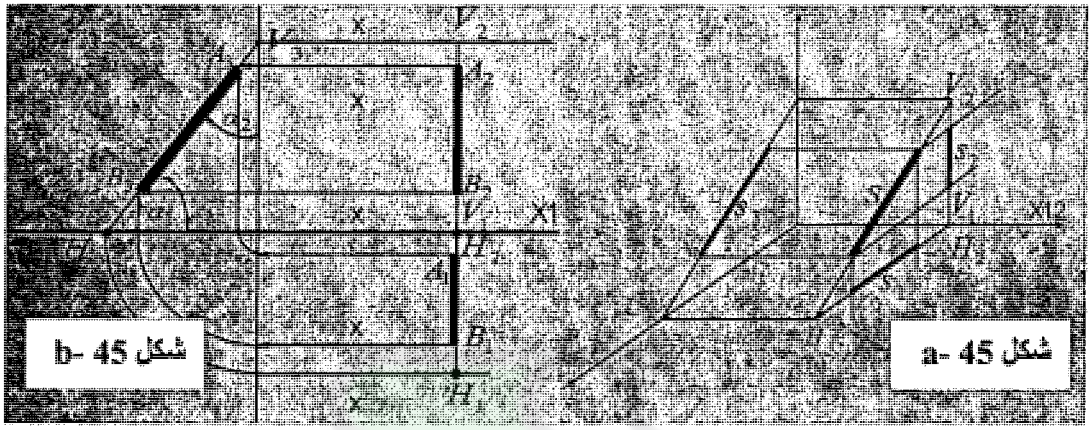



شكل 44

الحقيقى شكل 44

3. مسقطه الثالث نقطه فى المستوى الجانبى

## 6- المستقيم الجانبى (Side ) / العمودى على خط الأرض




المستقيم الجانبى (S ) فى الفراغ يوازى المستوى الجانبى الرئيسى $\pi_3$ لذا فمميزات هذا المستقيم كثيره وهى كالأتى :

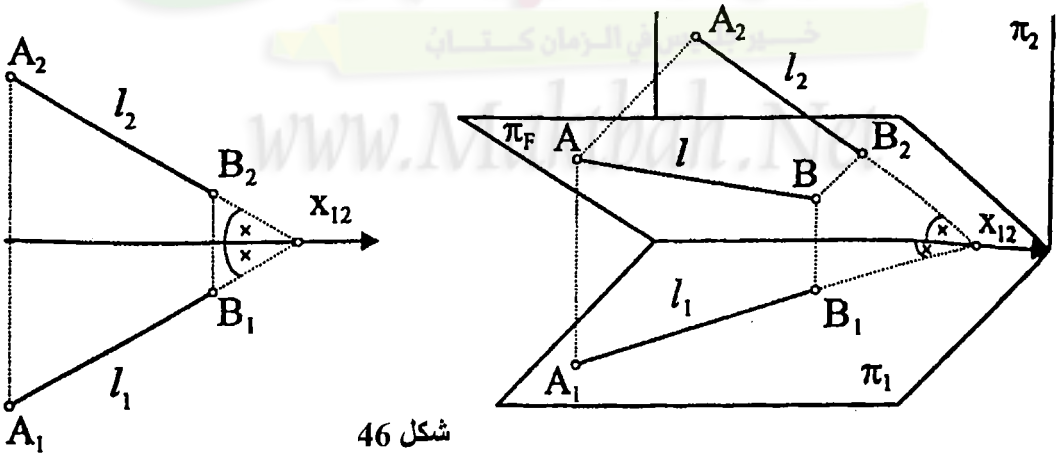
1. كل النقاط على هذا المستقيم قيمه X لها ثابته كما بالشكل b-a -45

2. المسقط الأفقى والرأسى لهذا المستقيم عمودى على خط الأرض على بعد ثابت عن نقطه الاصل قيمته X .

3. يظهر بطوله الحقيقى وزاويه ميله الحقيقيه (على كل من المستوى الأفقى والرأسى) فى المستوى الرأسى $\pi_3$

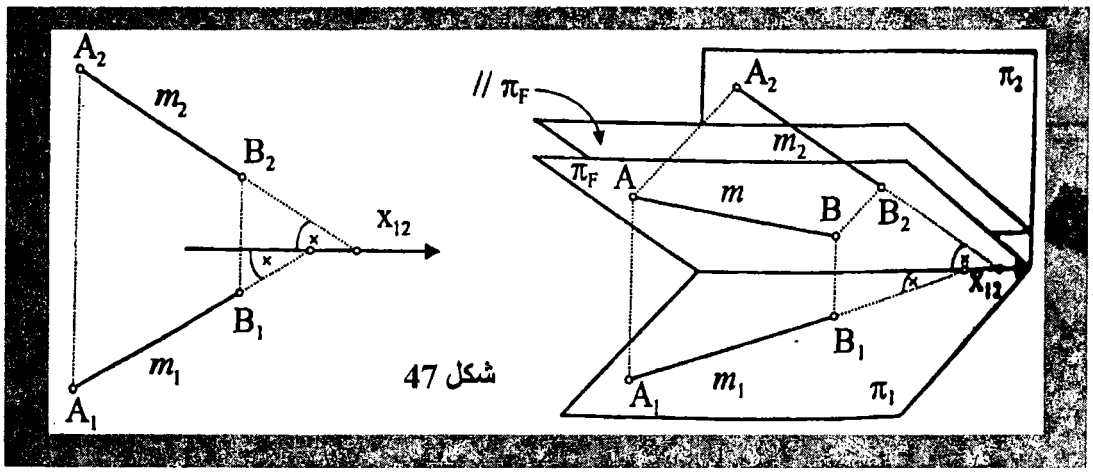
4. له أثر أفقى ورأسى وليس له أثر جانبى.

## 7- مستقيم يقع فى المستوى المنصف الأول " مستوى التماثل"

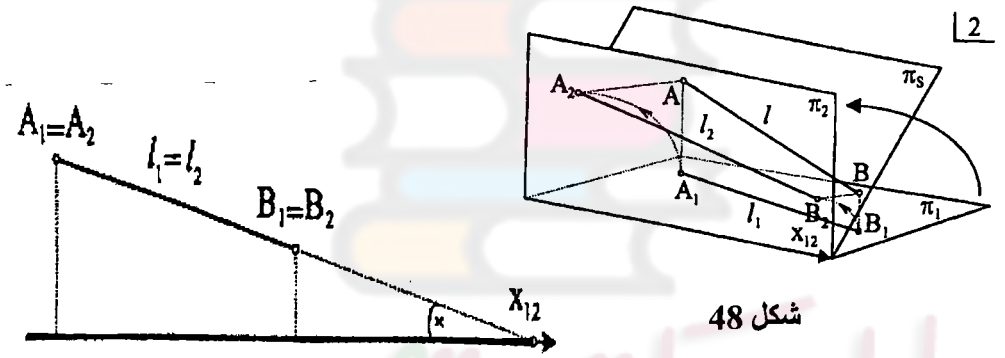



شكل 46

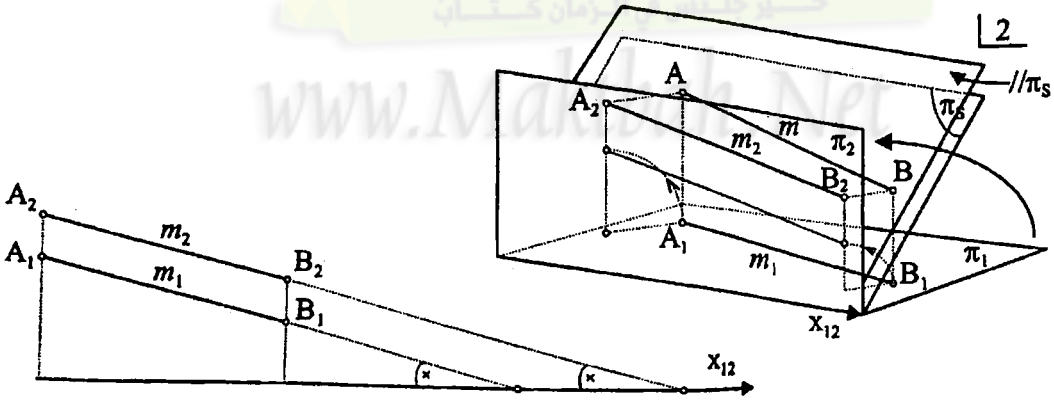
## 8- مستقيم يقع فى مستوى موازى لمستوى التماثل




## 9- مستقيم يقع فى المستوى المنصف الثانى " مستوى الإنطباق"

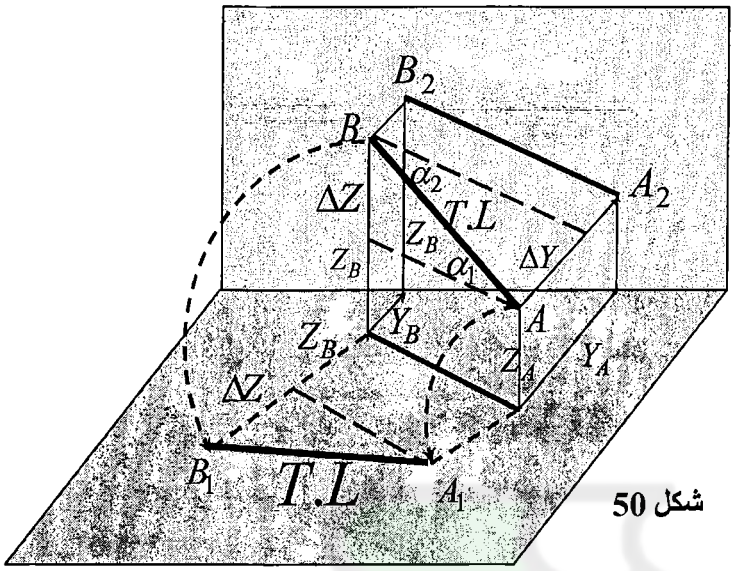



## 10- مستقيم يقع فى مستوى موازى لمستوى الإنطباق"



## الطول الحقيقى للمستقيم

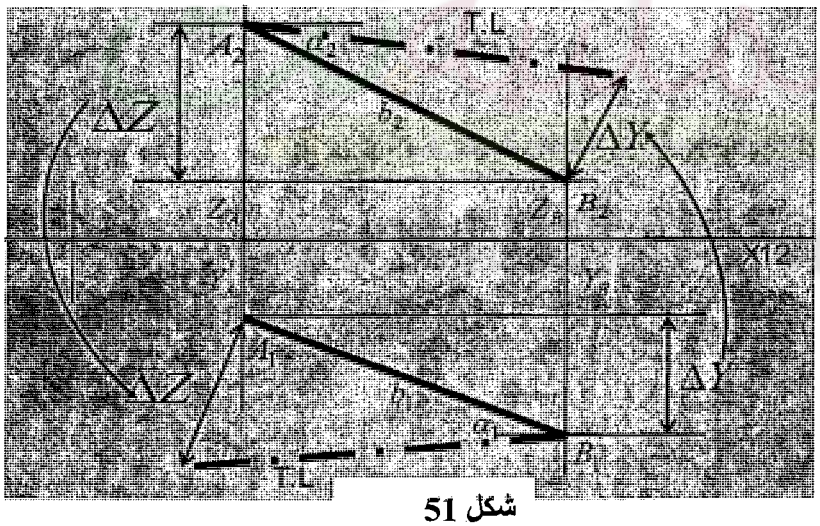
### طريقه الإنطباق




شكل 50

### طريقه فرق البعد

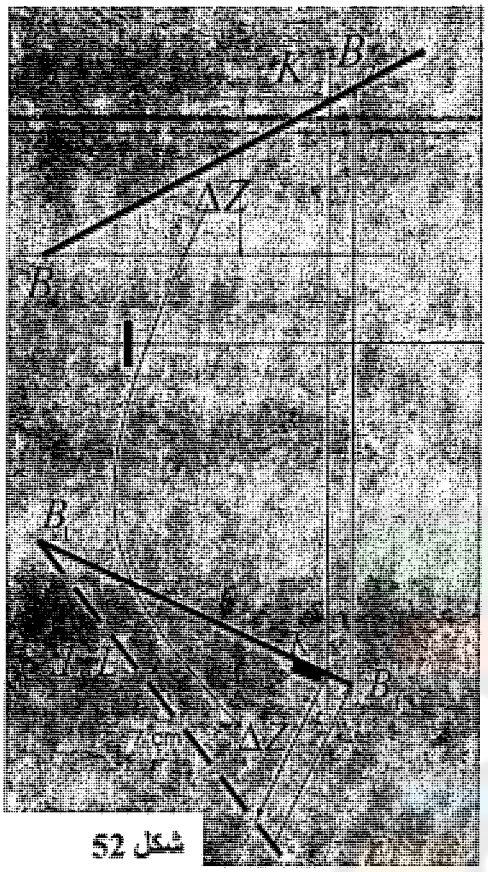
وفى هذه الطريقه نعتمد على المساقط الوجوده ونأتى بالطول الحقيقى إما بنقل $\Delta Y$ من المسقط الأفقى للمستقيم الى العمودى المقام على المسقط الرأسى للمستقيم كما بالشكل 51 ونستنتج الطول الحقيقى وزاويه ميل المستقيم على المستوى الرأسى او بنقل $\Delta Z$ من المسقط الرأسى للمستقيم الى العمودى المقام على المسقط الأفقى للمستقيم كما بالشكل الموضح ونستنتج الطول الحقيقى وزاويه ميل المستقيم على المستوى الأفقى. ويمكن المقارنه والتأكد أنه طول واحد.




شكل 51

ويمكن إستخدام هذا الإسلوب فى تحديد بعد أى نقطه عن أى نقطه أخرى على المستقيم وذلك بتحديد قطعه مستقيمه على المستقيم.

**مثال:**



شكل 52

المثال الموضح يبين كيفية قياس نقطه تبعد عن نقطه **B** مسافه **7 cm** على المستقيم الموضح شكل **52**:

نختار أى نقطه على هذا العمودى مثل نقطة $K$ وبالتالى نوجد الطول الحقيقى للمستقيم $BK$ يكون هذا هو إتجاه الطول الحقيقى للحرف ومن هنا يمكن قياس الإرتفاع المطلوب عليه وليكن **7cm** ونعود به فنحصل على مسقط النقطه $B'$ فى المستوى الأفقى ثم نصعد بها لنأتى بمسقطها الرأسى ، وبذلك أصبح لدينا مكان النقطه فى كل من المستوى الأفقى والرأسى شكل **52** .

**طريقه الدوران**

هذه الطريقه يتم شرحها فى باب القياس.

**فوائد إيجاد الطول الحقيقى:**

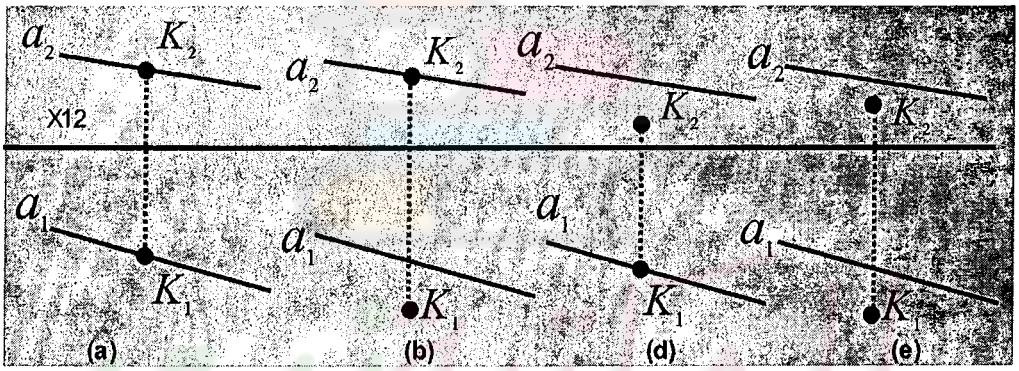
*نتيجة: الزاوية القائمة تسقط قائمة طالما كان أحد أضلاعها* ***T.L*** *أى يظهر بطولة الحقيقى (طالما موازى لمستوى المسقط) والعمودى على ال* ***T.L*** *ليس* ***T.L*** *. (مادام الإسقاط ليس لشكل حقيقى* ***(T.S)*** *)*

لذلك إذا كان الحل فى الهندسة المستوية يستلزم عمل عمود واحد على أحد المستقيمات او إسقاط عمود من نقطة على مستقيم فإن هذا يقودنا إلى أن هذا المستقيم لابد أن يكون **T.L** حتى يتم إقامة العمود علية. ويجب أن لاننسى أن طول العمود الذى يتم عملة على **T.L** ليس **T.L** . ويجب أن نلاحظ أنه يمكن أن يكون العمودى هو الطول الحقيقى والمستقيم الساقط عليه العمودى ليس طول حقيقى.

وبالتالى القاعده العامه ان الزاويه *الزاوية القائمة تُسقط قائمة طالما كان أحد أضلاعها* ***T.L*** *يظهر بطولة الحقيقى يتم تطبيقها* سواء كان أحد الاضلاع هو العمودى الذى سيتم إسقاطه على المستقيم أو المستقيم الذى سيتم إسقاط العمودى عليه.

## علاقة النقطة بالمستقيم الواقعة عليه (شرط وقوع نقطة على مستقيم )

الشرط الرئيسى لوقوع نقطة على مستقيم شكل **53– a** هى أن يكون المسقط الأفقى للنقطة يقع على المسقط الأفقى للمستقيم والمسقط الرأسى للنقطة يقع على المسقط الرأسى للمستقيم، أى أن $K_1$ يقع على $a_1$ وكذلك $K_2$ يقع على $a_2$ شكل **53– a**. أما شكل **53–b** لايتحقق الشرط فى المسقط الأفقى وإن تحقق نصفه وكذلك شكل **53–b** ، أما شكل **53– e** فلم يتحقق منه أى شىء.

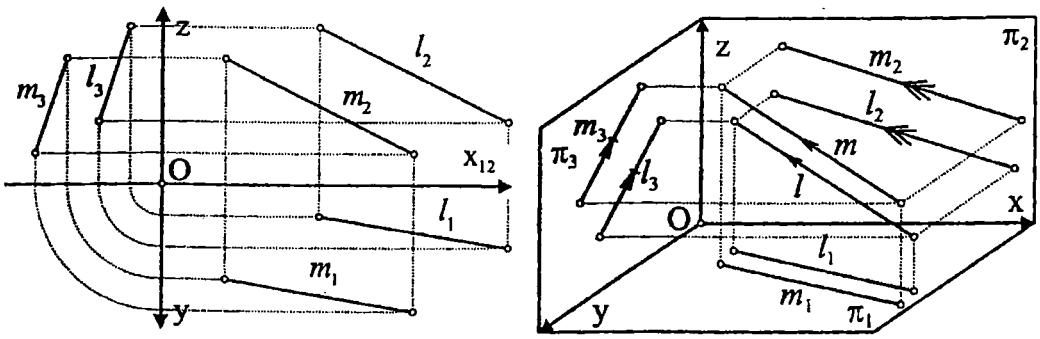



**شكل 53**

## العلاقة بين أى مستقيمين فى الفراغ

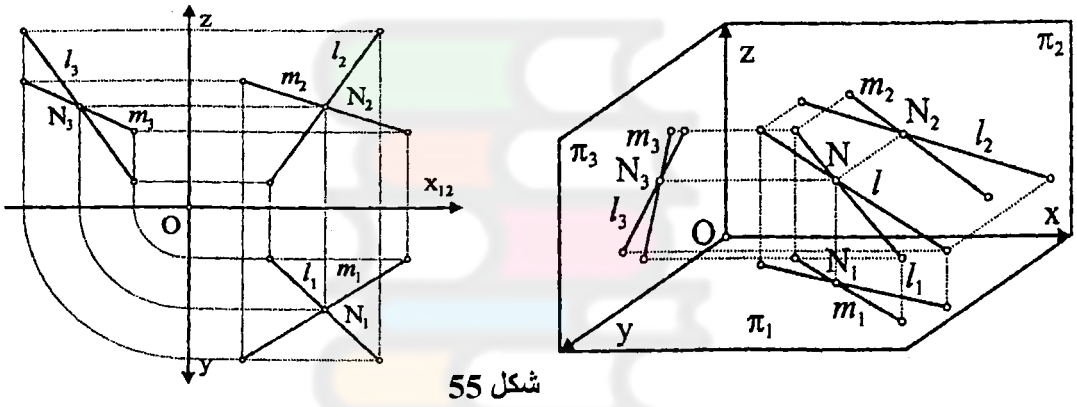
### 1- مستقيمين متوازيين:

أى مستقيمين فى الفراغ يكون المساقط الأفقية للمستقيمين متوازيين وكذلك فى المسقط الرأسى المسقطين للمستقيمين متوازيين، وكذلك أيضا فى المسقط الجانبى، $l_1//m_1, l_2//m_2, l_3//m_3$ . شكل **54**.



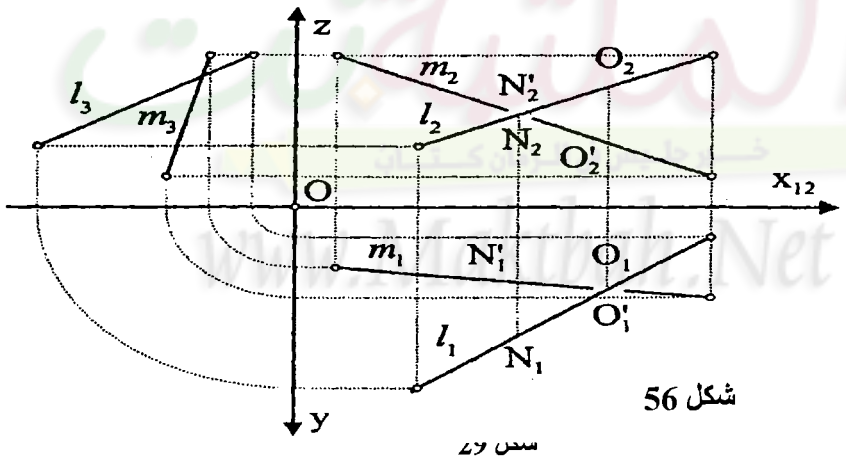

شكل 54

2- مستقيمين متقاطعين:




شكل 55

3- مستقيمين شماليين:



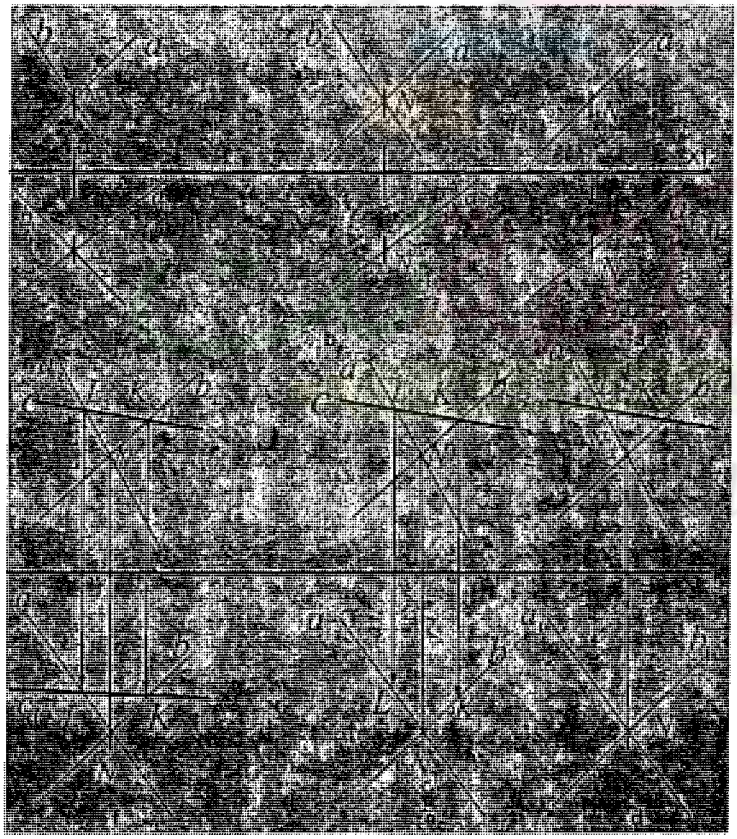

شكل 56

هذه المستقيمات فى شـــكل 56 لايمكن أن يحتويها مستوى واحد فى الفراغ ولايمكن أن يتقاطعا فى أى وضع. ويلاحظ عند تمثيل المستقيمات الشماليه أن المستقيم الواصل بين مسقطى نقطتى التقـــاطع فى المسقط الرأسى والأفقى لايكون عمودى على خط الأرض كما بالشكل الموضح. وايضا عنـــد إســـتخدام الإســـقاط العمودى نجد أن مسقط نقطة التقاطع الظاهره فى المسقط الأفقى تقع على المسقطين الأفقيين للمستقيمين والواضـــحه

شكلا وليست حقيقيقه تولد مسقطين رأسيين لنفس النقطه **ولا تحقق شرط وقوع نقطة على مستقيم** لكلا المستقيمين وهذا مستحيل لأن كل نقطه لها مسقط رأسى واحد ومسقط أفقى واحد. وهذا يتضح من المسقط الأفقى $O_1$ والذى ينتج منه رأسيا بالتناظر فى المسقط الرأسى $O_2$, $O_2'$ وكذلك النقطه $N_2$ ينتج لها رأسيا بالتناظر فى المسقط الأفقى $N_1$, $N_1'$ وهذا أيضا غير ممكن.

**طبيعه نقطة تقاطع مستقيمين:** لو أن هناك مستقيم $a$ علية نقطة $N$ (شكل **57 – a** ) فإن المسقط الأفقى لنقطة $N_1$ يكون متواجد على المسقط الأفقي للمستقيم $a_1$ والمسقط الرأسى لنقطة $N_2$ يكون متواجد على المسقط الرأسى للمستقيم $a_2$, فاذا قطع مسقط رأسى لمستقيم $b_2$ المسقط الرأسى $a_2$ فى $N_2$ فإن $b_1$ لابد أن يقطع $a_1$ فى المسقط الأفقى لنقطة التقاطع $N_1$ ليتحقق شرط وقوع نقطة **N** على كلا المستقيمين(شكل **57–C** )، وبالتالى المستقيمين الواقعين فى نفس المستوى يتقاطعوا فى نقطه واحده . *وبالتالى عكس هذه العلاقة صحيح كما سنرى فى النظرية القادمة*

## نظرية توليد المستقيمات



**شكل 57**

إعتماد على علاقة النقطة بالمستقيم وخاصة علاقه نقطة تقاطع مستقيمين فإنه يمكن إستنتاج المسقط الناقص لاى مستقيم يقع فى مستوى مكون من مستقيمين متقاطعين فى نقطه" وذلك بإسقاط نقاط التقاطع. من شكل **57–d** يوضح المستقيمين المتقاطعين $a,b$ فى نقطة $N$ " وهو شرط أساسى ليكون المستقيمان مستوى " وقد تم

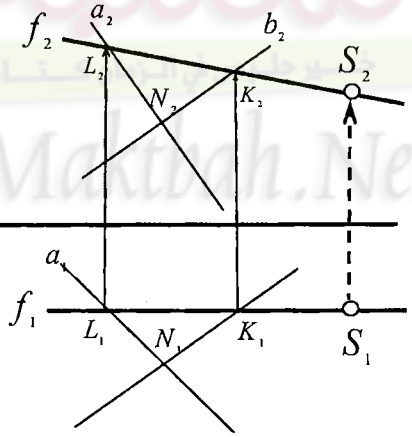
تمرير فى أى مكان المسقط الرأسى للمستقيم $C_2$ والمطلوب إستنتاج المسقط الأفقى $C_1$. هذه هى نظرية توليد المستقيمات، أن تمرر مسقط وتستنتج الأخر بناء على نقاط التقاطع. نلاحظ أن $C_2$ قطع $a_2$ فى نقطة $k_2$ وقطع $b_2$ فى نقطة $L_2$ ، وعليه فإن كل من النقطتين **K,L** لابد أن يحققا شرط وقوع نقطة على مستقيم بالنسبة للمستقيمن **a,b** ، ولذلك يتم إسقاط نقاط التقاطع $k_2$ و $L_2$ لإستنتاج $K_1$ على $b_1$ وإستنتاج $L_1$ على $a_1$ شكل **e-57**. وشكل **f-57** يوضح أن $C_1$ سيكون هو $K_1$ $L_1$ لذلك يتم توصيلهما فيكون المسقط الأفقى للمستقيم.

بذلك نكون قد أوضحنا كيف يتم إستنتاج مسقط ناقص لمستقيم وعلية يمكنك عزيزى الطالب أن تكرر التجربة وتمرر مسقطا رأسيا مثل $C_2$ وتولد وتستنتجج $C_1$ ، ويمكن أن يكون العكس بتمرير $C_1$ وإسقاط نقاط التقاطع على المسقط الرأسى بالتناظر وإيجاد مساقطهم وإستنتاج $C_2$ وكذلك يمكن أن يكون المسقط الذى تمررة مسقط لمستقيم أفقى او وجهى ونستنتج المسقط الناقص. وبالتالى تستخدم نظرية التوليد فى توقيع مسقط ثم إستنتاج المناظر لة. لذلك هذة القاعدة مهمة جدا لإستخدامها فى تطبيقات قادمه خاصة فى إيجاد الأثار الناقصة للمستويات واتجاهاتها كما سيتم شرحة فى المثال القادم.

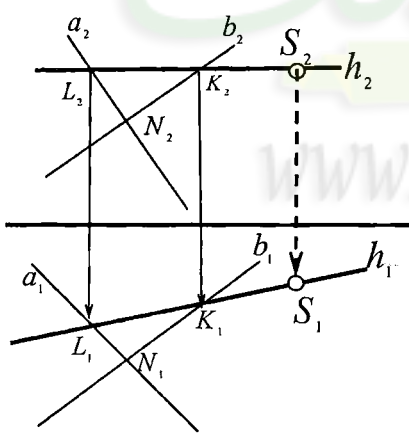
## إيجاد الإحداثيات الناقصة للنقاط بإستخدام قاعدة توليد المستقيمات

يتم ذلك بتمرير مسقط رأسى او أفقى لأى مستقيم تبعا للمسقط المعلوم من النقطة.ثم إستنتاج المسقط الأخر للمستقيم وتوقيع علية المسقط الناقص للنقطة.ومن المثال الأتى لو أن هناك مستوى ممثل بمستقيمين متقاطعين وكان هناك مسقط لنقطه معروف والأخر غير معروف كالأتى:

من شكل **a-58** معلوم مسقط أفقى لنقطة وهى $S_1$ ومطلوب إيجاد مسقطها الرأسى، لذلك يتم تمرير مسقط أفقى لمستقم وجهى $f_1$ حيث أنه يوازى $X_{12}$ وبالتناظر لنقاط تقاطع $f_1$ مع $a_1, b_1$




شكل a-58




شكل b-58

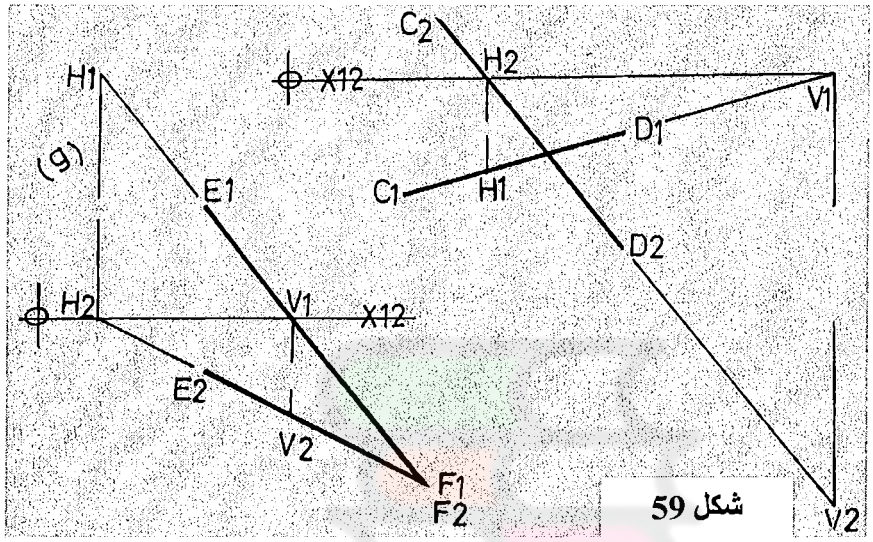
وهى $K_1$ و $L_1$ وإيجاد $k_2$ و $L_2$ على $a_2, b_2$ وهما بالتالى مكونات $f_2$ الذى يقع علية المسقط الرأسى للنقطة $S_2$ وبالتالى يتم تصعيدها علي المسقط الرأسى $f_2$ . بنفس هذة القاعدة فى شكل **b–58** يتم إستنتاج المسقط الأفقى $S_1$ على $h_1$ وذلك بتمرير مسقط رأسى لمستقيم أفقى $h_2$ بالمسقط الرأسى للنقطة $S_2$ ثم إستنتاج $h_1$ من خلال إسقاط نقاط التقاطع ونوقع علية $S_1$ بالتناظر .

**وملخص إيجاد الإحداثيات الناقصة للنقاط -- يتم بتمرير مسقط رأسى او أفقى تبعا للمسقط المعلوم من النقطة لأى مستقيم فى وضع عام أو خاص ثم إستنتاج المسقط الأخر للمستقيم وتوقيع علية المسقط الناقص للنقطة.**

المكتبة نت
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

**مثل المستقيمات الأتية وعين لكل منهما الأثر الأفقى والرأسى: g [E(3,-2,-1), F(7,3,-3)], d [C(2,2,2),D(6,1,-3)]**

الحل:باستخدام قاعدة "وصل وقيم عمود" يتم إستخدامها على كل من المسقط الرأسى والأفقى فيتم إستنتاج الأثار الأفقية والرأسية ، شكل 59.

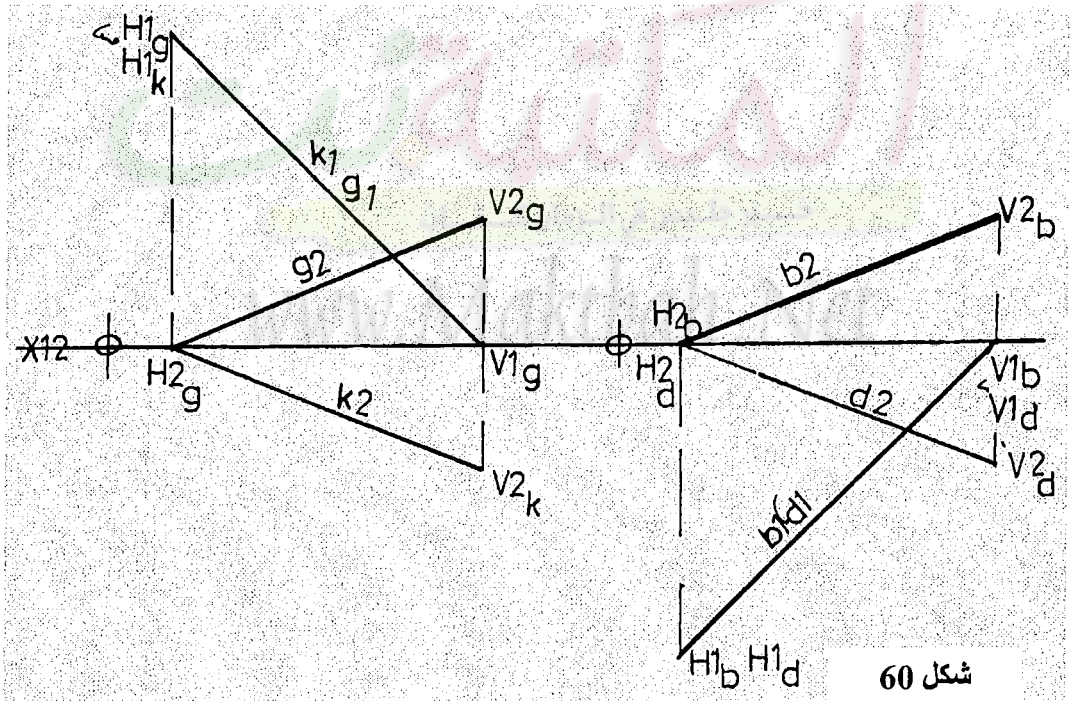


شكل 59

**المعلوم الأثران الأفقى والرأسى H,V لكل من المستقيمات الأتية:**

**b[H(1,5), V(6,2)], g [H(1,-5), V(6,2)], d [H(1,5), V(6,-2)], k [H(1,-5),V(6,-2)]**

الحل : باستخدام قاعدة أسقط عمود ووصل يتم ذلك من الأثر الأفقى إلى الأثر الرأسى ومن الأثر الرأسى إلى الأثر الأفقى أيضا يتم إستنتاج مساقط المستقيمات ، شكل 60.

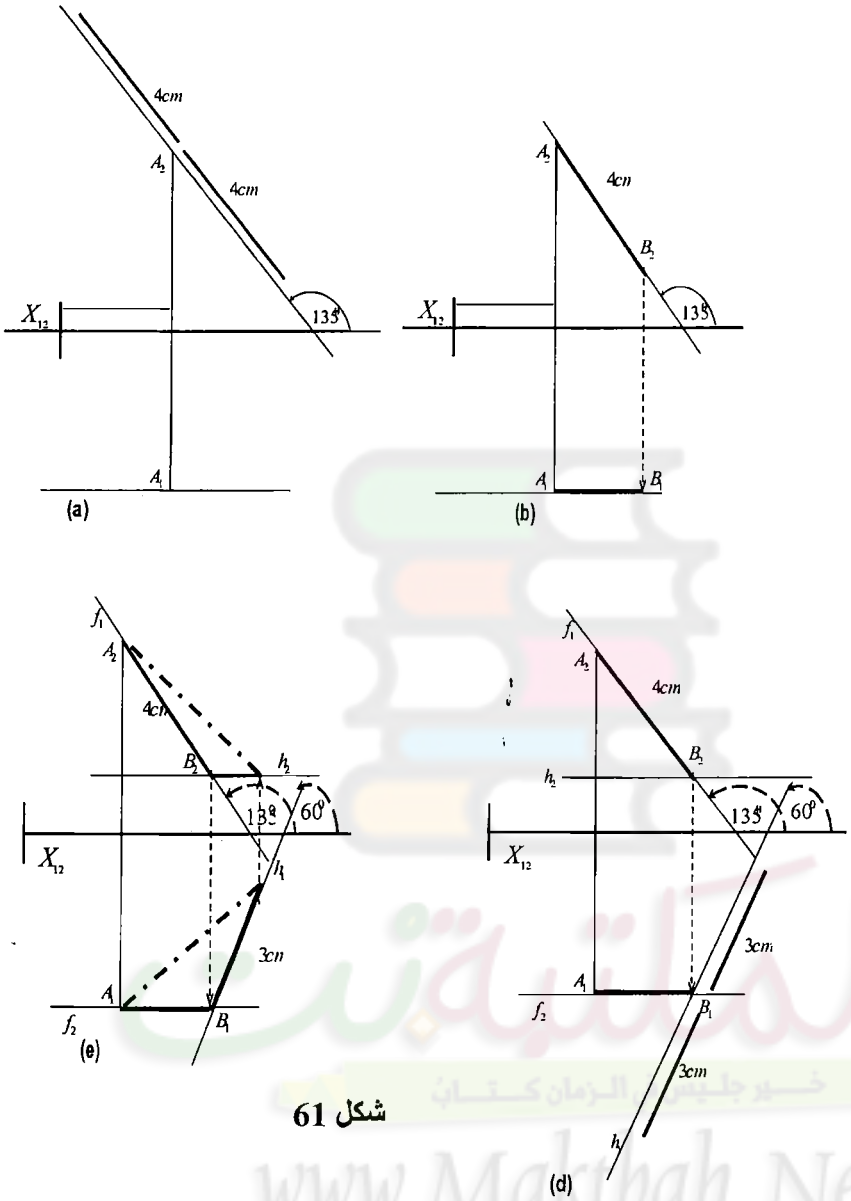


شكل 60

**مثل المثلث ABC الذى فيه: A(3,3.5,4) و AB وجهى ويميل $135^0$ على المستوى الأفقى وطوله 4cm ، BC أفقى ويميل $60^0$ على المستوى الرأسى وطوله 3cm .**

**الحل:**

من الشكل الموضح نجد أن الشكل **a-61** نرسم من نقطة **A** محل هندسى لمستقيم وجهى **f** هذا هو المحل الهندسى للمستقيم **AB** ولكن طوله **4cm** وهذا الطول لايمكن قياسه إلا على مستقيم له طول حقيقى ويقاس فى إتجاه الطول الحقيقى أى على $f_2$ ولكن السؤال هل القياس من نقطة **A** لأعلى أم لأسفل ، الحلان صحيحان والفرق بينهما



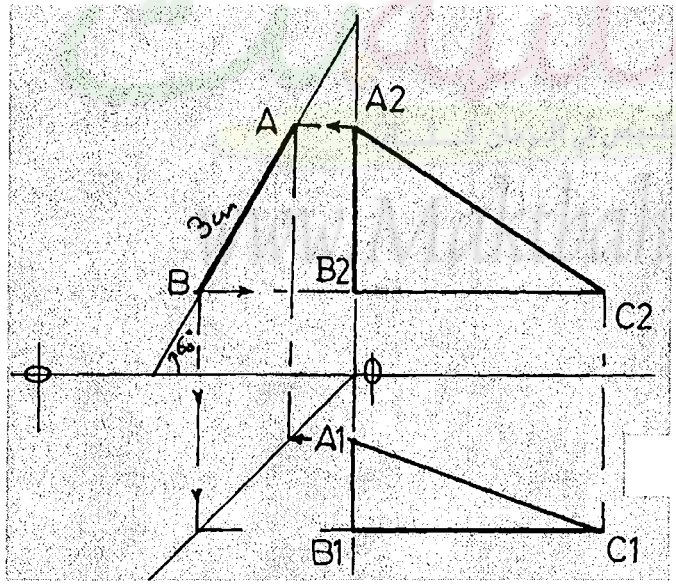

**شكل 61**

أن القياس إن كان لأعلى فهذا يعنى أن $Z_A<Z_B$ ، وإن كان القياس لأسفل فإن وضع نقطة $B_2$ سيكون فى الوضع الذى فيه $Z_A>Z_B$ وبذلك يتوفر مبدئيا حلان ونحن سنأخذ الحل الذى فيه $Z_A>Z_B$ كأحد الحلول. وهذا مايتوفر فى الشكل **(b-61)** حيث نحدد مكان $B_2$ على $f_2$ ومن ثم بالإسقاط المباشر على $f_1$ نوجد $B_1$ . بعد تحديد نقطة **B** يمكن الأن رسم المحل الهندسى للمستقيم **BC** وهومستقيم أفقى حيث نرسم من $B_2$ موازى لخط الأرض وهو $h_2$ ومن $B_1$ المستقيم الذى يميل $60^0$ كمحل للطول الحقيقى وهو $h_1$ كما فى الشكل **(d-61)** ، حيث يتوفر $h_1$

كمكان لقياس الطول الحقيقى ويمكن القياس أيضا عليه لأعلى أو لأسفل. ولكن لو تم قيـــاس طـــول **BC=3cm** لتحديد نقطة **C** لأعلى فهذا يعنى أن $Y_B > Y_C$ ، وإذا تم القياس لأسفل فهذا يعنى أن $Y_B < Y_C$ لذا هناك حلان أخرين وإذا لم يتم التحديد لختار أيهم. لذا فقد تم الأختيار فى الشكل **(e-61)** لتكون **C** لأعلى وتم أكتمال المثلث.

**مثـال: مثل المثلث ABC حيث A(0,1,4)، AB مستقيم جـانبى ويميل $60^0$ علـى المسـتوى الأفقـى وطوله 3 cm والمستقيم BC يوازى خط الأرض وطوله 4cm**

الحل: فى شكل 62 ومن نقطة **A** ونتيجة لأن **AB** مستقيم جانبى لذا فإنه لايظهر طوله وكذلك لاتظهر زاوية ميله إلا فى المستوى الجانبى ولكى يتم رسمه نتجه للمسقط الجانبى لنقطة **A** ونرسم المحل الهندس للمستقيم **ab** يميل على خـــط الأرض $60^0$ أما مساقطه الأفقية والرأسية تكون عمودية على خط الأرض من كل من $A_1$و $A_2$ . من نقطة $A_3$ يتم توقيع الطول الحقيقى فى المستوى الجانبى وكما ذكرنا يمكن لأعلى ولأسفل أى هناك حلان أحدهما لأعلى ويكون فيـــه $Z_B > Z_A$ والأخر لأسفل ويكون فيه $Z_B < Z_A$ وفى هذا الحل أخترناها لأسفل فتم تحديد مكان $B_3$ عن $A_3$ بمسافة **3cm** ومن ثم نوجد بالأسقاط كل من $B_1$و $B_2$ . من كل من $B_1$و $B_2$ يتم رسم المحل الهندسى للمستقيم **BC** حيث أنه يوازى خط الأرض فى كل من المسقطين وطول حقيقى فى المسقطين فنوقع عليه طول **BC=4cm** فنحـــدد بعـــد **C** . وكذلك كان يمكن قياس بعد **C** يمن وشمال وفى هذه الحاله سيكون الأختلاف فى مكان **C** للبعد **X** . لأنه لو تم القياس شمال نقطة **B** ستكون $X_B > X_C$ أما لو تم القياس يمين نقطـــة **B** ســـتكون $X_B < X_C$.



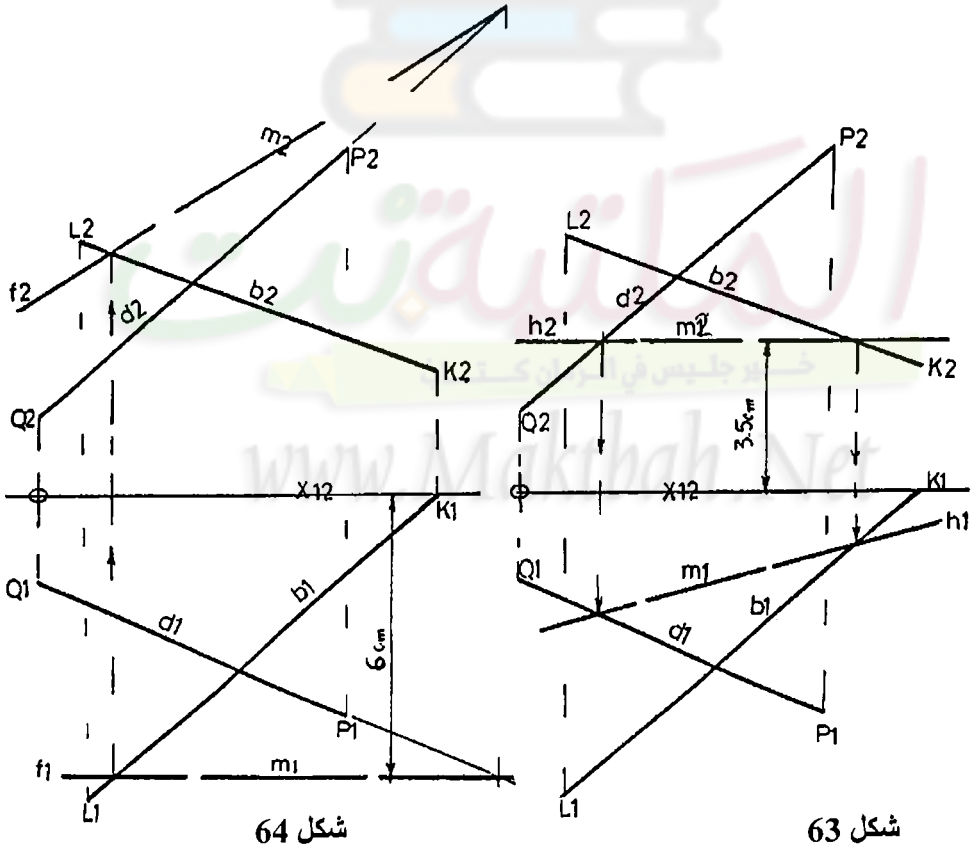

**شكل 62**

**المعلوم المستقيمان الشماليين [ b [K(9,0,3), L(1,7,6)], d[P(7,5,8), Q(0,2,2)] المطلوب تحديد مستقيم m يقطعهما بحيث: 1- أفقى يرتفع 3.5 cm ، 2- وجهى يبعد 6cm ، 3- يوازى خط الأرض ،4- رأسى ، 5- عمودى على المستوى الرأسى، 6- واقع فى المستوى الأفقى**

**الحل:**

أولا– القاطع أفقى يرتفع **3.5 cm**: القاطع الأفقى (أى مستقيم أفقى) من مواصفاته أن مسقطه الرأسى $m_2$= $h_2$موازى لخط الأرض أما مسقطه الأفقى غير معلوم ، وبناء على ذلك من نظرية توليد المستقيمات يمكن تمرير المسقط الرأسى للمستقيم الأفقى $m_2$ على إرتفاع **3.5cm** فيقطع المساقط الرأسية للمستقيمين الشماليين فى نقطتين ، نوجد مساقط نقاط التقاطع الأفقيه على للمستقيمن الشمالين ونصلها ببعض فيكون هذا هو $m_1$ شكل 63.

ثانيا– القاطع وجهى يبعد **6cm** : بنفس الإسلوب السابق يتم التطبيق ولكن إعتماد على خاصية المستقيم الوجهى و نظرية توليد المستقيمات، حيث نمرر المسقط الأفقى للمستقيم الوجهى $f_1=m_1$ فنستنتج المسقط الرأسى للقاطع $m_2$ شكل 64.

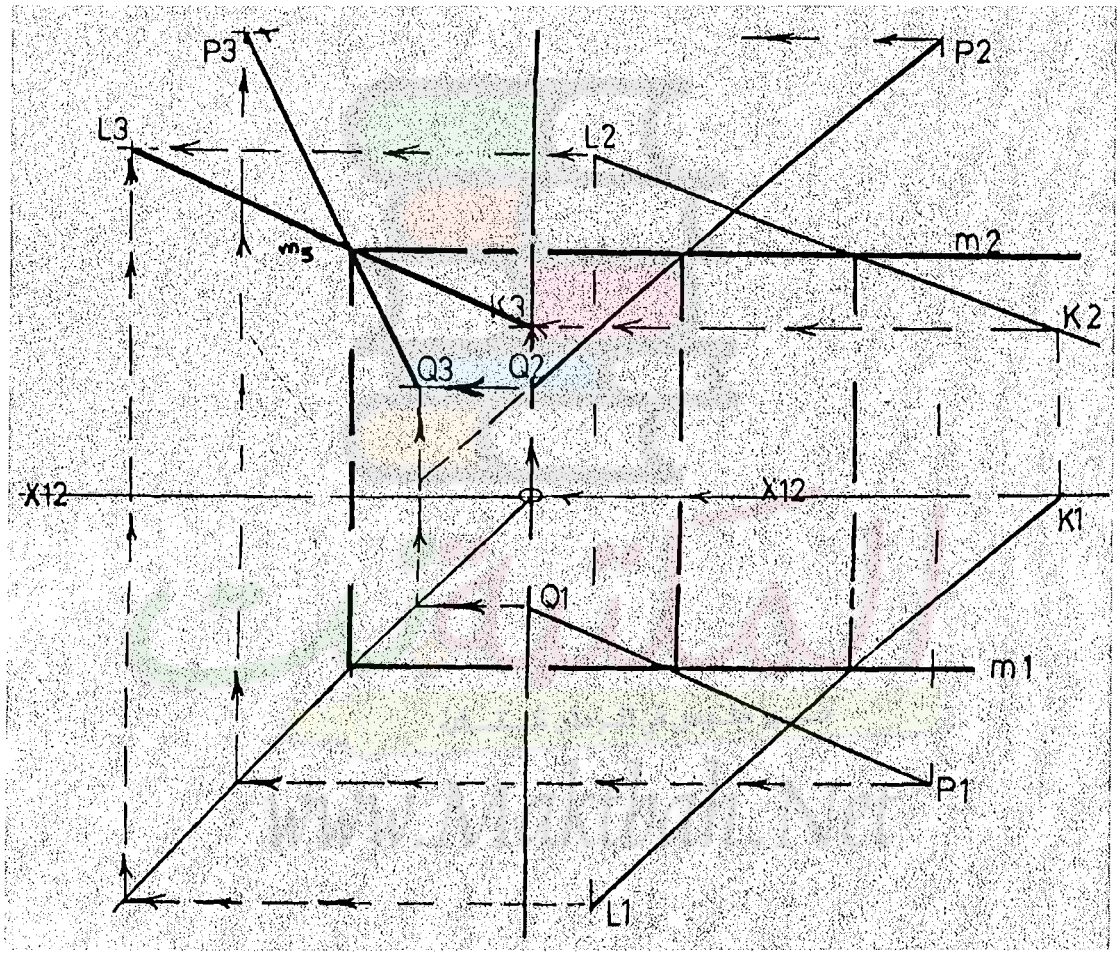



شكل 63




شكل 64

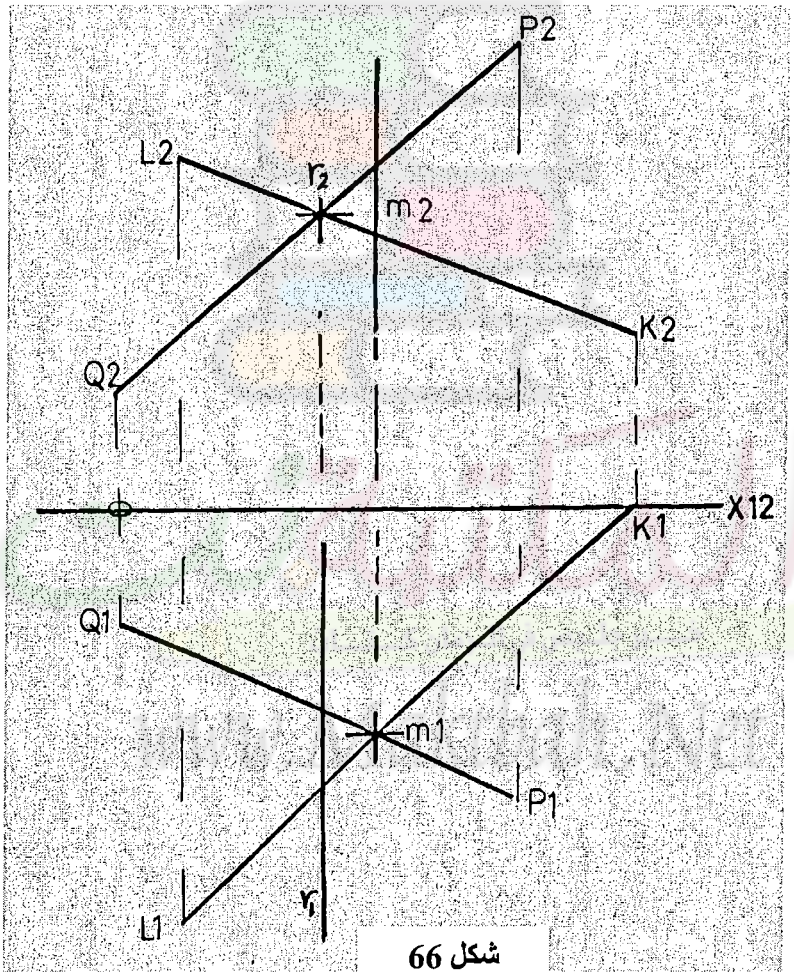
ثالثا- القاطع يوازى خط الأرض : لكى يقطع مستقيم عمودى [أحد مساقطه نقطة] أى مستقيمين شمالين لابد أن نبحث فى نفس المسقط الذى يظهر فية المستقيم نقطة عن النقطة المشتركة بين مسقطى المستقيمين الشماليين. والقاطع الذى يوازى خط الأرض يظهر نقطة فى المستوى الجانبى لأنه عمودى عليه شكل 65، وبالتالى نذهب للمستوى الجانبى لنوجد المسقط الجانبى للمستقيمن الشماليين فنجدهم مشتركين فى نقطة ، تكون هذه هى $m_3$ للخط القاطع [ أى المسقط الجانبى للقاطع الذى يوازى خط الأرض ] فنوجد مساقطه الأفقية والرأسية $m_1,m_2$ بالإسقاط المباشر شكل 65.




شكل 65

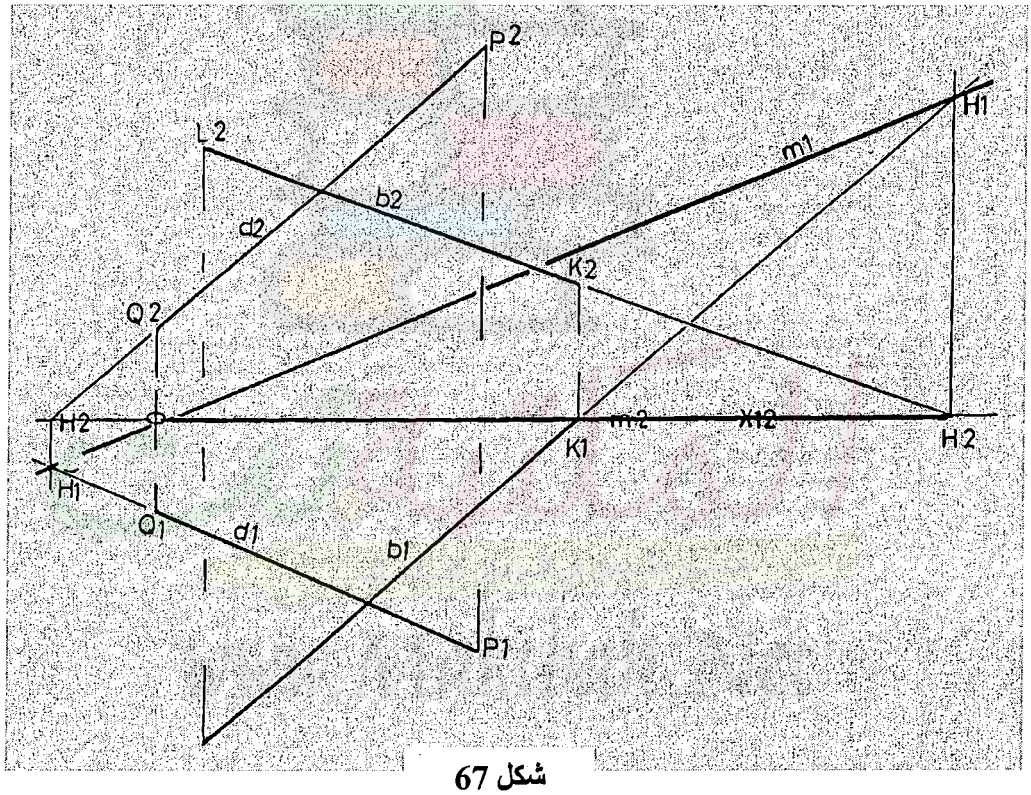
رابعا– القاطع رأسى: بنفس الإسلوب للقاطع العمودى على الجانبى ولكن نبحث على النقطة المشتركة للمستقيمين الشماليين الوجودة فى المستوى الأفقى لأن القاطع مسقطه فى الأفقى نقطة وهو $m_1$ ونوجد مسقط القاطع الرأسى وهو خط رأسى $m_2$ شكل 66.

خامسا– القاطع عمودى على المستوى الرأسى: بنفس الإسلوب للقاطع العمودى على الأفقى ولكن نبحث على النقطة المشتركة للمستقيمين الشماليين الوجودة فى المستوى الرأسى $r_2$ ونوجد مسقط القاطع الأفقى وهو خط رأسى $r_1$ شكل 66.



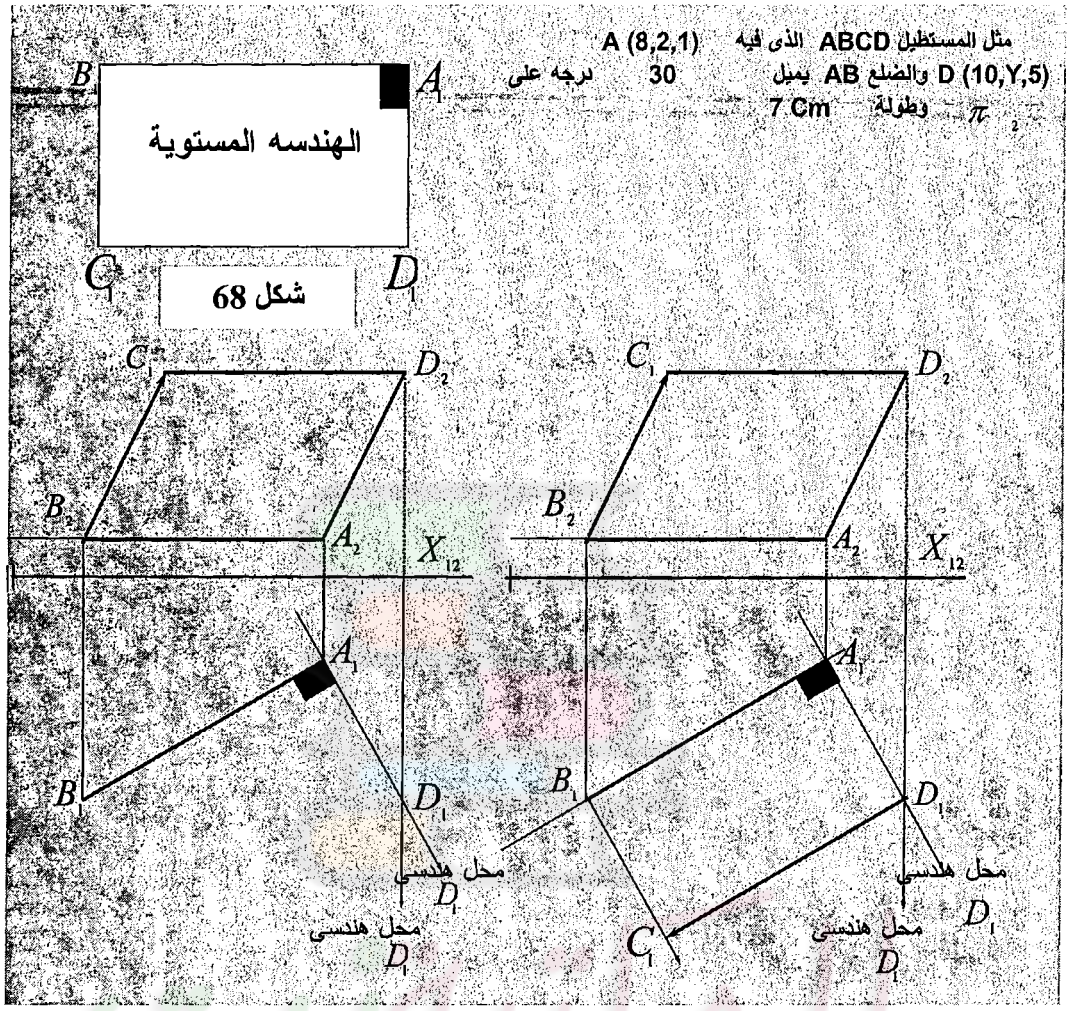

شكل 66

سادسا– القاطع واقع فى المستوى الأفقى: لكى يقطع مستقيم مستقيمين ويكون هذا المستقيم واقع فى الأفقى ، لابد أن هذا القاطع يقطع المستقيمين فى نقطتين واقعتين فى المستوى الأفقى. إذا لابد أن نبحث على المستقيمين الشماليين عن النقطة التى تقع على كل منهما وتقع فى المستوى الأفقى حتى يمر بهما المسقط الأفقى للقاطع. ومن مميزات المستقيم أن النقطة الوحيدة التى تقع عليه وتقع فى الأفقى هى الأثر الأفقى للمستقيم شكل 67. وبذلك لابد أن نحصل على الأثار الأفقية للمستقيمين الشماليين $H_1$ للمستقيم b و $H_1$ للمستقيم d وبذلك يكون الواصل بين $H_1$ لكلا المستقيمين هو $m_1$ شكل 67، والواصل بين $H_2$ لكلا المستقيمين هو $m_2$ . { لو كان القاطع المطلوب واقع فى المستوى الرأسى، إذا يمر بالأثار الرأسية، ولو كان القاطع المطلوب واقع فى المستوى الجانبى، إذا يمر بالأثار الجانبية}




شكل 67

مثال:

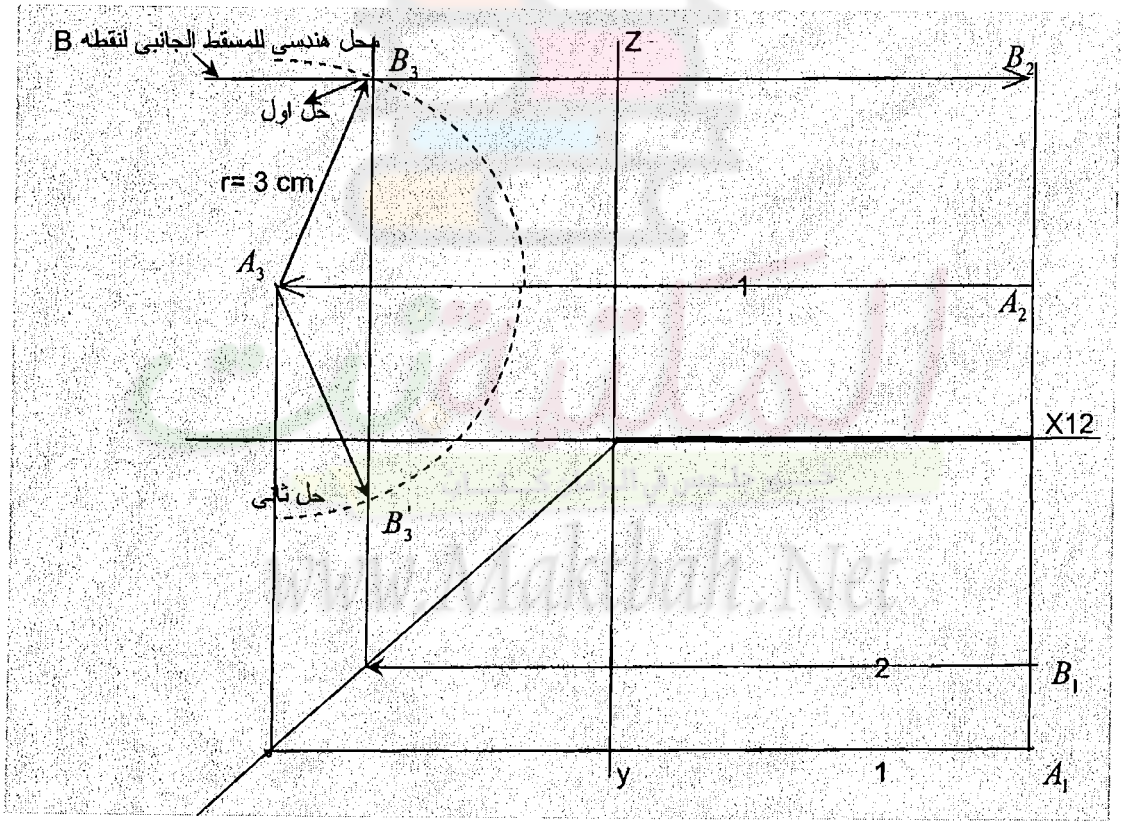



شكل 69 شكل 70

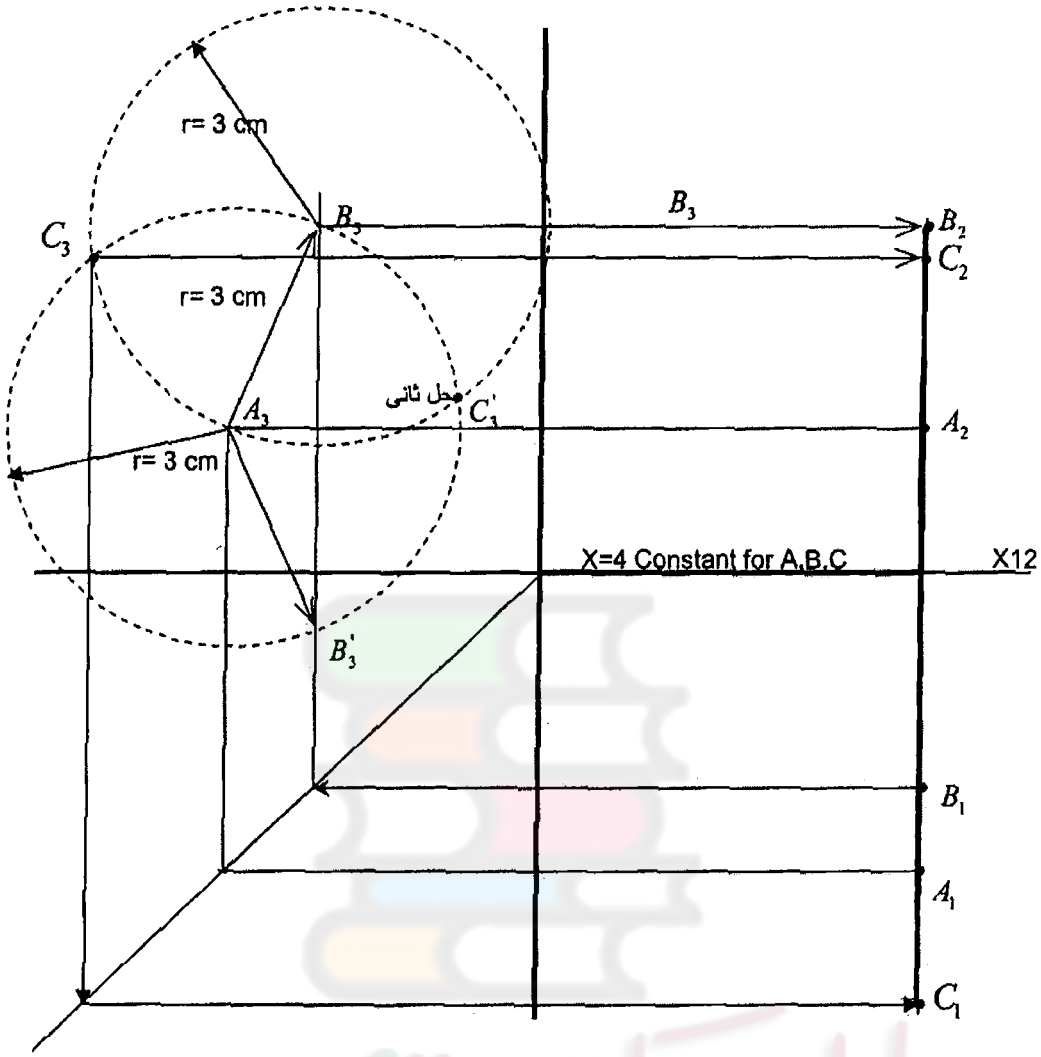
نجد من المعطيات أن المسقط الرأسى مكتمل بالنسبة للمستطيل ولكن المسقط الأفقى ناقص شكل 69، ومن الحل بالهندسه المستويه شكل 68 نجد أن المعطى هو الضلع AB وناقص الإحداثى للنقطة D ومن خصائص المستطيل أن الضلع ABعمودى على AD وهذا يعنى أننا سنقيم عمودى على AB فيكون محل هندسى للضلع AD وهذا متاح فى الهندسة المستوية شكل 68. ولكن لتنفيزة فى الهندسة الوصفية لابد أن يكون الضلع AB فى حالة T.L ومن حسن الحظ أنه T.L فى المسقط الأفقى لأنه مستقيم أفقى شكل 70 وبالتالى يمكن عمل عمودى عليه مباشرة فى المسقط الأفقى فيكون هذا العمودى محل هندسى للنقطة $D_1$ يتقاطع مع المحل الرأسى فى المسقط الأفقى لنقطة $D_1$ شكل 70.

**مثل المثلث الجانبى المتساوى الأضلاع = 3 سم والذى فيه نقطه A(5,4,2) ونقطه B(?,3,?)**

الحل: من خاصيه أن المثلث جانبى أى أن جميع أضلاعه توازى المستوى الجانبى أى أنها مستقيمات جانبيه أى تظهر بطولها الحقيقىفى الجانبى وبالتالى يتم التعامل معها على أنها فى وضع الهندسه المستويه أى يمكن قياس الأطوال مباشره فى المستوى الجانبى . لذلك يتم إيجاد المسقط الثالث لنقطه **A** بالمسار **1** ثم من الإحداثى $B_1$ يتم تحويله للمستوى الجانبى كمحـــل هندسى كما هو موضح فى شكل **71** على المسار **2** فيكون محل هنسى للمسقط الثالث لنقطه **B** . نتيجه لأن طول ضلع المثلث **3** سم فيتم الإرتكاز فى $A_3$ بنصف قطر **3** سم ونقطع المحل الهندسى ل **B3** فى نقطه "نقطتين" فيكون أحدهما هو المطلوب ويمكن الإعتمادعليه ، لذلك سنأخذ أحدهما وليكن العلوى ما لم يتم تحديد أى وضع داخل السؤال وبعد إستنتاج **B3** يمكن الإرتكاز فى كل من $A_3, B_3$ بدائره نصف قطرها **3** سم كما بالشكل **72** فيتقاطعا ويتنج إحتمالين للنقطه **C** وبهذا يكون لهذا المثال أربعه حلول مالم يتم تحديد أوضاع خاصه للنقاط.



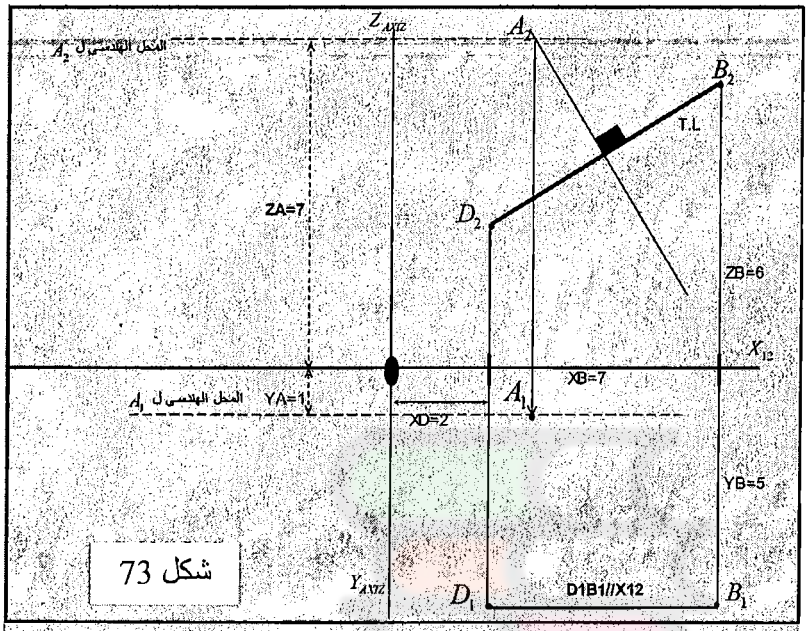

**شكل 71**



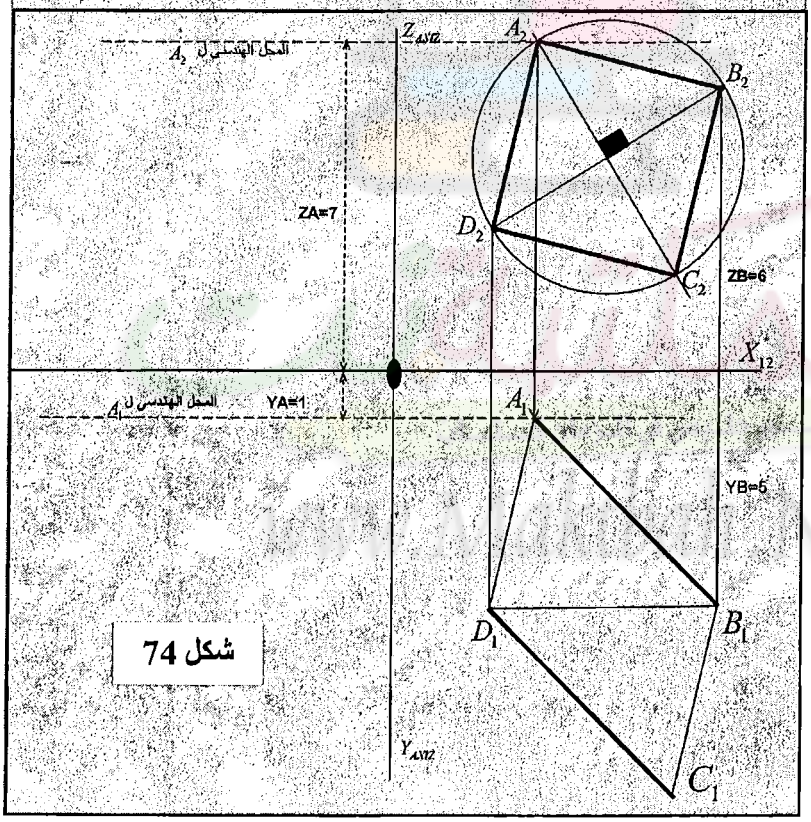

شكل 72

www.Maktbah.Net

عين مساقط المعين ABCD الذي قطره BD حيث D ( 2,5,3) , B ( 7 , 5 , 6 ) ورأسه A ( ?,1,7 )




شكل 73



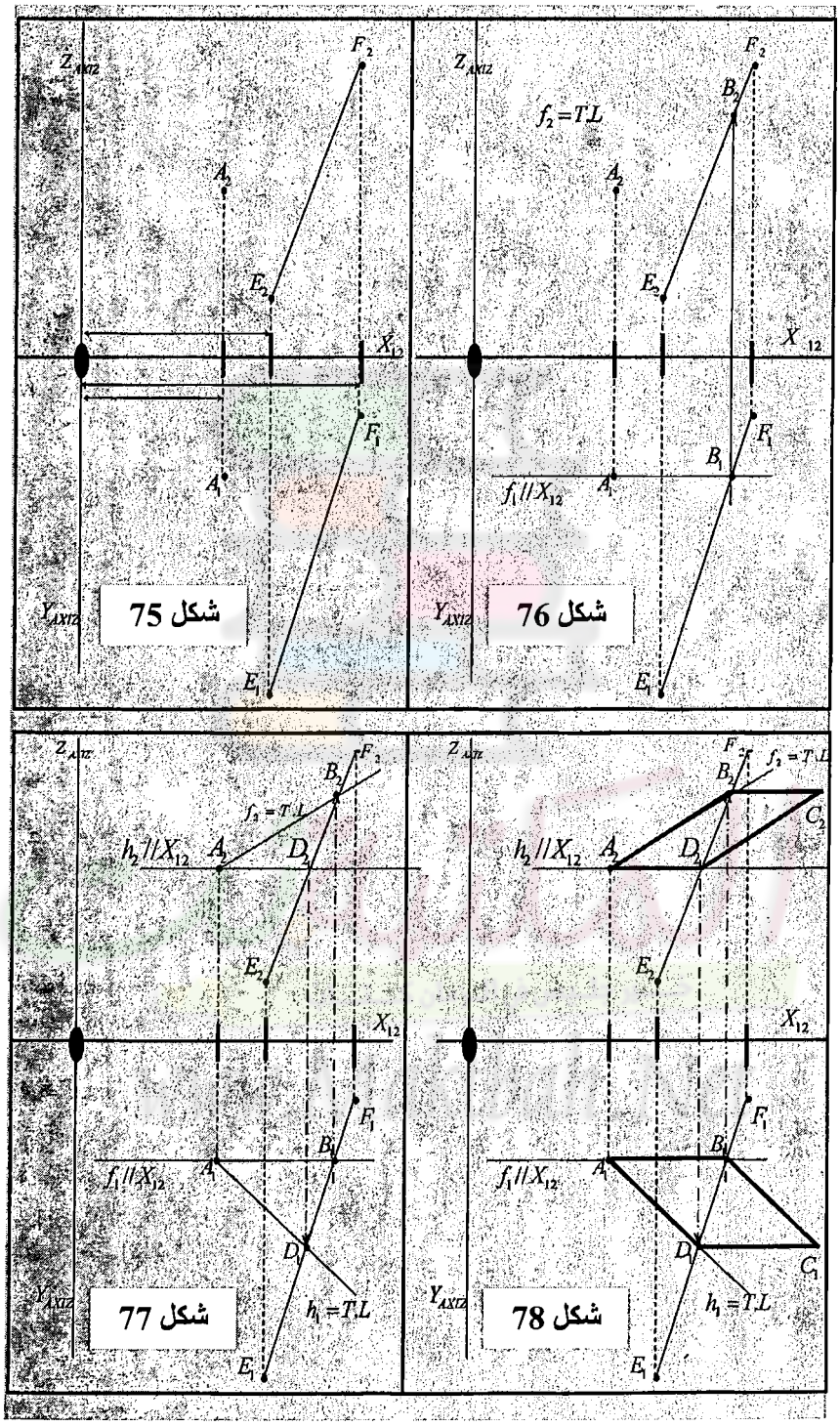

شكل 74

الحل: بعد توقيع المعطيات ومن المواصفات الهندسية للمعين أن القطرين متعامدين ومن إحداثيات النقطتين B,D نجد أن الإحداثي y متساوى أى أن المستقيم BD مستقيم وجهى أى يظهر بطوله الحقيقى فى المستوى الرأسى كل 73 وبالتالى يمكن تطبيق نظريه التعامد مادام أحد أضلاع الزاويه القائمه طول حقيقى . لذلك يمكن إقامة عمودى على المسقط الرأسى للمستقيم الوجهى $B_2D_2$ من منتصفه يتقاطع مع المحل الهندسى لنقطه A فى المسقط الرأسى وعليه نكون قد حصلنا على المسقط الرأسى $A_2$ شكل 73 ثم بالإسقاط المباشر على المحل الهندسى للمسقط $A_1$ نحصل عليها ويصبح لدينا ثلاث نقاط من الشكل الرباعى (المعين) فنكمله بالتوازى شكل 74.

دكتور مهندس/ أحمد محمد القصاص

**معطى نقطة A ( 3,2,3 ) والمستقيم FE حيث F = ( 6,1,5 ) , E ( 4,6,1 ) والمطلوب تمثيل متوازي الاضلاع ABCD الذى قطره BD يقع على المستقيم FE ، وضلعه AB وجهي و ضلعه AD أفقي**

الحل:



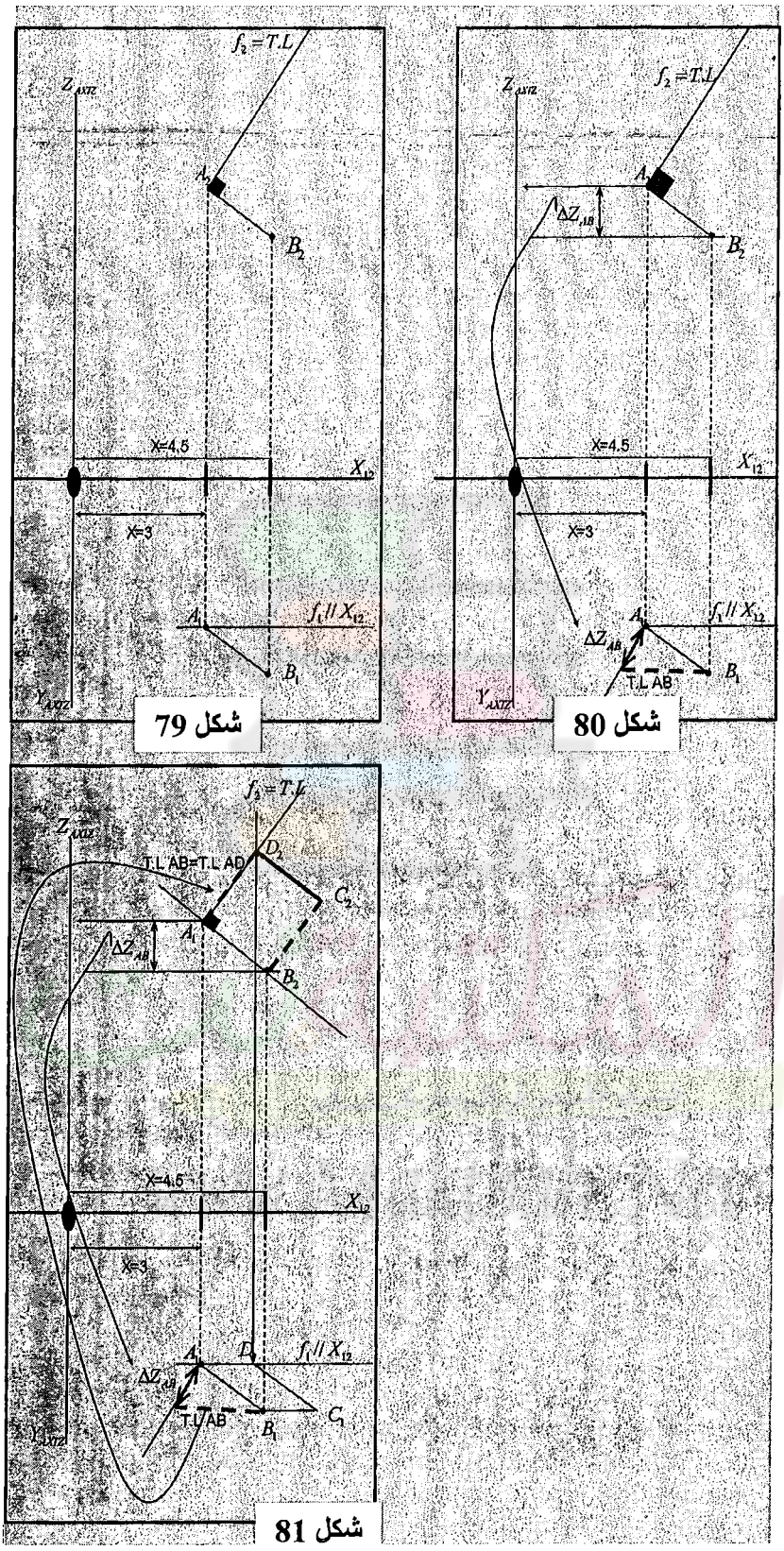
من المعطيات العامه فى شكل 75 و من خاصيه أن AB مستقيم وجهى لذا يتم إستغلال خواصـــه فى أن $f_1 // X_{12}$ ونمرر من $A_1$ موازى لخط الأرض يقطع $F_1 E_1$ فى $B_1$ ومنه نصعد على $F_2 E_2$ لنأتى بمكان $B_2$ شـــكل 76. وكذلك من خاصيه أن المستقيم AD مستقيم أفقى لذا فى شكل 77 نمررمن $A_2$ مستقيم $h_2 // X_{12}$ يقطع $F_2 E_2$ فى المسقط $D_2$ نذهب للأسفل لإستنتاج $D_1$ وبالتالى يصبح لدينا فى شكل 77 ثـــلاث نقـــاط فى كـــل مســـقط وبإستخدام التوازى فى شكل 78 يتم إستكمال الشكل المتوازى.

**مثال: مثل المربع ABCD حيث , ( 5, 4, 4.5 ) B ( 3,3,6 ) A والضلع AD مستقيم وجهي .**

الحل: بإستخدام النظريه أن الزاويه القائمه تظهر قائمه مادام أحد أضلاعها طول حقيقى ، ونتيجه لأن الضـــلع AD وجهى فإنه يظهر بطوله الحقيقى فى المستوى $\pi_2$ وبالتالى يمكن إستخدام نظريه التعامد فى المستوى الرأسى $\pi_2$ والناتج منه يتم إسقاطه مباشره إلى المستوى الأفقى، لذا يتم رسم عمودى على المسقط $A_2$ $B_2$ من $A_2$ فيكون محل هندسى ل $A_2$ $D_2$ ومن $A_1$ موازى لخط الأرض فيكون محل هندسى ل $A_1$ $D_1$ كما بالشكل 79.

فى شكل 80 يتم إستنتاج الطول الحقيقى لضلع المربع بإستخدام القاعده ( المسقط الأفقـــى + $\Delta Z_{AB}$ = T.L ) . فى شكل 81 يتم قياس الطول الحقيقى المستنتج سابقا على إتجاه الطول الحقيقى للمستقيم AD وهو فى الإتجـــاه الرأســـى وبذلك نستنتج $D_2$ ونستكمل الشكل بالتعامد والتوازى لأن ضلعين من الأضلاع أطوال حقيقيه كما فى شكل 81

www.Maktbah.Net

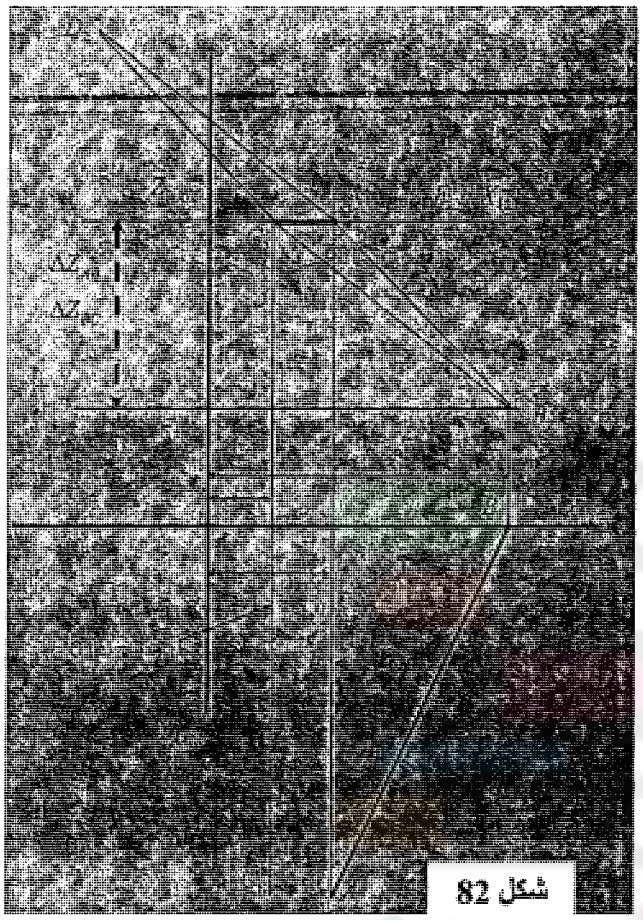



شكل 79

شكل 80

شكل 81

مثل المعين **ABCD** إذا كان القطر **AC** مستقيم أفقي حيث **C(1,?,5)** و**A ( 2,6,? )** و **B ( 5,0,2)**

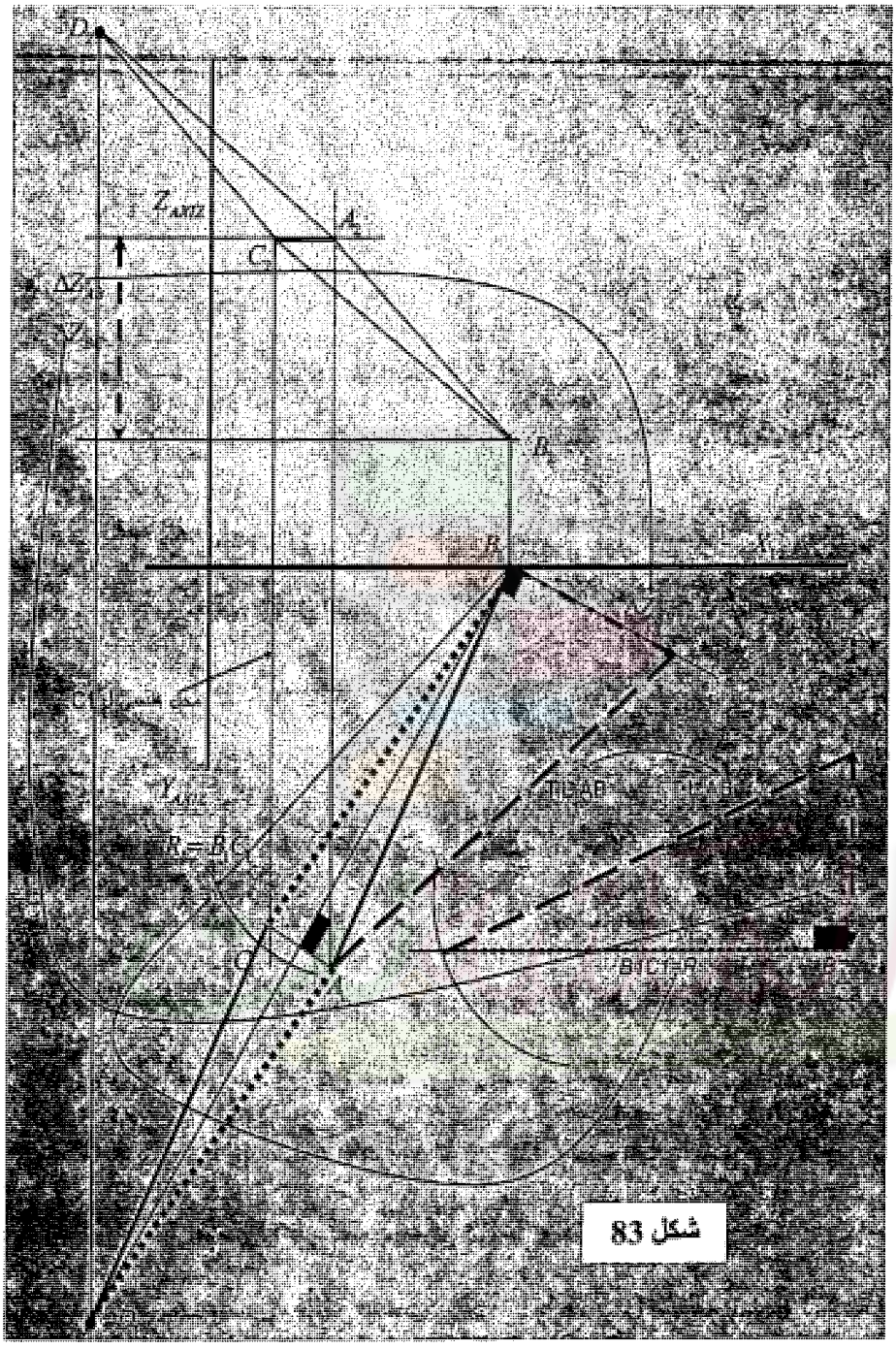



الحل: من مميزات المعين أن كل الأضلاع متساويه والأقطار متعامده ، ومن المعطيات نجد أن الشكل للمعين فى المسقط الرأسى تم تحديده بالكامل وليس به أى مشكله كما بالشكل 82

كيف نفكرفى الحل: تبقى المشكله فى المسقط الأفقى حيث المطلوب تحديد مكان المسقط الأفقى للنقطه **C**. وليتم ذلك لابد أن نعرف أننا مباشره نحتاج لقاعده الطول الحقيقى والتى يُذكر به المسقط الأفقى ( المسقط الأفقى **T.L= ΔZ +**) حيث أنه غير معلوم أفقيا غير $B_1$ ، لذلك يجب أن نطبق المثلث الخاص بالطول الحقيقى بالنسبه للضلع **BC** (شكل 83 ) .وكعمليه مساعده نرسم خارج التمرين خط أفقى يكون محل هندسى للمسقط الأفقى **BC** ثم نرسم عمودى عليه هو $\Delta Z$ ومن نهايه $\Delta Z$ نركز بالبرجل ونقطع خط عمل المسقط الأفقى بالطول الحقيقى للضلع **BC** فنستنتج طول المسقط الأفقى أى المسافه $C_1 B_1$ (شكل 83 ) ، وبذلك نأخذ هذه المسافه ونتوجه بها إلى المسقط الأفقى ونركز فى $B_1$ ونقطع المحل الهندسى ل $C_1$ ونستنتج بذلك المسقط الأفقى للنقطه **C** ونكمل الشكل الأفقى للمعين (شكل 83 ) . ومما سبق نجد أننا ليس لدينا الطول الحقيقى للمستقيم **BC** ولكننا نستعيض عنه بالطول الحقيقى للمستقيم **AB** لأنه يساويه فى الهندسة المستوية ، ولذلك نأتى بالطول الحقيقى للمستقيم **AB** بإستخدام نفسى قاعده فرق البعد ونستخدمه بالنسبه للضلع **BC**. وهذه الخطوات واضحه فى شكل 83 ويجب على الطالب أن يقرأ وهو يقوم بالحل وليست مجرد قراءة للحل. ويمكن الحل إعتماد على المسقط الرأسى ل

BC ونستنتج بعد إستخدام الT.L ال $\Delta Y_{BC}$ وبالتالى نركز فى $B_1$ ونوقع البعد الذى يبعد به $C_1$ فى الإتجاه Y

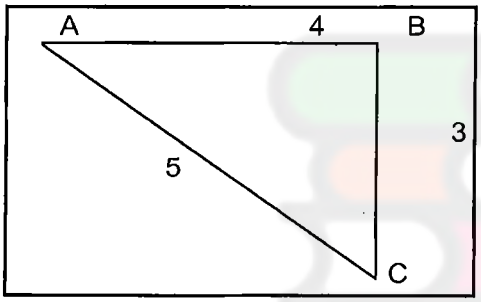
ونكمل الشكل.



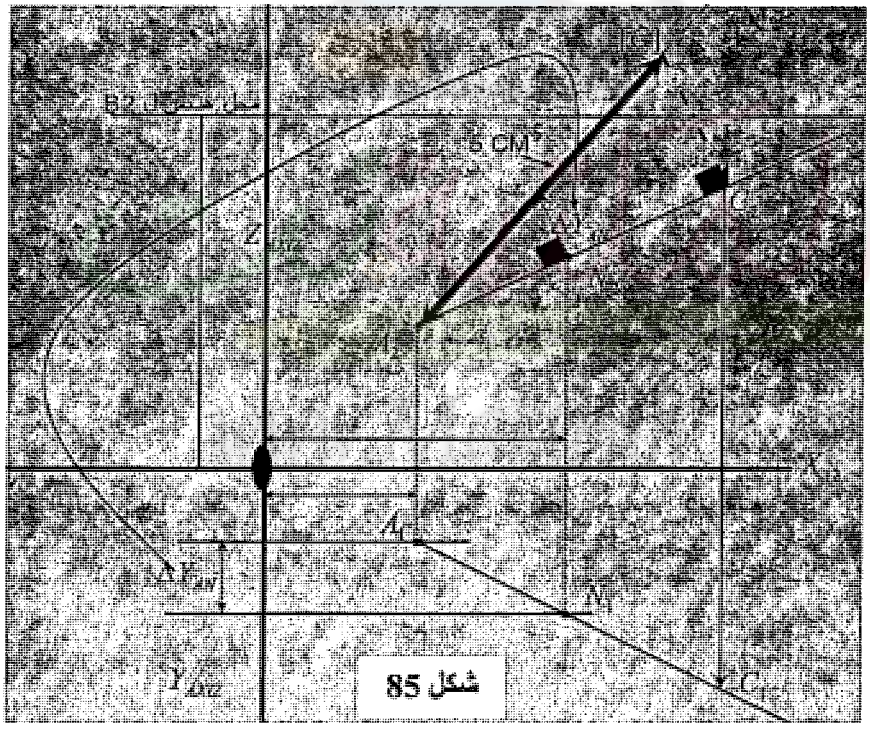
شكل 83

ين مساقط المربع ABCD فيه ( 1,4,4 )A وقطره BD يقع على المستقيم الأفقي F [ ( 3,1,6 ) E [ ( 0,4,? ) ]

الحل : بعد توقيع المعطيات يمكن قراءه والبدء فى الحل وذلك مع رسم الحل الفراغى . من مميزات الشكل والمعطيات نجد أن القطر BD طول حقيقى وعليه يمكن إسقاط عمود عليه أو إقامة عمود منه وبالتالى لأن القطر BD طول حقيقى فى المسقط الأفقى نقوم من $A_1$ بإسقاط عمود على المحل الهندسى للقطر $B_1D_1$ يقطعه فى مركز المربع $O_1$ ثم نأتى بالطول الحقيقى لنصف القطر OA بفرق البعد ونقوم بقياسه على الطول الحقيقى للقطر BD من نقطه $O_1$ يمين وشمال فنحصل على نقطتى BوD ونكمل المربع بالتوازى أو بالقياس المتماثل لنقطه A من O فنحصل على C.

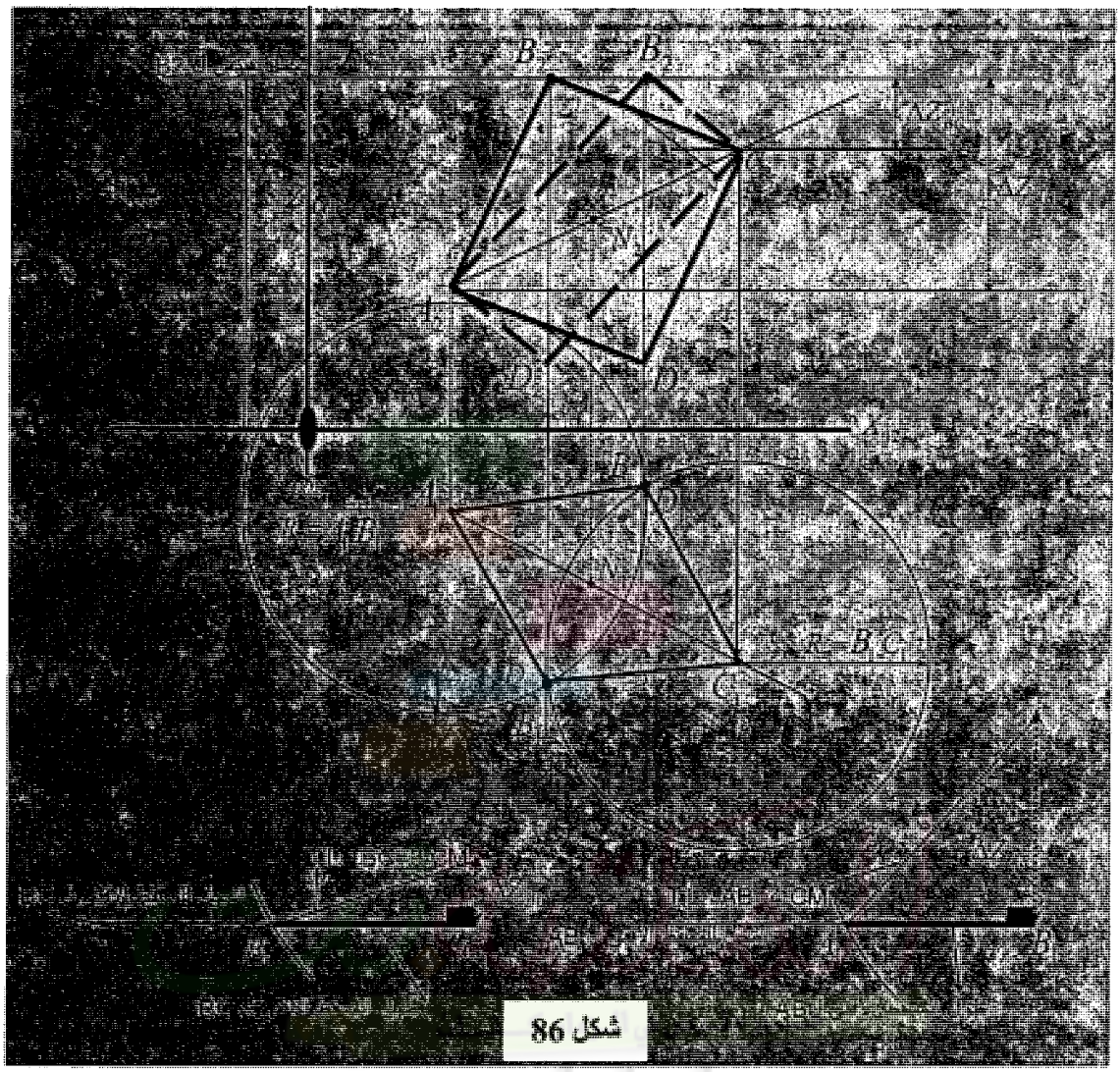



23 .عين مساقط المستطيل ABCD اذا كان A ( 2,1,2 ) وضلعه AB 4 سم وBC =3 سم ونقطة N ( 4,2,3 ) تقع على القطر AC و معلوم الرأس B ( ?,?,5 ) .




من المميزات الهامه للمستطيل "فيثاغورث" شكل 84 فإن طول القطر للمستطيل يكون 5 سم وبالتالى لو تم تحديد اتجاه الطول الحقيقى للقطر AC ثم قياس عليه 5 سم نكون قد حصلنا على النقطه C شكل 85. من إحداثيات نقطه B المعلومه وهى Z نجد ان $\Delta Z_{AB}$ و $\Delta Z_{BC}$

أصبحت معلومه ومنهم نفهم اننا سنطبق قاعده فرق البعد لكل من المستقيمين AB و BC حتى نستطيع إستنتاج طول المساقط الأفقيه لهم ونأتى بالنقطتين كما فى الاشكال الموضحه شكل 86.



شكل 86

www.Maktbah.Net

## أوضاع المستقيمات فى الفراغ والإسقاط من منظور الرسم الهندسى

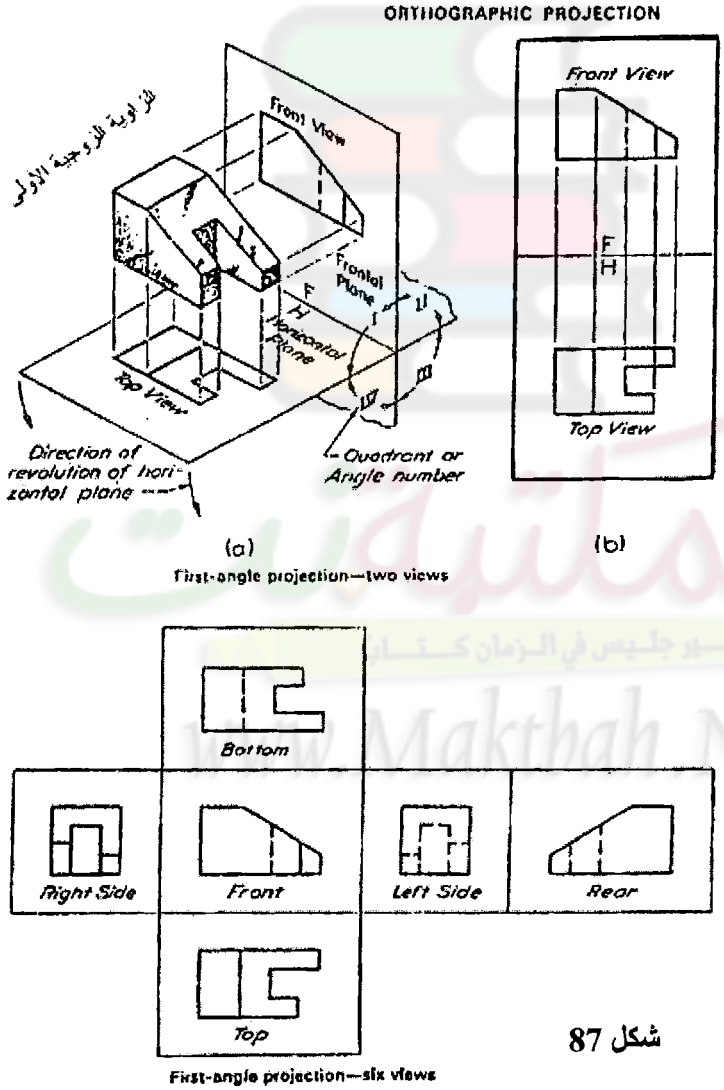
كما تم الحدث سابقا فى الفرق فى الإسقاط بين الرسم الهندسى والهندسة الوصفية ، أن الرسم الهندسى

1. يعتمد على الإسقاط للأجسام
2. لايستخدم الإحداثيات السالبة لأنه لاتوجد أبعاد بالسالب كما أنه يصف إسقاط أجسام محددة الأبعاد بنـــاء على وضعها فى الزوايا من خلال القائم بعملية الرسم.

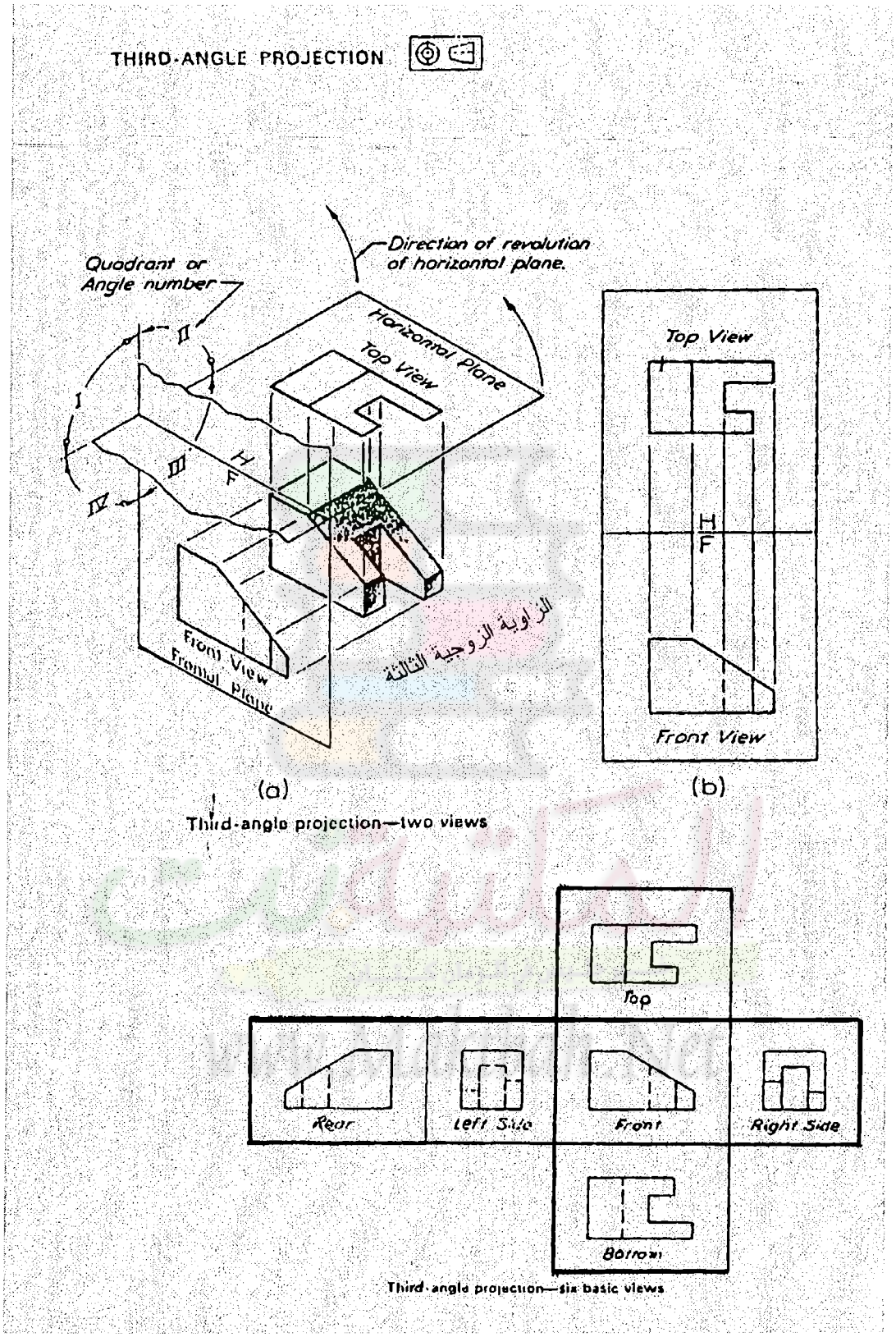
دكتور مهندس/ أحمد محمد القصاص

3. يقوم بعملية الإسقاط فى الزاوية الزوجية الأولى أو الثالثة شكل 90- ويعتمد على الركن السالب أو الموجب داخل الزاوية الزوجية تبعا لإتجاه المسقط الجانبى المطلوب سواء كـــان **left hand side** أو **Right hand side** . شكل 87 الإسقاط فى الزاوية الأولى **First angle projection** و شكل 88 يوضح الإسقاط فى الزاوية الثالثة **Third angle projection**. وكذلك فى شكل 89 يوضح الجانبين **left hand side** و **Right hand side** من خلال الإسقاط فى الزاويـــة الأولى ويتضـــح فيـــه الأوضاع الخاصة بالمستوى الجانبى وطبيعة الإسقاط عليه.

**Orthographic Projection : First Angle**

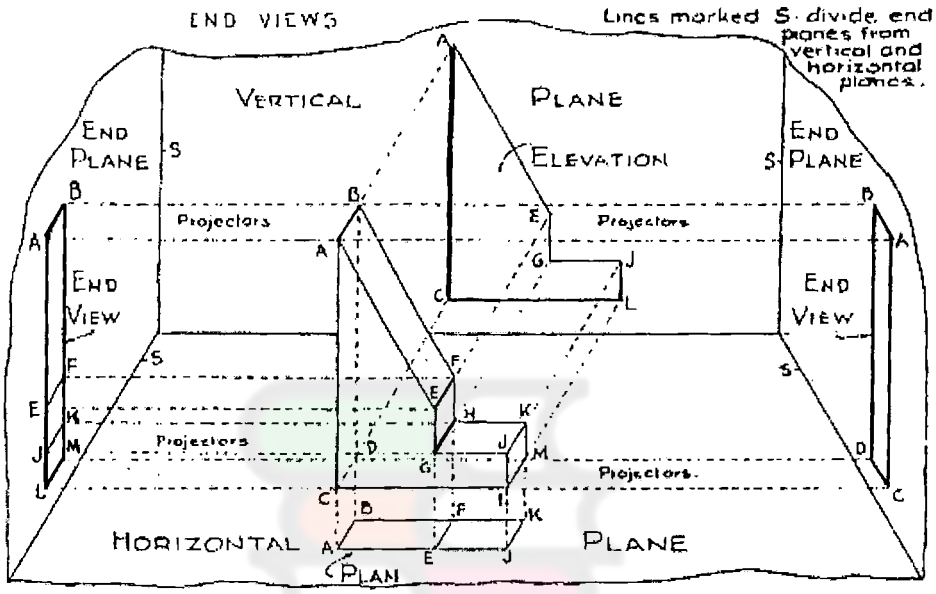



شكل 87

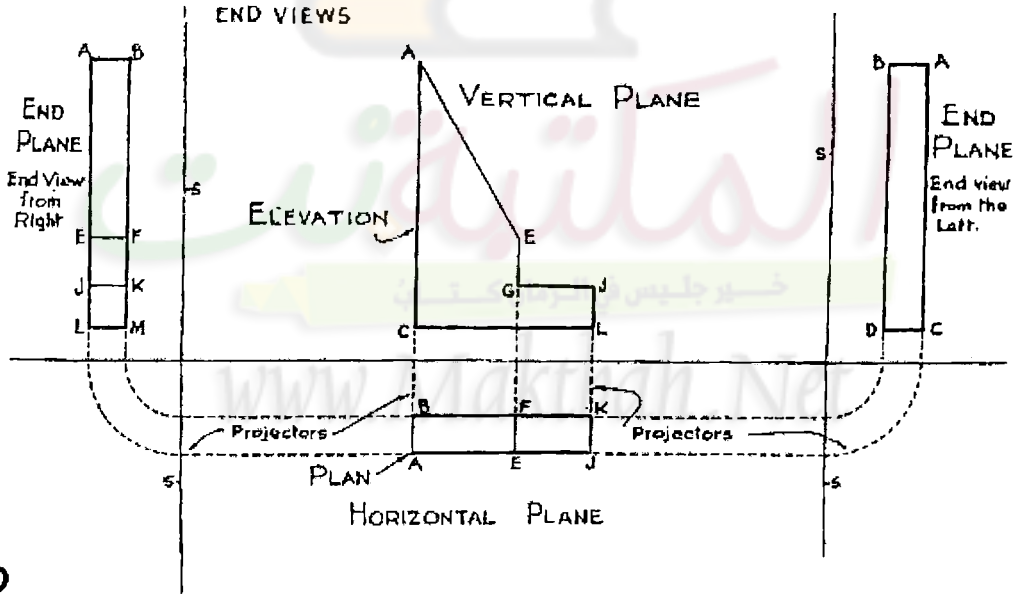

THIRD-ANGLE PROJECTION
Direction of revolution of horizontal plane.
Quadrant or Angle number
Horizontal Plane
Top View
Front View
Frontal Plane
H
F
الزاوية الزوجية الثالثة
(a)
Third-angle projection—two views
Top View
Front View
(b)
Top
Rear
Left Side
Front
Right Side
Bottom
Third-angle projection—six basic views

شكل 88

# ORTHOGRAPHIC PROJECTION




1



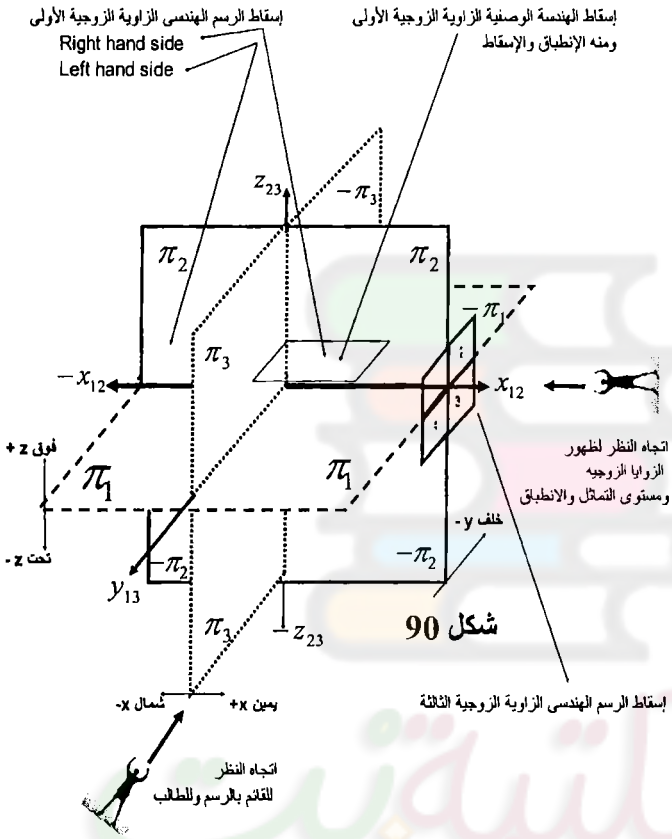

2

شكل 89

**أما فى الهندسة الوصفية فهى**

1. تُستخدم إسقاط مكونات الأجسام (نقطة– مستقيم – مستوى) وفى بعض الأبواب تستخدم إسقاط الأجسام المنتظمة والمحددة هندسيا مثل المنشور ، والهرم ، والمخروط ، والإسطوانة،..... .

2. تُستخدم الزاوية الزوجية الأولى فى القطاع الموجب منها كمكان محدد عام لإنطباق ودوران المستويات الخاصة بالإسقاط ويتم الإسقاط لجميع النقاط بأوضاعها الحقيقى فى الفارغ سواء كان سالب أو موجب تبعا للمحاور العامة وإحداثياتها. شكل 90




شكل 90

لذلك، كان واجب علينا أن نوضح طبيعة إسقاط المستقيمات بأوضاعها المختلفة داخل نطاق الرسم الهندسى حتى نستطيع التفرقة بينهما.

الأشكال التى سنتعرض لإسقاطها تمـــت باســـتخدام نظـــام ال **Left hand side** حيث ننظر على الجسم من الشمال ونسقطه ناحية اليمين فى نهاية مرمى البصر على المستوى الجانبى الموجود على يمين الناظر.

شكل 91 – (A) يبين الوضع الفراغى للنقطة بالنسبة للمستويات الثلاثة (B) يبين الإسقاط بالنسبة للنقطة علـــى المستويات الثلاثة ودورانهما (C) يوضح الثلاثة مساقط بعد إفراد المستويات زنلاحظ أن المسقط الجانبى على اليمين فى الرسم الهندسى بهذا الإسلوب هو نفس المسقط الجانبى فى الهندسة الوصفية لنفس الجسم.

www.Maktbah.Net

شكل 92 – (A) يبين الوضع الفراغى للمستقيم العام بالنسبة للمستويات الثلاثة (B) يبين الإسقاط بالنسبة للمستقيم العام على المستويات الثلاثة ودورانهما (C) يوضح الثلاثة مساقط بعد إفراد المستويات ونلاحظ أن المسقط الجانبى على اليمين فى الرسم الهندسى بهذا الإسلوب هو نفس المسقط الجانبى فى الهندسة الوصفية للمستقيم العام.

شكل 93 – (A) يبين الوضع الفراغى للمستقيم الأفقى بالنسبة للمستويات الثلاثة (B) يبين الإسقاط بالنسبة للمستقيم الأفقى على المستويات الثلاثة ودورانهما (C) يوضح الثلاثة مساقط بعد إفراد المستويات ونلاحظ أن المسقط الجانبى على اليمين فى الرسم الهندسى بهذا الإسلوب هو نفس المسقط الجانبى فى الهندسة الوصفية للمستقيم الأفقى.

شكل 94 – (A) يبين الوضع الفراغى للمستقيم الوجهى بالنسبة للمستويات الثلاثة (B) يبين الإسقاط بالنسبة للمستقيم الوجهى على المستويات الثلاثة ودورانهما (C) يوضح الثلاثة مساقط بعد إفراد المستويات ونلاحظ أن المسقط الجانبى على اليمين فى الرسم الهندسى بهذا الإسلوب هو نفس المسقط الجانبى فى الهندسة الوصفية للمستقيم الوجهى.

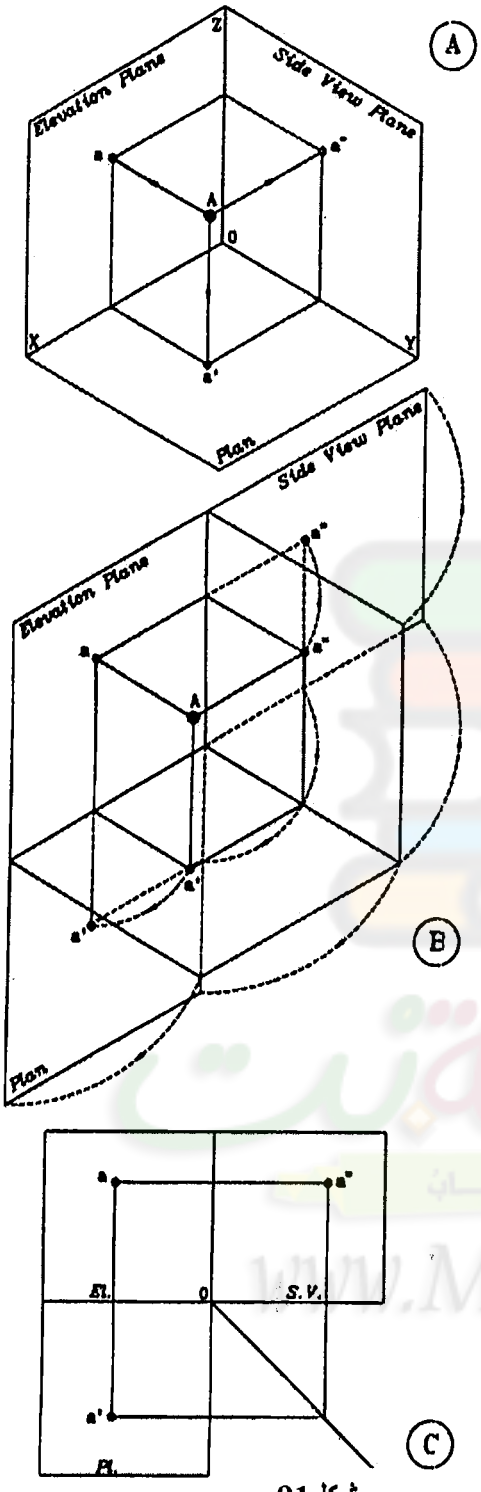
شكل 95 – (A) يبين الوضع الفراغى للمستقيم الجانبى بالنسبة للمستويات الثلاثة (B) يبين الإسقاط بالنسبة للمستقيم الجانبى على المستويات الثلاثة ودورانهما (C) يوضح الثلاثة مساقط بعد إفراد المستويات زنلاحظ أن المسقط الجانبى على اليمين فى الرسم الهندسى بهذا الإسلوب هو نفس المسقط الجانبى فى الهندسة الوصفية للمستقيم الجانبى.

شكل 96 – (A) يبين الوضع الفراغى للمستقيم العمودى على المستوى الأفقى (مستقيم رأسى) بالنسبة للمستويات الثلاثة (B) يبين الإسقاط بالنسبة للمستقيم العمودى على المستوى الأفقى (مستقيم رأسى) على المستويات الثلاثة ودورانهما (C) يوضح الثلاثة مساقط بعد إفراد المستويات ونلاحظ أن المسقط الجانبى على اليمين فى الرسم الهندسى بهذا الإسلوب هو نفس المسقط الجانبى فى الهندسة الوصفية للمستقيم العمودى على المستوى الأفقى (مستقيم رأسى).

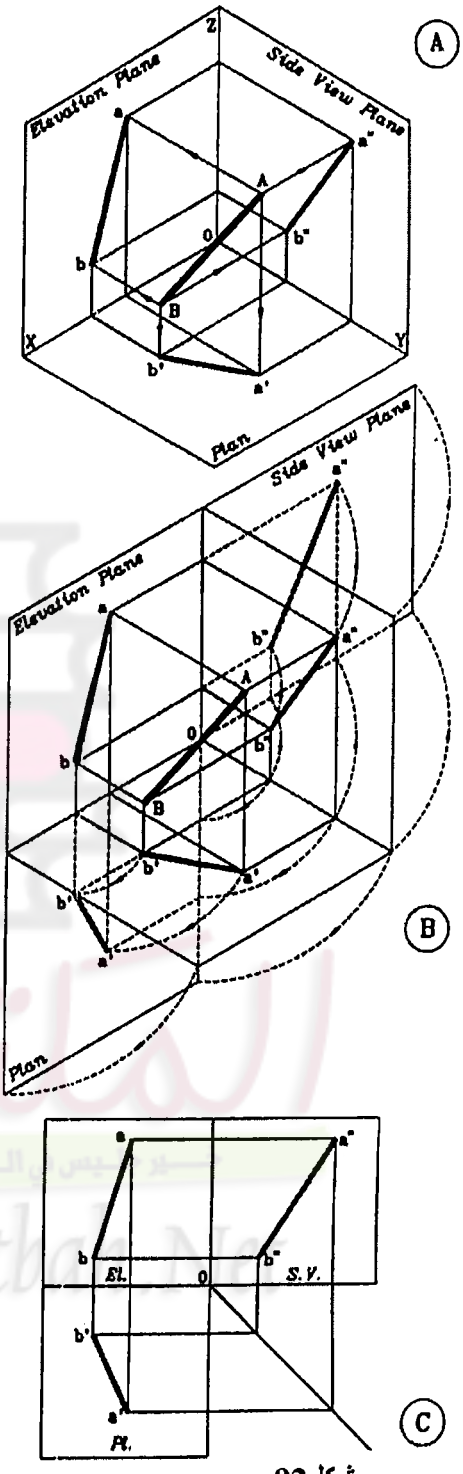
شكل 97 – (A) يبين الوضع الفراغى للمستقيم العمودى على المستوى الرأسى بالنسبة للمستويات الثلاثة (B) يبين الإسقاط بالنسبة للمستقيم العمودى على المستوى الرأسى على المستويات الثلاثة ودورانهما (C) يوضح الثلاثة مساقط بعد إفراد المستويات ونلاحظ أن المسقط الجانبى على اليمين فى الرسم الهندسى بهذا الإسلوب هو نفس المسقط الجانبى فى الهندسة الوصفية للمستقيم العمودى على المستوى الرأسى.

شكل 98 – (A) يبين الوضع الفراغى للمستقيم العمودى على المستوى الجانبى (يوازى خط الأرض) بالنسبة للمستويات الثلاثة (B) يبين الإسقاط بالنسبة للمستقيم العمودى على المستوى الجانبى (يوازى خط الأرض) على المستويات الثلاثة ودورانهما (C) يوضح الثلاثة مساقط بعد إفراد المستويات ونلاحظ أن المسقط الجانبى على اليمين فى الرسم الهندسى بهذا الإسلوب هو نفس المسقط الجانبى فى الهندسة الوصفية للمستقيم العمودى على المستوى الجانبى (يوازى خط الأرض).

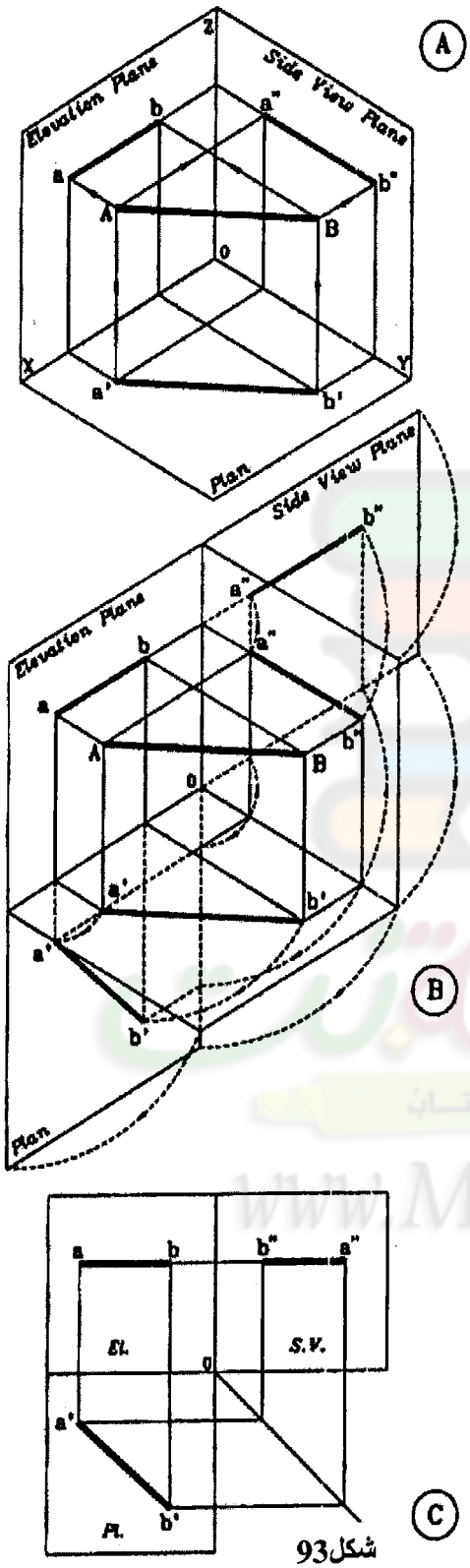
المكتبة نت
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net


A
Elevation Plane
Side View Plane
Plan
Z
X
Y
a
a''
A
O
a'
B
El.
S.V.
Pl.

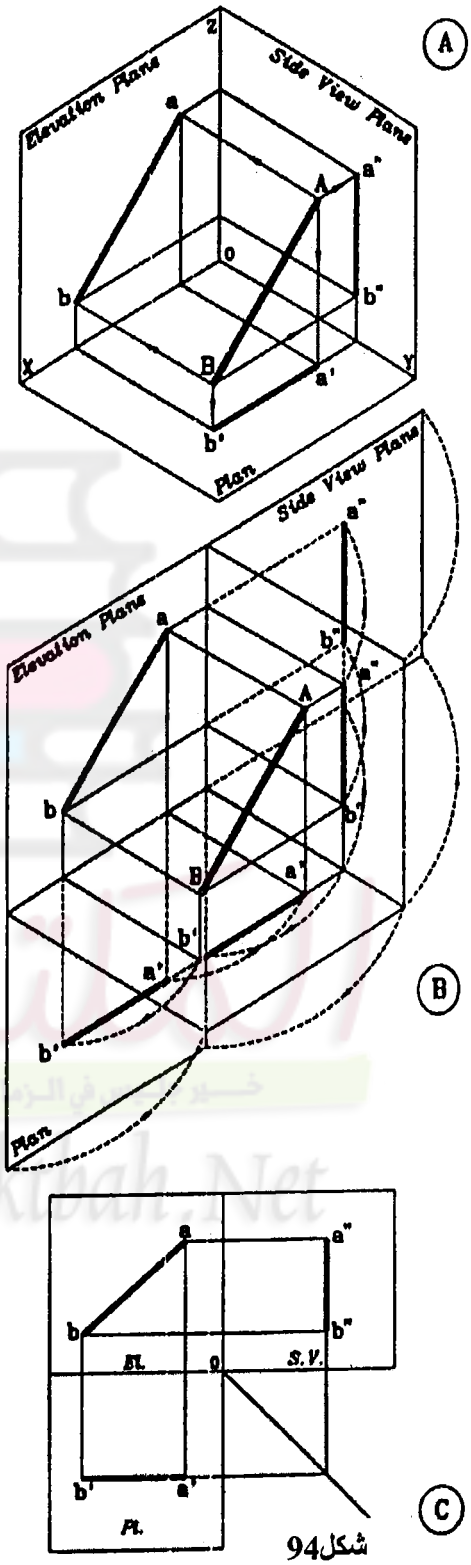
شكل91


A
Elevation Plane
Side View Plane
Plan
Z
X
Y
a
a''
A
O
b
b''
B
b'
a'
El.
S.V.
Pl.

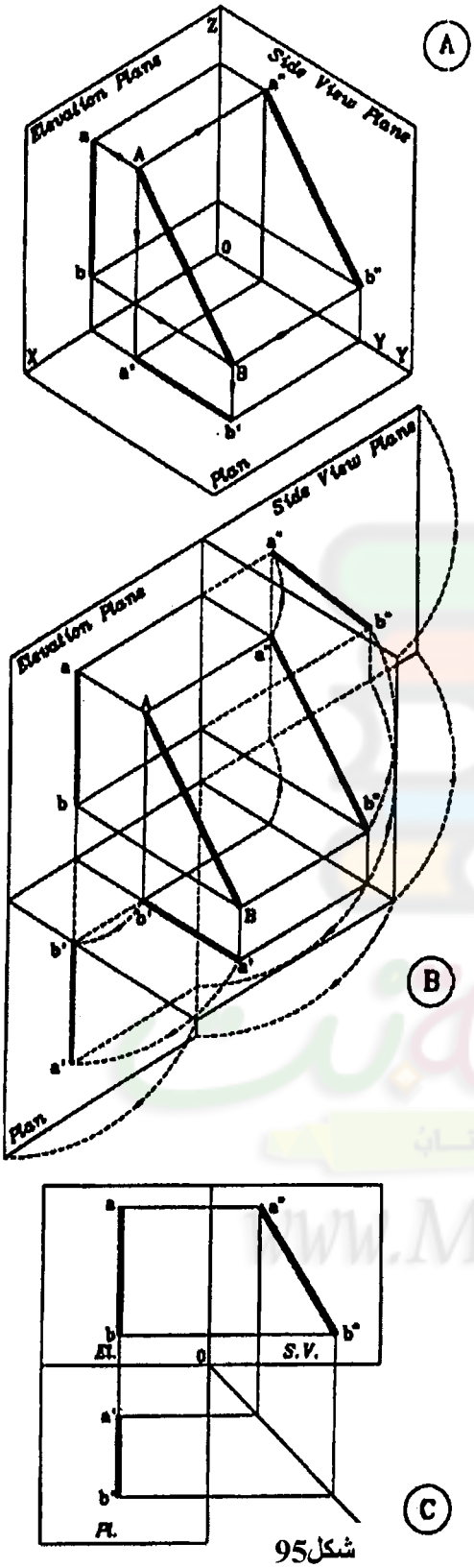
شكل92


A
Elevation Plane
Side View Plane
Plan
B
C
El.
S.V.
Pl.

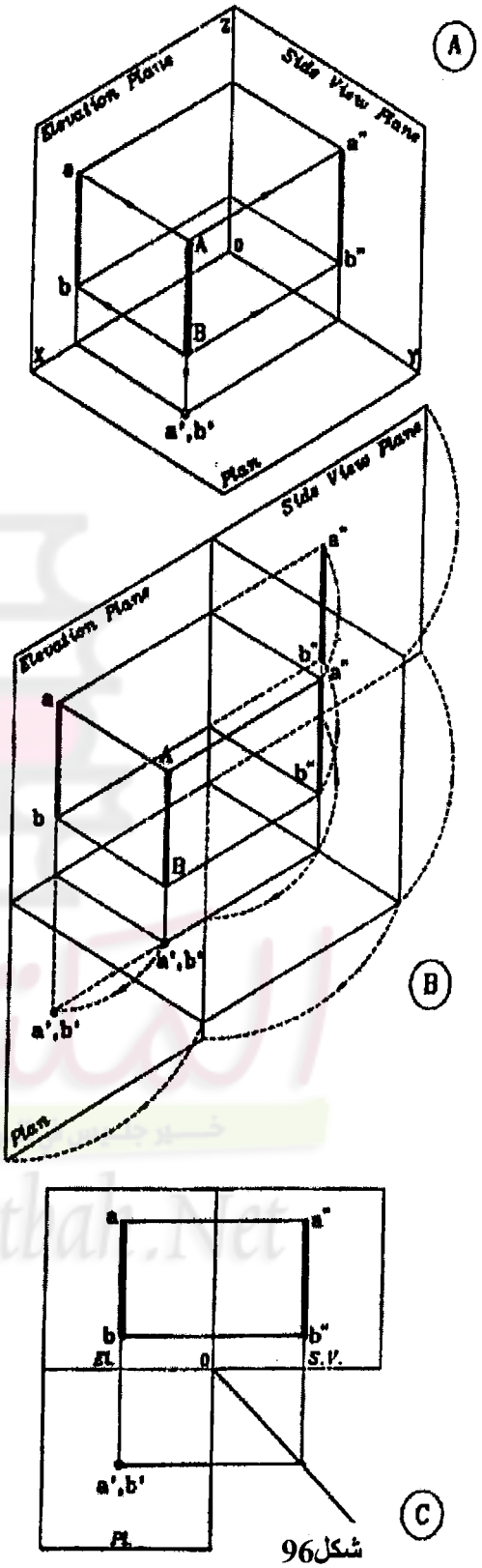
شكل93


A
Elevation Plane
Side View Plane
Plan
B
C
El.
S.V.
Pl.

شكل94

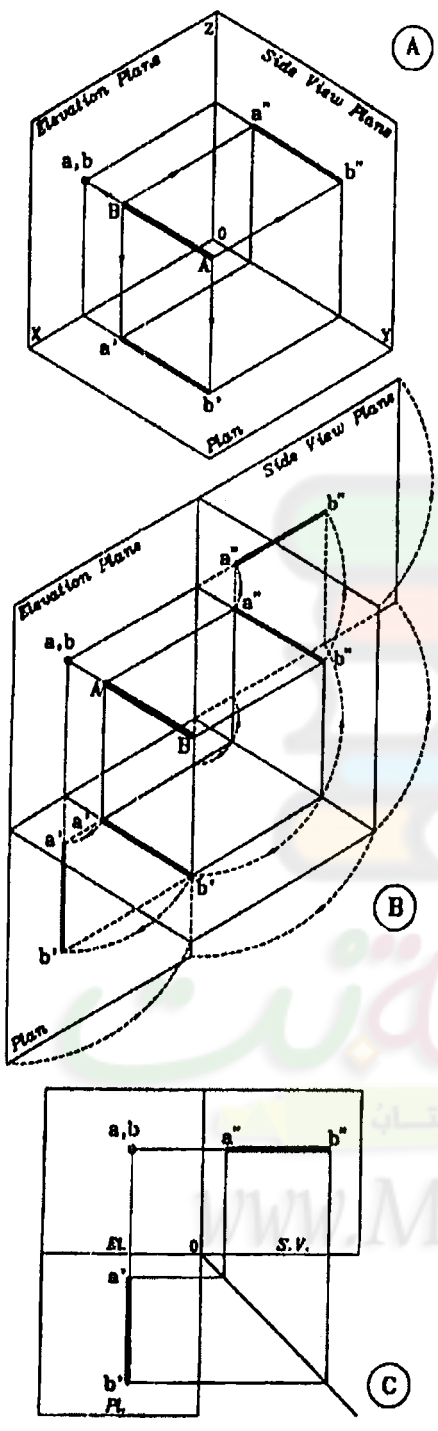



شكل95

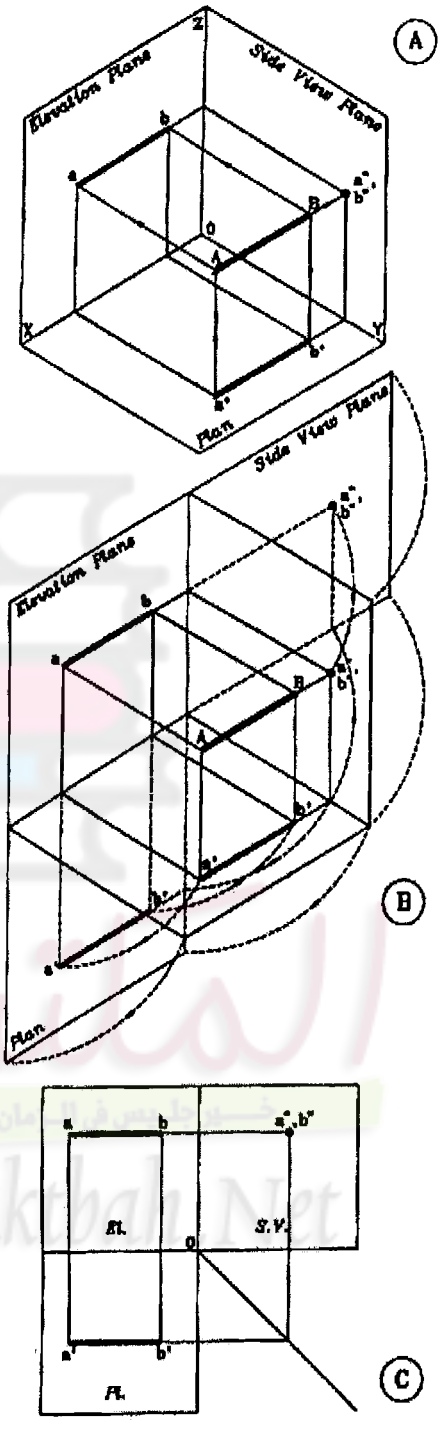



شكل96

www.Maktabah.Net


A
Elevation Plane
Side View Plane
Plan
a,b
a"
b"
a'
b'
B
A
0
X
Y
Z
B
Elevation Plane
Side View Plane
Plan
a,b
a"
b"
a'
b'
A
B
a1'
b1'
a1"
b1"
C
a,b
a"
b"
El.
S.V.
Pl.
a'
b'
0

شكل97


A
Elevation Plane
Side View Plane
Plan
a
b
a",b"
a'
b'
B
A
0
X
Y
Z
B
Elevation Plane
Side View Plane
Plan
a
b
a",b"
a'
b'
A
B
C
a
b
a",b"
El.
S.V.
Pl.
a'
b'
0

شكل98

# تمارين المستقيم

1. عين مسقطى المستقيم a المكون من النقطتين A,B ثم حدد أثار المستقيم الأفقيه والرأسيه حيث A(2,5,2) و B(7,2,5) ثم أوجد المسقط الجانبى للمستقيم.
2. عين الاثار الأفقيه والرأسيه للمستقيمات الاتيه وكذلك المساقط الجانبيه لها " تنبيه: لكل مستقيم نقطه اصل منفصله وخط أرض خاص به" :

a [A(2,4,2), B (6,0,0)] و b [A(1,1,-1), B(5,4,-6)] و c [A(1,0,2),B(6,-5,0)] و
d [A(1,0,2),B(6,0,5)] و e [A(1,2,0), B (6,5,0)] و f [A(1, 3,2), B(5,6,2)] و
g [A(1,2,3),B(5,2,6)] و i [A(3,4,4) , B(6,4,4)] و l [A(3,2,6), B(3,2,2)] و
m[A(2,6,2), B(2,2,2)] و n[A(2,1,2), B(5,3,-2)] و q [A(2,2,2), B(6,1,-3)]

3. عين مسقطى المستقيم b[A(5,1,-3), B(-2,4,4)] ثم عين مساقط النقاط الاتيه عليه C(x,0,z), D(x,y,0), E(x,y,-4), F(x,3,z), G(9,y,z)
4. المعلوم الاثران الأفقى ولارأسى V,H لكل من المستقيمات الاتيه a[H(1,5), V(6,2)] و b[H(1,-5), V(6,2)] و c[H(1,5), V(6,-2)] و d[H(1,-5), V(6,-2)] عين المساقط الثلاثه للمستقيمات
5. مثل المستقيم AB الواقع في المستوى الأفقي وحدد أثاره إذا كان A (-4 , -1 ,? ) , B ( 3 , 7 , ? )
6. مثل المستقيم AB الواقع في المستوى الرأسي وحدد أثاره اذا كان A ( -3 , ? , 2 ) , B ( 5, ? , 2 ) .
7. مثل المستقيم الأفقي h في الحالات الاتية :

يمر بنقطة A ( 4 , 5 ,2 ) ويميل على $\pi_2$ بالزاوية $\beta = 60^0$ ثم عين اثره الرأسى
معلوم اثره الرأسي ( 2 , شكل 86 ويمر بالنقطة B ( ?, 5,4 ) .

8. مثل المستقيم الأفقي *h* في الحالات الاتية .

يمر بالنقطة A ( 4 ,5 , 2 ) ويميل على $\pi_2$ بالزاوية $60^0$ ثم عين اثره h ومثل نقطة B على h والتي تبعد عن A مسافة 3 cm .
اثره الرأسي V = ( 2 , ? , 3 ) ويمر بالنقطة B ( 5, 4 ,? ) .

9. مثل المستقيم الوجهي f في الحالات الاتية

بالنقطة A ( 2 ,3 , 2 ) ويميل على $\pi_1$ بالزاوية $\alpha = 60^0$ ثم عين اثره و مثل نقطة B على f والتي تبعد عن A مسافة 3 سم بحيث يكون $Z_B > Z_A$ .
اثره الأفقى H = ( ? , 3 , 2 ) ويميل على $\pi_1$ بالزاوية $60^0$

10. معطى نقطة A ( 3,2,3 ) والمطلوب مستقيم أفقي يميل $30^0$ على $\pi_2$ ويمر ب A ثم عين أثره ونقطة B عليه وتبعد 4 cm عن A بحيث يكون $Y_B > Y_A$ .

11.معطى نقطة A ( 3, 2 ,3 ) والمطلوب تمثيل مثلث , ABC حيث الضلع AB مستقيم أفقي يميل 30 $^0$ على$\pi_2$ وطوله 3cm حيث $Y_B<Y_A$ وضلعه BC جانبي يميل 30 $^0$ على $\pi_2$ وطوله 3 سم $Z_C>Z_B$.

12.مثل المثلث ABC حيث A ( 4,7,6 ) والضلع AB أفقي طوله 4cm يميل 45$^0$ على$\pi_2$ والضلع B C وجهي ويميل على $\pi_1$ بالزاوية 60$^0$ وطوله 5 cm .

13.مثل المثلث الجانبى المتساوى الاضلاع= 3cm والذى فيه نقطه A(5,4,2) ونقطه B(?,3,?)

14.عين مساقط المعين ABCD الذي قطره BD حيث B ( 7 , 5 , 6 ) , D (2,5,3) ورأسه A ( ?,1,7 )

15.معطى نقطة A ( 3,2,3 ) والمستقيم FE حيث F = ( 6,1,5 ) , E ( 4,6,1) والمطلوب تمثيل متوازي الاضلاع ABCD الذى قطره BD *يقع على المستقيم* FE ، وضلعه AB وجهي و ضلعه AD أفقي .

16.بين ما اذا كانت تقع النقطة N على المستقيم AB ام خارجه

N=( 2,1.5,3 ) , B ( 0,1,2 ) , A ( 4,2,4 )

N=( 2,2,5 ) , B ( -1,3,5 ) , A ( 4,1,5)

17.مثل المربع ABCD حيث , ( 5, 4, 4.5 ) B ( 3,3,6 ) A والضلع AD مستقيم وجهي .

18.مثل متوازي الأضلاع ABCD اذا كانت C ( ?,2,? ) D ( 0,6,4 ) B ( -1,2.5,2 ) A ( 3.5 , ?, 4 )

19.مثل المعين ABCD حيث ( ?,1.5,5) C (4,6,1 ) B ( 6,4,4 ) A

20.مثل المعين ABCD اذا كان القطر AC مستقيم أفقي حيث ( C(1,?,5 و( A ( 2,6,? و B ( 5,0,2 ) (مساعده : يتم إستخدام الطول الحقيقى للضلع AB مع فرق الZ لل BC نوجد طول المسقط BC نركز به لإيجاد $C_1$) .

21.عين مساقط المربع ABCD فيه A( 1,4,4 ) وقطره BD يقع على المستقيم الأفقي E ( 3,1,6 ), F ( 0,4,? ) .

22.مثل متوازي الأضلاع ABCD اذا كان قطره AC أفقي وطوله 6 سم وقطره BD وجهيا وطوله 8 سم حيث A ( 2,1,3 ) C ( 6,?,? ) B ( 1,?,? )

23.عين مساقط المستطيل ABCD اذا كان A ( 2,1,2 ) وضلعه AB 4 سم وBC =3 سم ونقطة N ( 4,2,3 ) تقع على القطر AC و معلوم الرأس B ( ?,?,5 )

24.مثل المعين ABCD حيث الذي قطره B (6,7,7 ) D ( 2,7,3 ) ورأسه A ( ?,3,7 )

# الباب الخامس

# المستوى

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

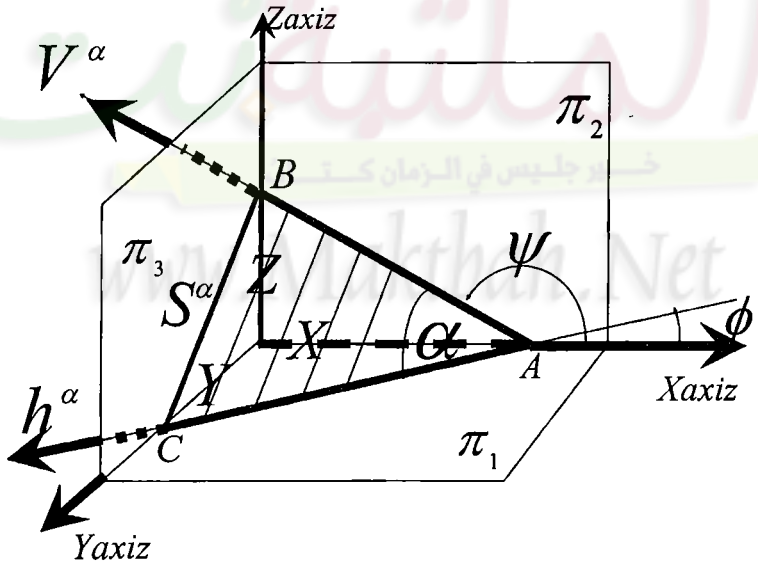
المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

# المستوى

أقل صور المستوى عامة تظهر عندما يتكون من أى ثلاث نقاط ليست على إستقامة واحدة. لذا فإن تمثيل المستوى فى الهندسه الوصفيه يتم إما بمستقيمين على الاقل سواء متقاطعين أو متوازيين أو من خلال أثاره أو ثلاث نقاط **A,B,C** شكل**99**، وأى مستوى له عدة أثار حيث أن أثر المستوى على أي مستوى عام هو خط تقاطعهما معا. وعندما يكون هناك مستوى مثل $\alpha$ فإنة يقطع كل المستويات العامة $\pi_1,\pi_2,\pi_3$ فى خطوط تسمى أثار المستوى على كـــل منـــهما ونستخدم عامة الرموز $\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\pi,\omega,\xi\delta,\rho,.....$ كأسماء للمستويات شكل **99**.

## أثار المستوى

والتعريف العام لأثر المستوى هو خط تقاطع المستوى مع مستوى أسمه، حيث أن الأثر الأفقى للمستوى هو خط تقاطع المستوى مع المستوى الأفقى شكل **99**، الأثر الرأسى المستوى هو خط تقاطع المستوى مع المستوى الرأســـى، الأثـــر الجانبى للمستوى هو خط تقاطع المستوى مع المستوى الجانبى شكل **99**. والأثر للمستوى يتم التعبير عنه بأول حرف من أسم المستوى العام الأفقى أو الرأسى أو الجانبى مرفوع لأس بأسم المستوى. الأثر الأفقي للمســـتوى $\alpha$ هـــو $h^{\alpha}$ و الأثر الرأسي للمستوى $\alpha$ هو $V^{\alpha}$ . الأثر الجانبي للمستوى $\alpha$ هو $S^{\alpha}$ شكل **99** .

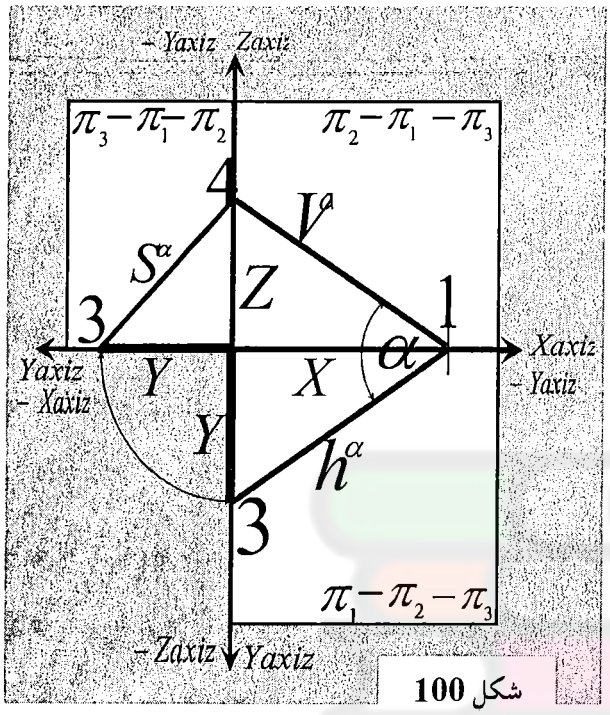



شكل 99

# تمثيل المستوى

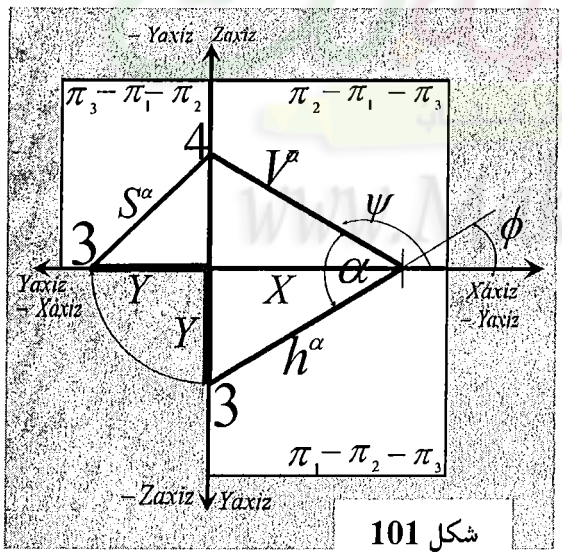
## تمثيل المستوى بالأثار

يتم تعريف المستوى بالأثار الخاصة به من خلال إحداثياتة إمـا بالإحـداثيات $\alpha(X,Y,Z)$ أو بزوايا ميل الأثار $\alpha(X,\varphi,\psi)$ شكل **100**.



شكل **100**

1. *التمثيـــل بعلوميـــة بالإحـــداثيات* $\alpha(X,Y,Z)$: هي عبارة عـن الأجـزاء المقطوعة من المحاور الأساسية بداية من نقطـة الأصل شكل **100**. نقيس قيمـة $X$ علـى ال $X_{Axiz}$ فتكون نقطة $1$ ونقيس قيمة $Y$ على ال $Y_{Axiz}$ فتكون نقطة **3**نصل النقطه **1** بالنقطه **3**فيكون الأثر الأفقى للمستوى ويسمى $h^\alpha$ شكل **100**. نقيس قيم $Z$على $Z_{Axiz}$ فتكون نقطة **4**، نصل نقطه **1**بالنقطة **4** فيكون الأثر الرأسى للمستوى $V^\alpha$ . يتقابل الأثران الأفقي و الرأس في نقطة تقع دائما على خط الأرض $X_{12}$ شكل **100**.



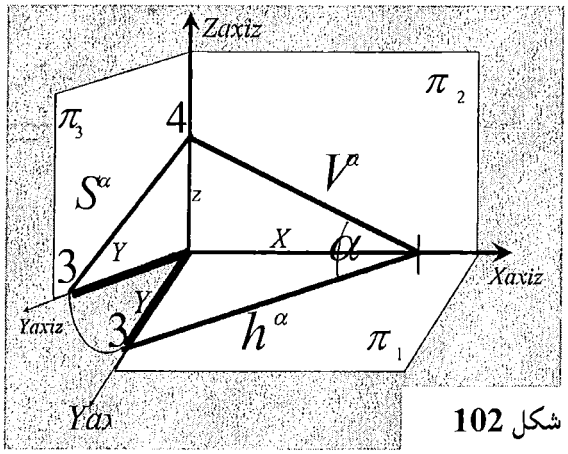
شكل **101**

2. *التمثيل بعلومية زوايا ميل الأثار* $\alpha(X,\varphi,\psi)$: هى عبارة عن الجزء المقطوع من $X_{Axiz}$ مع زوايـا ميل الأثار.ويتم بداية من نقطة الأصل نقيس قيمة $X$ على ال $X_{Axiz}$ فتكون نقطة $1$ شكل **101** ومن هذه النقطة نقيس قيمة الزاويه الأولى $\phi$ عكس عقـارب الساعة بداية من محور $X_{Axiz}$ فيكون الأثـر الأفقـى للمستوى ويسمى $h^\alpha$ ونسحبه حتى يظهر فى المستوى

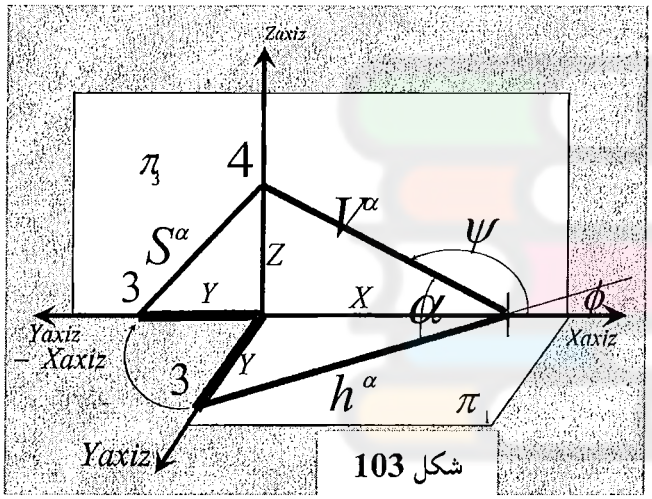
الأفقى. ومن النقطة 1 أيضا نقيس قيمة الزاويه الثانية $\psi$ عكس عقارب الساعة بداية من محور $X_{Axiz}$ فيكون الأثر الرأسى $V^{\alpha}$ (وهذا إسلوب قياس الزوايا عامة فى هذا المنهج أن يتم عكس عقارب الساعة بداية من محور **X** ). يتقابل الأثران الأفقي و الرأس في نقطة تقع دائما على خط الأرض $X_{12}$ شكل **101** وكذلك الأثر الرأسى والجانبى فى نقطة واحدة على محور **Z**. من الشكل **101** يتضح مكان الأثر الجانبى الذى ينطلق من دوران نقطة تقاطع الأثر الأفقى مع محور $Y_{AXIZ}$ الرأسى على بعد $Y$ فى محور **Y** الأفقى، وتتصل بنقطة تقاطع الأثر الرأسى مع $Z_{Axiz}$ على بعد $Z$ فى نقطة **4**.

شكل **102** وشكل **103** و شكل **104** يوضحوا كيفية الإنطباق ودوران المستوى الجانبى $\pi_3$ والذى يقطع محور $Y_{Axiz}$ إلى نصفين وتنقسم نقطة 3 إلى جزئين ويحملا معا نفس القيمة $Y$.

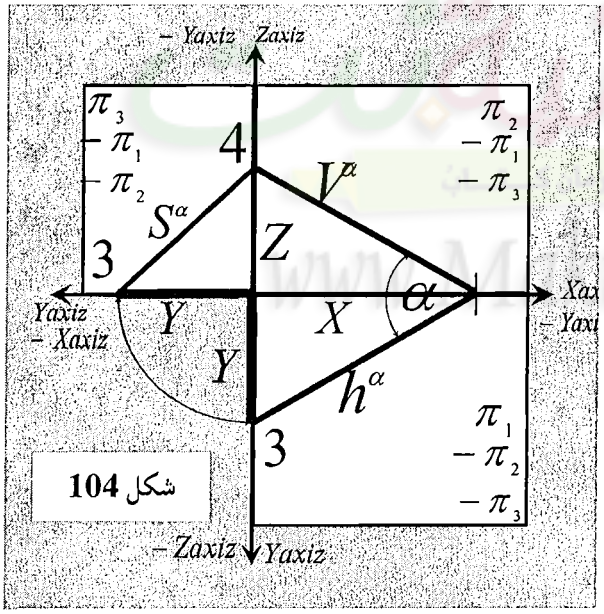
ومن شكل **103** و **104** يمكن أن نتعلم كيفية إستنتاج الأثر الجانبى للمستوى بعد رسم الأثر الأفقى نجده يقطع محور $Y_{Axiz}$ فى نقطة 3 هى نقطة إنطلاق يتم دورانها مع عقارب الساعة على المحور الأفقى



شكل **102**



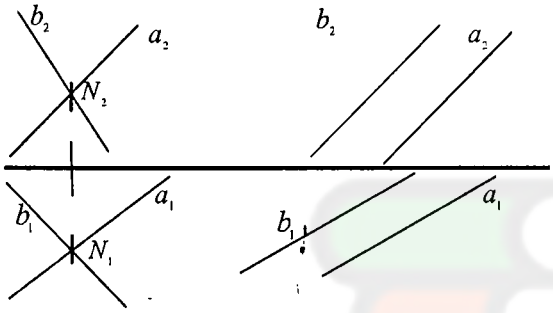
شكل **103**



شكل **104**

$Y_{Axiz}$ للمستوى الجانبي فتكون نقطة 3 الأخرى والتي يتم توصيلها بنقطة تقاطع الأثر الرأسي مع محور $Z_{Axiz}$ وهي نقطة 4 فيكون الأثر الجانبي شكل **104**.

**نتيجة:** عندما يكون معلوم الأثر الجانبي $S^{\alpha}$ فإنه يقطع كل من $Y_{Axiz}$ الرأسي في نقطة 3 تكون هي نقطة إنطلاق $h^{\alpha}$ ندورها عكس عقارب الساعة على المحور الرأسي لمحور $Y_{Axiz}$ ونصلها بنقطة رأس المستوى. ونقطة تقاطع $S^{\alpha}$ مع $Z_{Axiz}$ في نقطة 4 هي نقطة إنطلاق $V^{\alpha}$ نوصلها بنقطة رأس المستوى. وهذة النتيجة سنحتاجها في التطبيقات القادمة وتشكل صعوبة بالنسبة للطالب لو لم يتفهمها كما تم شرحها وتطبيقها حرفيا شكل **104**.



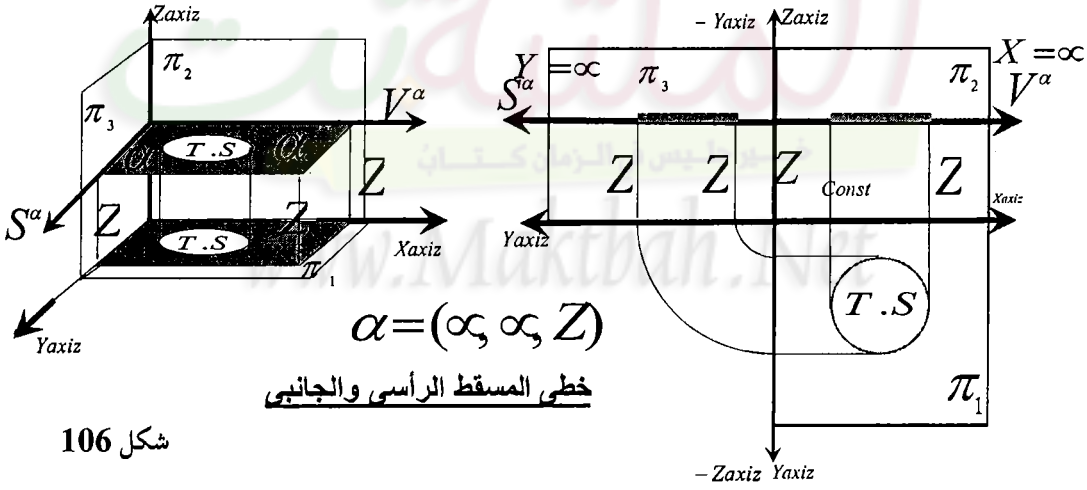

شكل **105**

## 2.2 .تمثيل المستوى بمستقيمين

يمثل المستوى بأي ثلاث نقاط ليست على إستقامة واحدة أو أكثر أو بأى مستقيمين متقاطعين أو متوازيين شكل **105** .

## الأوضاع الخاصة للمستوى

### 1. المستوى الأفقي: يوازي المستوى الأفقي $\pi_1$ /خطي المسقط الرأسي والجانبي



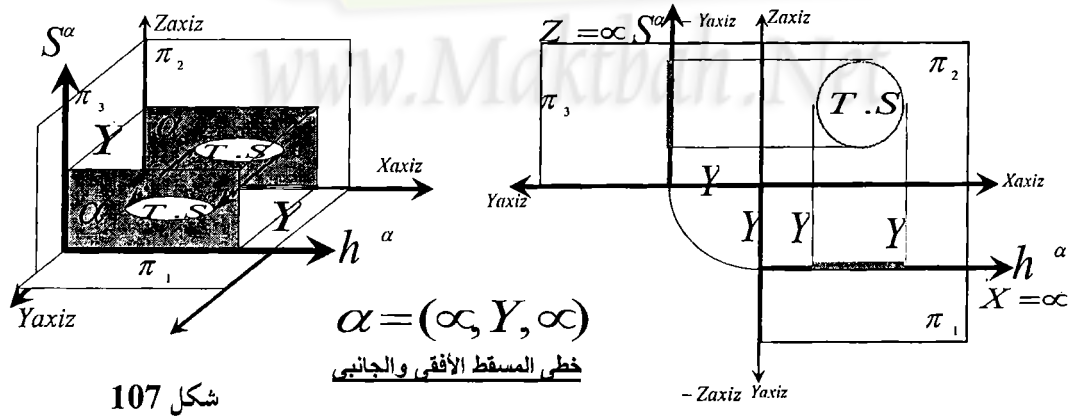

**خطي المسقط الرأسي والجانبي**

شكل **106**

يتضح من شكل 106 كيفية وضع المستوى بالنسبة للمستويات العامه حيث يرتفع فوق $\pi_1$ بمسافه ثابتة وهى قيمة $Z$ وهى ثابته بالنسبه لجميع النقاط التى تقع فى المستوى. ونجد أن المستوى الأفقى يقطع $\pi_1$ فى خط هو يوازى محور X هو الأثر الرأسى $V^\alpha$ والمسقط الرأسى لجميع النقاط التى تقع فى هذا المستوى تقع على $V^\alpha$ وبالتالى طالما جميع النقاط مسقطها فى المستوى الرأسى على خط واحد فإن هذا المستوى يطلق علية خطى المسقط الرأسى شكل 106، وكذلك يقطع المستوى الجانبى $\pi_3$ فى خط هو الأثر الجانبى للمستوى $S^\alpha$ والذى يوازى محور $Y$ الأفقى والمسقط الجانبى لجميع النقاط التى تقع فى هذا المستوى تقع على $S^\alpha$ وبالتالى طالما جميع النقاط مسقطها فى المستوى على خط واحد فى المستوى الجانبى فإن هذا المستوى يطلق علية خطى المسقط الجانبى.وعامة المستوى العمودى على مستوى فهو خطى المسقط عليه.

والأن عرفنا كيفية وضع المسقط الرأسى والجانبى لجميع النقاط التى تقع فى هذا المستوى الأفقى، ويبقى الأن المسقط الأفقى لجميع النقاط، ونلاحظ أن الأشكال التى تقع فى هذا المستوى تُسقط بشكلها الحقيقى كما هى موجوده فى الهندسة المستويه، فمثلا الدائره الواقعه فى المستوى $\alpha$ مسقطها فى المستوى الأفقى دائره كما هى بشكلها الحقيقى. وبالتالى يجب عليك عزيزى الطالب أن تنظر إلى الشكل 106 وتتعلم طبيعة المستوى الأفقى فى الإسقاط وتستوعبه وتحفظة جيدا. وبالتالى تكون قيم تمثيل المستوى هى $\alpha(\infty,\infty,Z)$ (ويكفى لتمثيله نقطة واحدة معرفة فيه وخاصة الإرتفاع Z)

## 2. المستوى الوجهى: الموازى للمستوى الرأسى $\pi_2$ / خطى المسقط الأفقى والجانبى



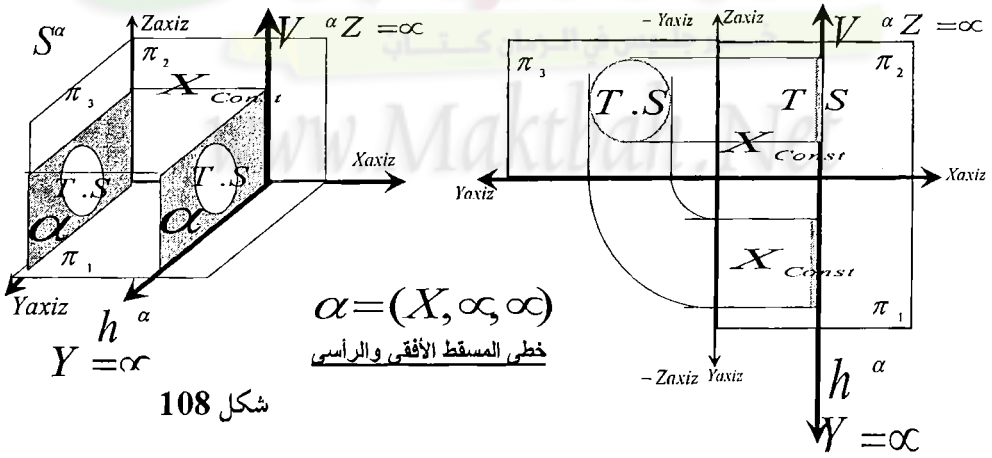

خطى المسقط الأفقى والجانبى

شكل 107

هذا المستوى تنطبق عليه القواعد التى تم ذكرها بالنسبه للمستوى الأفقى ولكن بالنسبة إلى المستوى الرأسى $\pi_2$ . حيث أن المستوى الوجهى شكل **107** الموازى ل $\pi_2$ هو عمودى على $\pi_1,\pi_3$ وبالتالى فهو خطى المسقط على $\pi_1,\pi_3$ . ومكونات المستوى الوجهى الذى يوازى $\pi_2$ هى $X,Z$ وبالتالى كما تعلمنا سابقا من المستوى الأفقى، مادام المستوى يوازى أحد المستويات العامه فإن أثاره تكون موازيه لإحاثيات مكوناته، وقيمة إحداثياته فى إتجاهها بمالانهايه فى المستوى الذى يتقاطع معه. كمثال المستوى الوجهى مكوناته **X,Z** وهو عمودى على $\pi_1,\pi_3$ والمستوى العام $\pi_1$ ومكوناته **X, Y** وبالتالى فإن أثر المستوى الوجهى فى المستوى الأفقى يكون فى لإتجاه خط تقاطع المستويين وهو العنصر المشترك فى إحداثياتهم وهو محور $X$ وبذلك يكون $h^{\varepsilon}$ موازى لمحور $X$ –شكل **107**. ومن الشكلين يتضح أيضا بنفس القاعده أن الأثر الجانبى يكون فى إتجاه محور $Z$ لأنه العنصر المشترك بين المستويين. وبذلك يكون المستوى الوجهى خطى المسقط الأفقى والجانبى لأنة عمودى عليهما. والمسقط الرأسى لجميع النقاط التى تقع فيه تظهر بشكلها الحقيقى فى $\pi_2$ . وبالتالى تكون قيم تمثيل المستوى هى $\alpha(\infty,Y,\infty)$ .(ويكفى لتمثيله نقطة واحدة معرفة فيه وخاصة البعد **Y**)

## 3. المستوى الجانبى : موازى للمستوى الجانبى $\pi_3$ / خطى المسقط الأفقى والرأسى

مما سبق ذكره ومن شكل **108** فإن المستوى الجانبى عمودى على كل من $\pi_1,\pi_2$ لذا فهو خطى المسقط الأفقى والرأسى . مكونات المستوى الجانبى هى $Y,Z$ والمستوى الأفقى مكوناته $X,Y$ وبالتالى خط تقاطع المستوى الجانبى مع

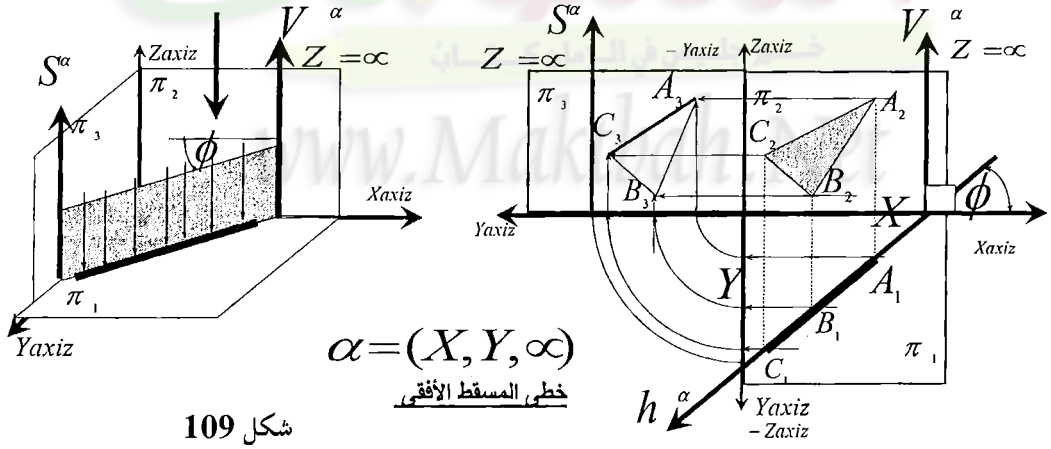


شكل **108**

المستوى الأفقى وهو الأثر الأفقى للمستوى الجانبى $h^{\alpha}$ يتبع العنصر المشترك فيما بينهما وهو خط تقاطعهما وهو محور $Y$، وبالتالى $h^{\alpha} // Y$. مكونات المستوى الجانبى هى $Y,Z$ والمستوى الرأسى مكوناته $X,Z$ وبالتالى خط تقاطع المستوى الجانبى مع المستوى الرأسى وهو الأثر الرأسى للمستوى الجانبى $V^{\alpha}$ يتبع العنصر المشترك فيما بينهما وهو خط تقاطعهما وهو محور $Z$، وبالتالى $V^{\alpha} // Z$. والمسقط الجانبى لجميع النقاط التى تقع فيه تظهر بشكلها الحقيقى فى $\pi_3$. وبالتالى تكون قيم تمثيل المستوى هى $\alpha(X,\infty,\infty)$، (ويكفى لتمثيله نقطة واحدة معرفة فيه وخاصة البعد **X**).

## 4. المستوى الرأسى / عمودى على $\pi_1$ / خطى المسقط الأفقى

من الشكل **109** يظهر المستوى العمودى على $\pi_1$ وبالتالى فهو خطى المسقط الأفقى وله أثر أفقى $h^{\alpha}$ وهذا الأثر يحمل زاوية ميله على $\pi_2$ وهى $\phi$ ويقطع محور $Y$ فى نقطه هى قيمه $Y$ للمستوى، وكذلك يقطع محور $X$ فى نقطه هى رأس المستوى وبالتالى $Y$ و $X$ معرفين لهذا المستوى. ومن النظريات السابقة حيث $\alpha$ عمودى على $\pi_1$ والمستوى العام $\pi_2$ عمودى على $\pi_1$ ولذلك فإن خط تقاطعهما عمودى على $\pi_1$ وهو الأثر الرأسى للمستوى وهو $V^{\alpha} // Z$ وتكون قيمة $Z$ فى تعريف المستوى بمالانهايه أما $X,Y$ معرفتين. والمستوى $\pi_3$ عمودى على $\pi_1$ وبالتالى لأن $\alpha \perp \pi_1$ فإن خط تقاطع $\alpha$ مع $\pi_3$ يكون عمودى على خط تقاطع $\pi_1$ مع $\pi_3$ وهو محور $Z$ وهذا مايثبت مره أخرى أن قيمه $Z$ للمستوى بمالانهايه.




$\alpha=(X,Y,\infty)$

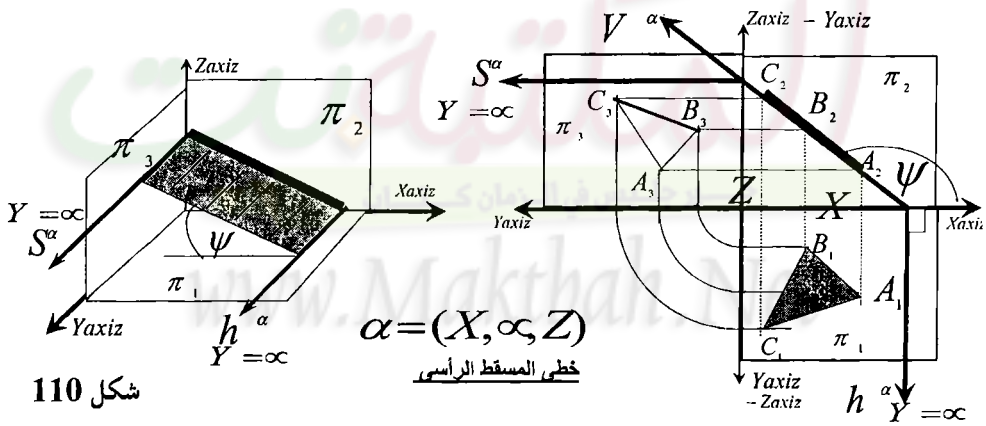
خطى المسقط الأفقى

شكل **109**

وبالتالى تكون قيم تمثيل المستوى هى $\alpha(X,Y,\infty)$ أو بالتمثيل الــزاوى لزوايــا الميــل علــى كــل مــن $\pi_1$ و $\pi_2$ وهو $\alpha(X,\phi°,90°)$ . ومن الملاحظات الهامه التى لاغنى عن معرفتها هى أن هذا المستوى خطى المسقط الأفقــى أى أن جميع النقاط الواقعة فيه مساقطها الأفقيه تقع على هذا الخط، وأيضا لومعلوم مسقط أفقى لنقطتين تقع فى المستوى فإنــه يمكن رسم الأثر الأفقى مباشره منها بتوصيلهما ورسم الأثر الرأسى عمودى على خط الأرض. (ويكفى لتمثيله نقطــة واحدة معرفة فيه وخاصة البعد **Z** مع زاوية ميل المستوى على المستوى الرأسى)

## 5. المستوى العمودى على $\pi_2$ / خطى المسقط الرأسى

من الشكل **110** يظهر المستوى العمودى على $\pi_2$ وبالتالى فهو خطى المسقط الرأسى وله أثر رأسى $V^\alpha$ وهذا الأثر يحمل زاوية ميله على $\pi_1$ وهى $\psi$ ويقطع محور $Z$ فى نقطه هى قيمه $Z$ للمستوى، وكذلك يقطع محور $X$ فى نقطه هى رأس المستوى وبالتالى $Z$ و $X$ معرفين لهذا المستوى. ومن النظريات السابقة لنأتى بالأثر الأفقى للمستوى نجد أن $\alpha$ عمودى على $\pi_2$ ، والمستوى الأفقى العام $\pi_1$ عمودى على $\pi_2$ ولذلك فإن الأثر الأفقى للمستوى عمودى على خط تقاطعهما (على خط تقاطع $\pi_1$ معى $\pi_2$ وهو $\mathbf{X_{12}}$) ويكون الأثر الأفقى للمستوى $h^\alpha // Y$ وتكــون قيمــة $Y$ فى



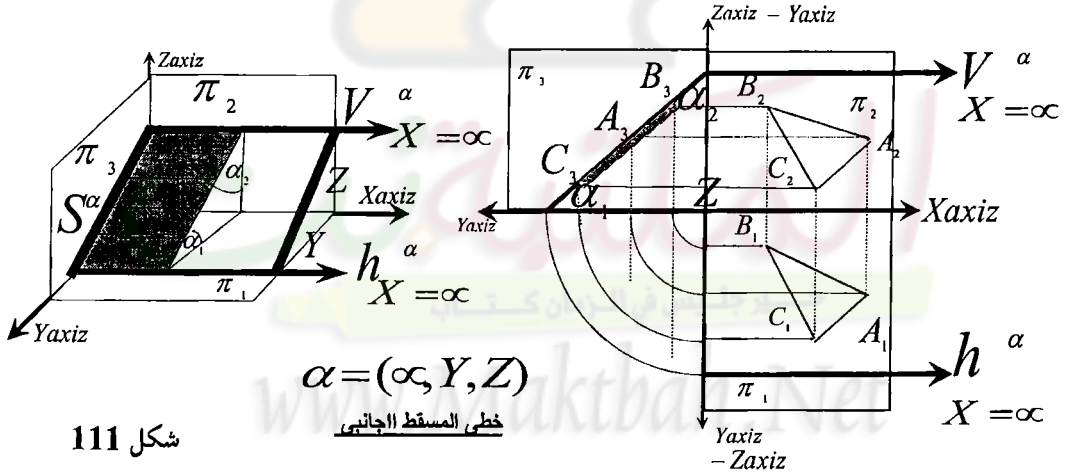

شكل **110**

تعريف المستوى بمالانهايه أما $X,Z$ معرفتين. والمستوى $\pi_3$ عمودى على $\pi_2$ وبالتالى لأن $\alpha \perp \pi_2$ فإن خط تقــاطع $\alpha$ مع $\pi_3$ عمودى على خط تقاطع $\pi_2$ مع $\pi_3$ وهو محور $Y$ وهذا مايثبت مره أخرى أن قيمه $Y$ للمستوى بمالانهايه. وبالتالى تكون قيم تمثيل المستوى هى $\alpha(X,\infty,Z)$ أو بالتمثيل الــزاوى لزوايــا الميــل علــى كــل مــن $\pi_1$ و $\pi_2$

وهو $\alpha(X,90°,\psi°)$ . ومن الملاحظات الهامه التى لاغنى عن معرفتها هى أن هذا المستوى خطى المسقط الرأسى أى أن جميع النقاط الواقعة فيه مساقطها الرأسيه تقع على هذا الخط، وأيضا لومعلوم مسقط رأسى لنقطتين تقع فى المستوى يتم توصيلهما ويكون هذا هو الأثر الرأسى مباشره منها ثم رسم الأثر الأفقى عمودى على خط الأرض. (ويكفى لتمثيله نقطة واحدة معرفة فيه وخاصة البعد **Y** مع زاوية ميل المستوى على المستوى الأفقى)

## 6. المستوى العمودى على $\pi_3$ /يوازى خط الأرض/خطى المسقط الجانبى

هذا المستوى يمتد فى إتجاه محور $X$ وبالتالى أثاره الأفقيه والرأسيه توازى خط الأرض أما مسقطه الجانبى خطى المسقط الجانبى وإحداثياته $\alpha(\infty,Y,Z)$ وقيمه $X=\infty$ تعن أن الأثار توازى محور $X_{12}$ وهذا المستوى يميل فى المستوى الجانبى على كل من $\pi_1$ بزاويه $\alpha_1$ بين المستوى ومحور **Y** ويميل على $\pi_2$ بزاويه $\alpha_2$ بين المستوى ومحور **Z**. شكل **111**. هذا المستوى خطى الجانبى ويتم رسمه كخطى من المسقط الجانبى أى من رقم ثلاثه لأى نقطة واقعة فى المستوى كما بالمثال اللاحق شكل **112** .

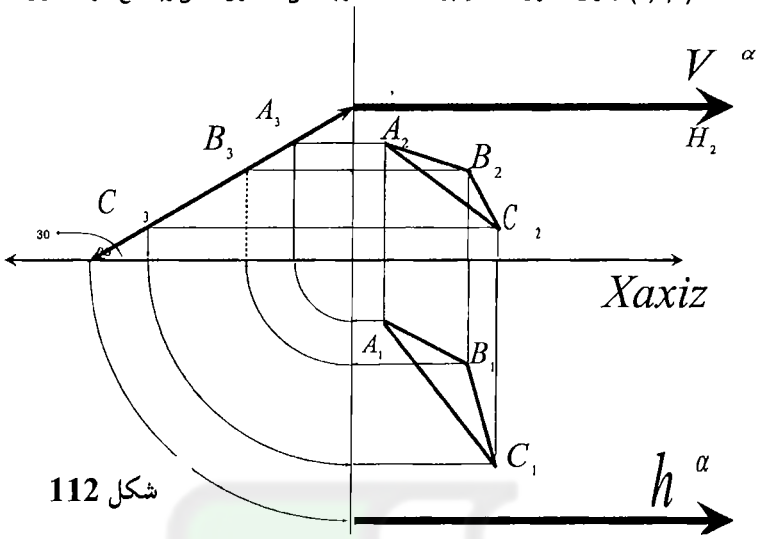



شكل **111**

### معرفه كيفية إستنتاج الأثر الأفقى والرأسى لهذا المستوى :

بعد رسم خطى المسقط الجانبى نجد أن خطى الجانبى يقطع محور $Z$ الرأسى فى نقطة هى دائما نقطه إنطلاق $V^\alpha$ ثم يقطع محور $Y$ الأفقى فى نقطه يتم دورانها عكس عقارب الساعة على محور $Y$ الرأسى فتكون نقطه إنطلاق للأثر الأفقى للمستوى $h^\alpha$ مثال شكل **112**.

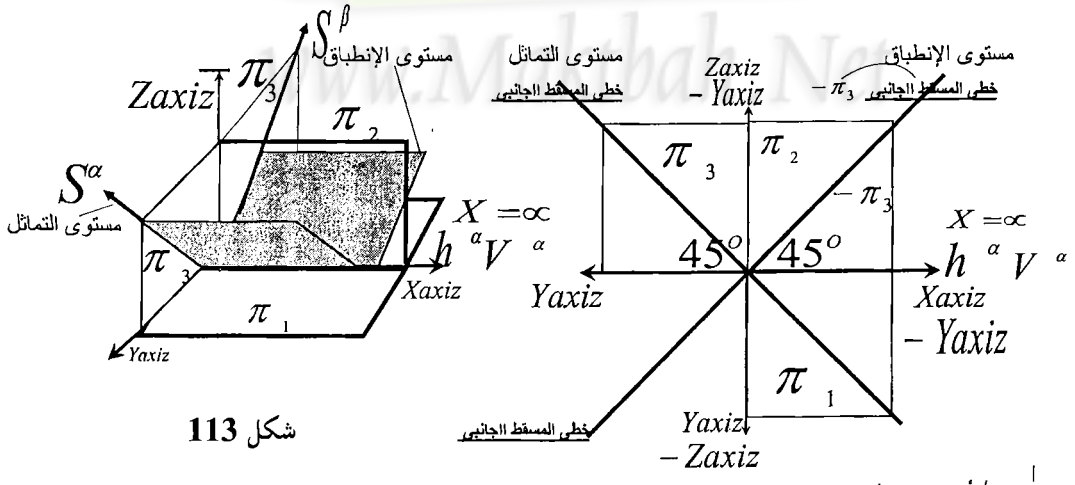
مثل المثلث ABC العمودى على المستوى الجانبى الذى فيه A (1,2,3) B (4,3.5,?) C (5,1,?) وأن مستوى المثلث يميل 30 درجة على المستوى الأفقى وإستنتج أثار المستوى




شكل 112

## 7. مستوى التماثل: المستوى المنصف الأول: منصف الزوايا الزوجية الأولى والثالثه.

هذا المستوى منصف الزاويا الزوجية الأولى والثالثه حيث يميل على كل من $\pi_1$ بزاويه $\alpha_1$ ويميل على $\pi_2$ بزاويه $\alpha_2$ والزاويتين $\alpha_1$ و $\alpha_2$ تساوى كل منهما 45° ، وهو خطى المسقط الجانبى ويمر بخط الأرض "مستوى عمودى على $\pi_3$ خطى المسقط الجانبى" . من شكل 113 نجد أن هذا المستوى يقطع كل من $\pi_1$ و $\pi_2$ فى خط الأرض وبالتالى أثاره الأفقيه والرأسيه منطبقة على خط الأرض. ومن الملاحظ أن جميع النقاط التى تقع فى مستوى التماثل قيمة $Y$ تساوى قيمة $Z$ بإشاراتها حيث $\pm Y = \pm Z$.




شكل 113

## 8. المستوى الموازى للتماثل:

مستوى التماثل خطى المسقط الجانبى وأى مستوى يوازيه يكون خطى المسقط (الجانبى)، وعليه فإن المستوى الموازى للتماثل خطى المسقط الجانبى ويمر بالمسقط الثالث لأى نقطه تقع فى المستوى ويتم رسمه كخطى من نقطة $C_3$ أو $B_3$ شكل **114** . هذا المستوى فى ذلك الوقت يقطع $\pi_1$ فى $h^\alpha$ ويقطع $\pi_2$ فى $V^\alpha$ والمطلوب إستنتاج كل من $h^\alpha$ و $V^\alpha$ :ويتم الإستنتاج من القاعدة السابقة الخاصة بخطى المسقط الجانبى كما بالمثال شكل **114** يتم رسم خط المسقط الجانبى الموازى للتماثل من $C_3$ فيقطع محور $Y$ الأفقى فى نقطه 1 يتم دوراتها بالرجوع على محور $Y$ الرأسى فتكون $1'$ وتكون نقطه إنطلاق $h^\alpha$ موازى لخط الأرض. أما خطى المسقط الجانبى فيقطع محور $Z$ فى نقطه 2 هى مباشرة نقطه إنطلاق $V^\alpha$ موازى لخط الأرض. ونفس السلوك بالنسبه للمستوى الموازى للتماثل من $B_3$

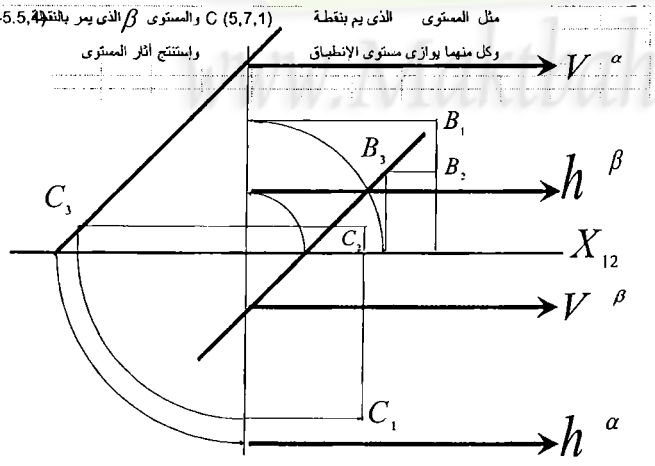
نتيجه: دائما $h^\alpha$ و $V^\alpha$ للموازى للتماثل منطبقين على بعض.

## 9. مستوى الأنطباق

هذا المستوى منصف الزوايا الزوجية الثانية والرابعه حيث يميل على كل من $\pi_1$ بزاويه $\alpha_1$ ويميل على $\pi_2$ بزاويه $\alpha_2$ والزاويتين $\alpha_1$ و $\alpha_2$ تساوى كل منهما $45°$ ، وهو خطى المسقط الجانبى ويمر بخط الأرض. من شكل **113** نجد أن هذا المستوى يقطع كل من $\pi_1$ و $\pi_2$ فى خط الأرض وبالتالى أثاره الأفقيه والرأسيه منطبقة على خط الأرض. ومن الملاحظ أن جميع النقاط التى تقع فى مستوى الإنطباق قيه $Y$ تساوى قيمه $Z$ بعكس إشاراتها حيث $\pm Y = \mp Z$ .

### المستوى الموازى للأنطباق:

مستوى الإنطباق خطى المسقط الجانبى وأى مستوى يوازيه يكون خطى المسقط (الجانبى)، وعليه فإن المستوى الموازى الإنطباق يكون خطى المسقط الجانبى ويمر بالمسقط الثالث لأى نقطه تقع فيه وعند رسمه




شكل **115**

من نقطة $C_3$ أو $B_3$ شكل115. هذا المستوى فى ذلك الوقت يقطع $\pi_1$ فى $h^\alpha$ ويقطع $\pi_2$ فى $V^\alpha$ والمطلوب إستنتاج كل من $h^\alpha$ و $V^\alpha$ :ويتم الإستنتاج من القاعدة السابقة الخاصة بخطى المسقط الجانبى كما بالشكل السابق 114 :

يتم رسم خط المسقط الجانبى الموازى للإنطباق من $C_3$ فيقطع محور $Y$ الأفقى فى نقطه يتم دورا لها بالرجوع عكس عقرب الساعة على محور $Y$ الرأسى فتكون هى نقطه إنطلاق $h^\alpha$ موازى لخط الأرض. أما خطى المسقط الجانبى فيقطع محور $Z$ فى نقطه هى مباشرة نقطه إنطلاق $V^\alpha$ موازىلخط الأرض. ونفس السلوك بالنسبه للمستوى الموازى للإنطباق من $B_3$ .

نتيجه: دائما $h^\alpha$و $V^\alpha$ للموازى للإنطباق لايكونوا منطبقين على بعض.

## نتائج عامة

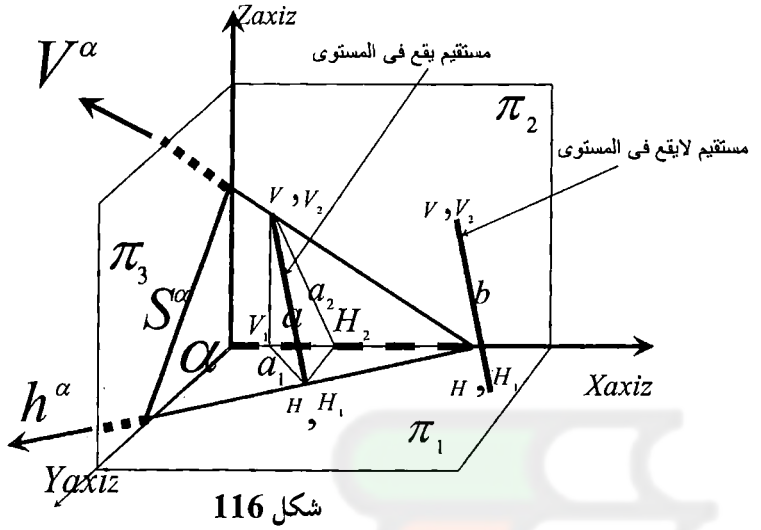
1. المستوى العمودى على مستوى فهو خطى المسقط عليه.

2. المستوى الذى يوازى المستوى العام تكون إحاثياتة بمالانهايه فى إتجاه مكونات المستوى العام. أى أن أثاره تكون موازيه لمكونات المستوى العام للإسقاط; وكمثال- المستوى الأفقى العام مكوناته هى المحاور $X,Y$ وبالتال فإن المستوى الذى يوازيه مكوناته مثله وعليه فإن الأثار طالما توازى المحاور العامه فإن إحداثيات أثارها بمالانهاية فى إتجاه هذه المحاور وتوازيها وتبدأ من الإرتفاع المعلوم لوضع المستوى. ولتمثيل $V^\alpha$ و $h^\alpha$ لابد أن تكون قيمة الإرتفاع $Z$ لهم معلومه حتى يتم رسم المحاور منها.

3. فى المستويات التى توازى المستويات العامه ننظر إلى إسم المستوى ونرى مكوناته ( مثلا $X,Y$ ) فتكون بمالانهايه فى الرموز المستخدمة لتعريف المستوى أما الإحداثى الباقى فيكون معروف. ومن هنا يمكن تعريف المستوى الأفقى على أنة المستوى $\alpha(\infty,\infty,Z)$ .

4. المستوى خطى المسقط يتم رسمة بزاويه ميله من مسقط أى نقطه فيه فى إتجاه خطى المسقط ( المستوى خطى المسقط الأفقى يتم رسمه من مسقط أفقى لنقطة تقع فى المستوى أى يحمل رقم واحد، المستوى خطى المسقط الرأسى يتم

رسمه من مسقط رأسى لنقطة أى يحمل رقم أثنين، المستوى خطى المسقط الجانبى يتم رسمه من مسقط جانبى لنقطة أى يحمل رقم ثلاث).




شكل 116

## علاقة المستقيم بالمستوى الواقع فيه

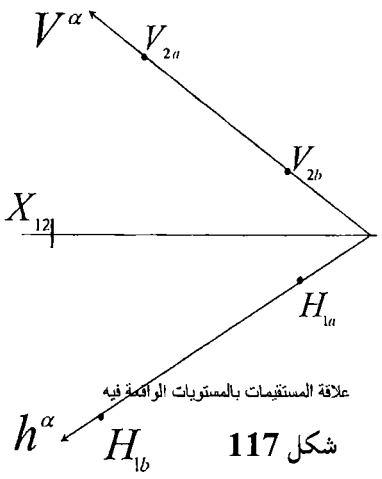
صديقى الطالب: أرجوك إحضر أدواتك وأبدأ تنفيذ ماسيتم شرحه حتى تستطيع تفهم هذة العلاقات لأنها هامه جدا وتعتبر قلب العمليات الوصفيه القادمه.

1-أرسم أى مستوى ممثل بالأثار $h^\alpha$ و $V^\alpha$

2-أنظر للشكل الفراغى المرسوم شكل **116** تجد أن المستقيم **b** عامة ليس له علاقه بالمستوى $\alpha$ حيث لايقع فيه والسؤال الأن متى يقع المستقيم فى المستوى.

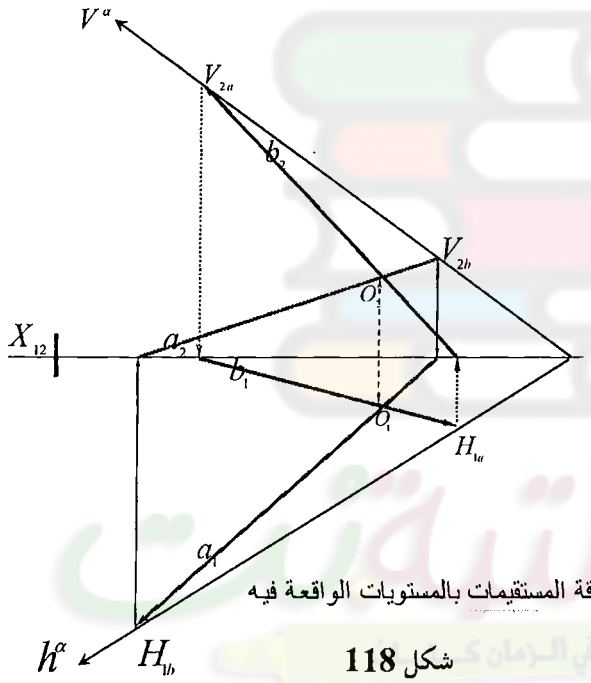
**شرط وقوع مستقيم عام فى المستوى:** لكى يقع مستقيم عام فى المستوى ننظر لشكل **116** نجد المستقيم **a** يقع فى المستوى وذلك لأن الأثر الأفقى للمستقيم **a** يقع على الأثر الأفقى للمستوى ($H_1 / h^\alpha$) وكذلك الأثر الرأسى للمستقيم **a** يقع على الأثر الرأسى للمستوى ($V_2 / V^\alpha$) كما فى شكل **116**. ومن هنا يمكن تلخيص شرط وقوع مستقيم عام فى المستوى فى هذه القاعدة والتى أسميناها القاعده الذهبيه رقم واحد.

ذهبيه **1**: شرط وقوع مستقيم عام فى الستوى هى $H_1 / h^\alpha$ و $V_2 / V^\alpha$



شكل 117

ومن هنا نستخرج **تعريف جديد للأثر الأفقي والرأسي**: الأثـــر الأفقى للمستوى هو المحل الهندسى لكل الأثار الأفقية لكل المستقيمات الواقعة فى المستوى. الأثر االرأسى للمستوى هو المحل الهندسى لكـــل الأثار الرأسية لكل المستقيمات الواقعة فى المستوى. ومن هذه القاعدة يمكن رسم المستوى كما فى **117** . يمكن الأن إختيار أى نقطه علـــى الأثر الرأسى تكون أثر رأسى لأى مستقيم **a** واقع فى المستوى ولانعلم مساقطه حتى الأن،وكذلك أى نقطه على الأثر الأفقى تكون أثر أفقى لأى مستقيم **a** واقع فى المستوى ولانعلـــم مســـاقطه أيضاحتى الأن. ومن هذه الأثـــار يمكـــن إستنتاج المساقط لهذا المســـتقيم المعلـــوم أثاره بإستخدام قاعدة أسقط عمود ووصل كا بالشكل **118**. ونكرر التجربه مـــر أخرى لمستقيم أخر **b** فى المستوى كما فى شكلى **117-118** . ولو لاحظت الأن يصبح لدينا مستقيمين واقعين فى المستوى



شكل 118

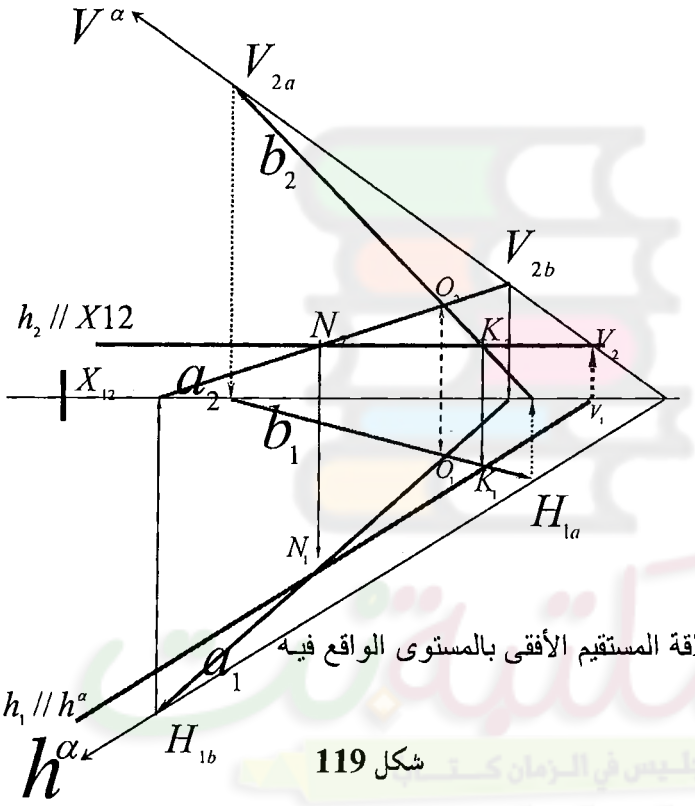
ويجب أن نلاحظ فى شكل **118** أن المستقيمين **b,a** تقاطعا فى نقطة واحدة على خط تناظر واحد وهذا أصبح إثبـــات أن أى مستقيمين متقاطعين فى نقطه يمثلوا مستوى ويحققوا العلاقه الذهبيه رقم واحد.

ومن هنا لو أخذنا عكس الشكل **118**حيث المستوى بدا بمستقيمين متقاطعين فكيف يمكن تمثيل المستوى؟؟؟ والإجابـــه بسيطه وهى أن نحصل على الأثر الأفقى $H_1$ لكل مستقيم ونوصلهم ببعض فيكون الأثر الأفقى للمستوى، وكـــذلك نحصل على الأثرين الرأسيين للمستقيمين $V_2$ ونوصلهم فيكون الأثر الرأسى للمستوى. وعليه تكون هناك نتيجه وهى:

لإستنتاج الأثار الناقصة للمستوى الممثل بمستقيمين يتم الحصول على الأثرين الأفقين $H_1$ لأى مستقيمين **b,a** بالاضافه الى أثر رأسى واحد $V_2$ لأى منهم ، أو إثنين $V_2$ بالاضافه الى واحد $H_1$ لأنهم سيحصلوا على نقطه تلاقى الأثار مع خط الأرض.

## إستنتاج علاقة المستقيم الأفقى بالمستوى الواقع فيه:

إعتماد على أن أى مستقيمين واقعين فى المستوى يتقاطعا فى نقطة واحده، وكذلك الإعتماد على نظريه التوليد فإنه يمكن تمرير مسقط لمستقيم ما وإستنتاج المسقط المناظر له. ونحن الأن نريد أن نوجد علاقة المستقيم الأفقى بالمستوى:




علاقة المستقيم الأفقى بالمستوى الواقع فيه

شكل **119**

نمرر مسقط رأسى لمستقيم أفقى وهو يوازى خط الأرض $h_2 // X_{12}$ كما فى شكل **119**.

بالإعتماد على نظرية التوليد فإن $h_2$ بعد تمريره يقطع كل من $a_2$ فى $N_2$ ويقطع $b_2$ فى $K_2$ وعلى ذلك بإسقاط كل من $N_2$ و $K_2$ نأتى ب $N_1$ على $a_1$ و نأتى ب $K_1$ على $b_1$ وبذلك يكون $K_1$ $N_1$ هو $h_1$ وبذلك نكون ولدنا المسقط الأفقى للمستقيم الأفقى ونلاحظ بمجرد الإستنتاج أن $h_1 // h^{\alpha}$ وهذا أهم جزء فى القاعدة المستنتجة. ويتم إستخدام نظرية التوليد لإستنتاج المساقط الناقصه عندما يكون المستوى ممثل بمستقيمين. ولكن بعد تمرير وإستنتاج المساقط

للمستقيم الأفقى نلاحظ أنه له علاقة بالأثار للمستوى الواقع فيه وهى أن $V_2 / V^\alpha$ و أن $h_1 // h^\alpha$ وبـذلك نكـون أستنتجنا علاقة المستقيم الأفقى بالمستوى الواقع فبه من شكل **119** وهى :

**ذهبيه 2: علاقة المستقيم الأفقى بالمستوى الواقع فبه** $h_2 // X_{12} + V_2 / V^\alpha + h_1 // h^\alpha$

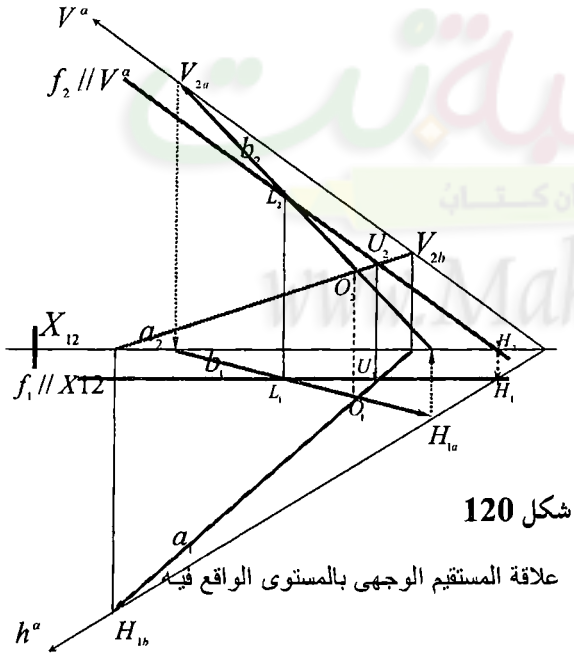
وهذة القاعده أطلقنا عليها الطريق الموازى " سكة العميان" لأنها لاتستخدم إلا إذا توافر أثار المستوى وهى لها تعريفها لسهولة إستخدامها وهى: الطريق الموازى أو " سكة العميان" أو موازى عمودى موازى: ويتم الفظ بها كالأتى: موازى لخط الأرض عمودى علىخط الأرض موازى للأثر والعكس صحيح شكل **119** . وأطلقنا عليه : الطريق الموازى" سكة العميان" لأنك تدخل المستوى موازى لخط الأرض حتى تصطدم بالأثر ثم عمودى علـى خـط الأرض حـتى تصطدم به ثم موازى للأثر وتخرج خارج المستوى والعكس صحيح. وهذا يشبه دخول غرفه مظلمـه والأصـطدام بحوائطها والخروج منها دون علم هنها أى شيء.ومن ما سبق وبعكس التمرير يمكنك أن تجرب تمرير مستقيم وجهـى وإستنتاج العلاقة بنفسك وهى علاقة المستقيم الوجهى بالمستوى شكل**120**.

**ذهبيه 3: علاقة المستقيم الوجهى بالمستوى الواقع فيه** $f_1 // X_{12} + H_1 / h^\alpha + f_2 // v^\alpha$

وهذه العلاقه ينطبق عليها كل من **نظريه التوليد والطريق الموازى وسكة العميان..**

## إسـتخدامات المسـتقيمات الأفقيـة و الوجهية

**1-** كل مستوى يوجد بـه مئـات بـل ملايـين المستقيمات الوجهية والافقيـة ولكـن المسـتقيم المطلوب يعتمد على النقطة التى يجب ان يمـر بهـا وعلية لو هناك اى نقطة فانه لا يمـر بهـا سـوى مستقيم أفقي واحد و وجهـي واحـد وبالتـالي بالإستعانة بالمستقيمات الوجهية أو الافقية يمكن أن




**شكل 120**

علاقة المستقيم الوجهى بالمستوى الواقع فيه

نأتي بالإحداثيات الناقصة بالنسبة للنقاط كما سنرى فى أمثلة قادمة.

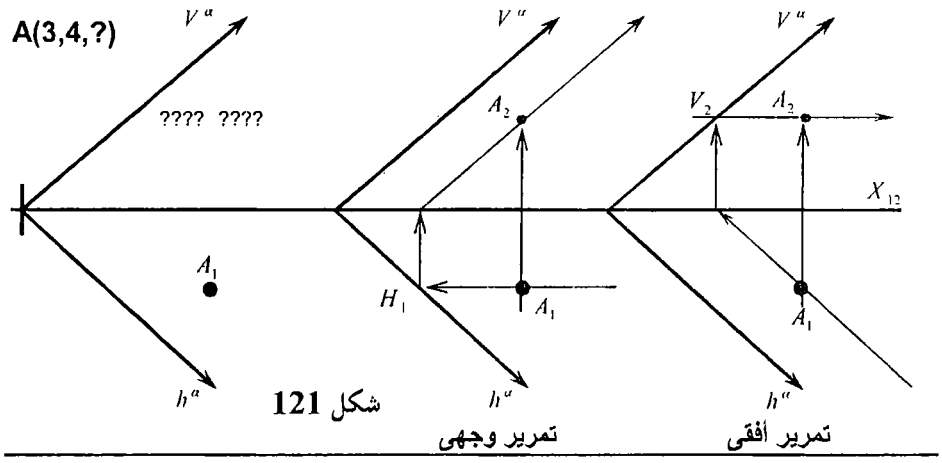
2- أي أثر للمستوى يمكن إيجادة إذا عُلم أثرين لمستقيمين واقعين فية. فبمعلومية الأثرين الأفقيين لمستقيمين فى المستوى فإنه يمكن أن نوقع الأثر الأفقي للمستوى بتوصيلهما ومدهما حتى يتقاطعا مع خط الأرض وكذلك بالنسبة للأثار الرأسية . عند عدم وجود أثار المستوى ومطلوب تحديدها نبحث عن وجود لأى مستقيم أفقى واقع فى المستوى بذلك نكون قد علمنا إتجاه الأثر الأفقى ويمكن رسمه حينئذ من أى أثر أفقى لأى مستقيم أخر واقع فى المستوى وكذلك بالنسبة للمستقيم الوجهى فبمجرد وجوده نكون عرفنا إتجاه الأثر الرأسى للمستوى ويبقى حينئذ أى أثر رأسى لمستقيم أخر واقع فى المستوى لنرسم منه الأثر الرأسى للمستوى.

## إيجاد الإحداثيات الناقصة للنقاط

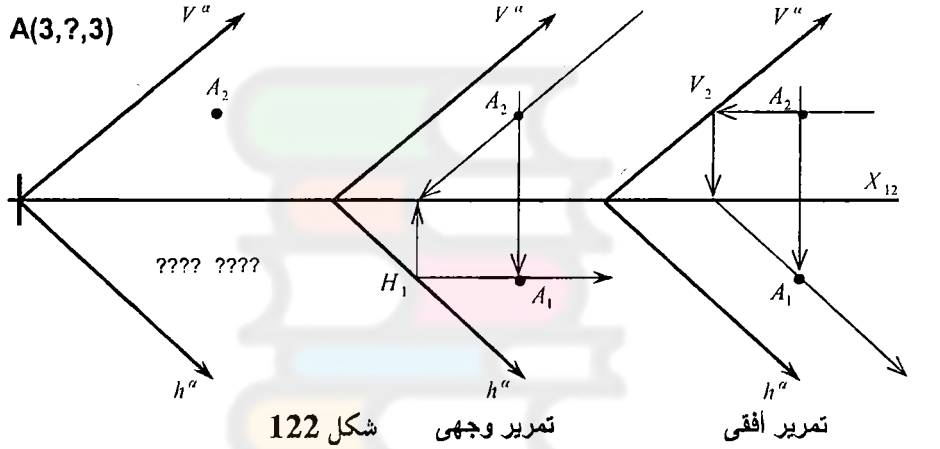
من علاقة المستقيم بالمستوى فقد عرفنا أن أى نقطة فى المستوى لايمر بها سوى مستقيم أفقى واحد (على أرتفاع **Z** المعرف للنقطة) ، وكذلك مستقيم وجهى واحد على بعد **Y** معروف للنقطة. وكذلك من علاقة النقطة بالمستقيم الواقعة عليه أن المسقط الأفقى للنقطة يقع على المسقط الأفقى للمستقيم وأيضا المسقط الرأسى للنقطة يقع على المسقط الرأسى للمستقيم. بناء على ذلك فإنه إذا كان المسقط $A_1$ لنقطة **A** يقع علي مسقط أفقى لمستقيم أفقى $h_1$ فى المستوى فإن $A_2$ تقع على المسقط الرأسى للمستقيم الأفقى $h_2$. لذلك لو أن النقطة تقع فى أى مستوى وكان معلوم منها مسقط ومجهول الاخر فأنه يتم عمل الأتى:

## لو أن المستوى ممثل بالأثار

1. لومعلوم $A_1$ والمجهول $A_2$ كما بالشكل **121** (أىYمعلومة و **Z** مجهولة للنقطة) فإنه يتم تمرير مستقيم أفقى أو وجهى إعتماد على إتجاه أثار المستوى المعروفةكما بالشكل **121** . وكذلك فى شكل **122**المعلوم $A_2$ والمجهول $A_1$ (أىZ معلومة و **Y**مجهولة للنقطة) يتم تمرير مستقيم أفقى أو وجهى كما بالشكل **122**.
2. لو أن المجهول الإحدائى **X** هو المجهول لابد أن يتم تمرير مستقيم أفقى ومستقيم وجهى معا " لان أى نقطة لايمر بها سوى مستقيم أفقى واحد وكذلك مستقيم وجهى واحد) الاثنين معا عندما يتقاطعا يحددا موقع النقطة الصحيح وقيمة **X** )




شكل 121




شكل 122

الشكلين 121و 122 يوضح فى الحالة الاولى كيفية إستنتاج المسقط الرأسى لنقطة A(3,4,?) بتمرير مستقيم أفقى أو وجهى نتيجه لعدم وجود Z ، وكذلك الحاله الثانية لنقطة A(3,?,3) المجهول فيها Y وإستخدام المستقيمات الافقية والوجهيه. وبنفس الاسلوب يتم إستخدام المستقيمات الأفقية والرأسيه إذا كان المستوى ممثل بمستقيمين سواء متقاطعين او متوازيين حيث وضح كيفية التمرير اذا ماكان أى من $A_1, A_2$ معلوم كيف يتم إستنتاج المسقط الاخر.

لو أن المستوى ممثل بمستقيمين

3. لومعلوم $A_1$ والمجهول $A_2$ (أى Z مجهولة للنقطة) فإنه يتم تمرير مستقيم وجهى إعتماد على إتجاه مسقط المستقيم الوجهى فى المستوى الأفقى وهو يوازى خط الأرض شكل 123

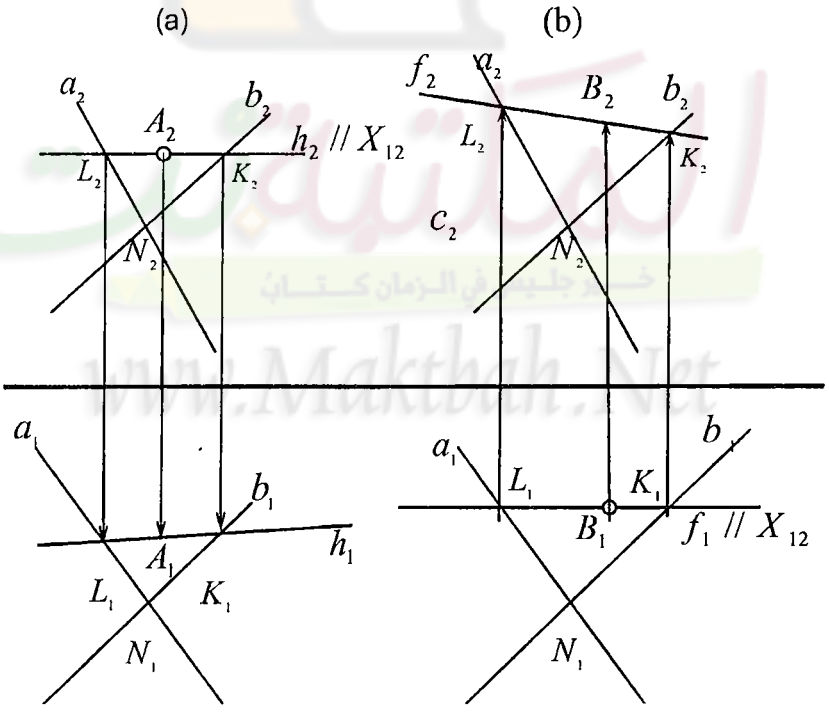
4. لومعلوم $A_2$ والمجهول$A_1$ (أى Y مجهولة للنقطة) فإنه يتم تمرير مستقيم أفقى إتجاه مسقط المستقيم الأفقى فى المستوى الرأسى وهو يوازى خط الأرض شكل 123

5. لو أن المجهول الإحداثى **X** هو المجهول لابد أن يتم تمرير مستقيم أفقى ومستقيم وجهى معا إعتماد على قيمة كل من **z,y** . لان أى نقطة لايمر بها سوى مستقيم أفقى واحد وكذلك مستقيم وجهى واحد، والاثنين معا عندما يتقاطعا يحددا موقع النقطة الصحيح ويحددا قيمة **X** ، كما بالمثال القادم شكل **124**

**مثال: مثل النقطتين A(3,?,5) و B(3.5,6,?)**

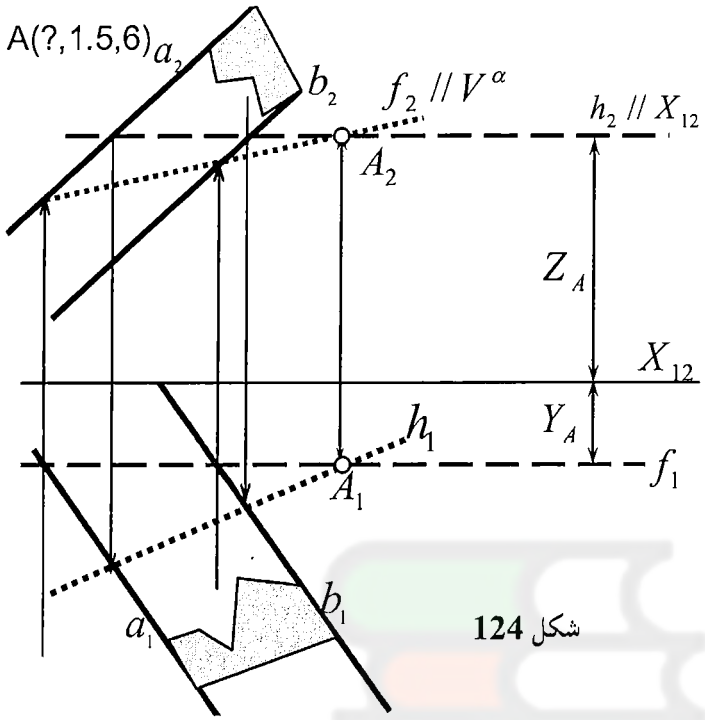
فى الحالة **(a)** نتيجة لأن البعد **Y** لنقطة **A** هو المجهول فإننا إعتماد على البعد **Z** المعلوم للنقطة نمرر مسقط رأسى لمستقيم أفقى موازى لخط الأرض $h_2//X_{12}$ إعتماد على البعد **Z** المعلوم للنقطة (موازى لخط الأرض) فنولد مسقطه الأفقى وبالتالى نوجد المسقط الأفقى للنقطه شكل **123**.

فى الحالة **(b)** نتيجة لان البعد **Z** لنقطة **B** هو المجهول فإننا إعتماد على البعد **Y** المعلوم للنقطة نمرر مسقط أفقى لمستقيم وجهى $f_1//X_{12}$ إعتماد على البعد **Y** المعلوم للنقطة (موازى لخط الأرض) فنولد مسقطه الرأسى وبالتالى نوجد المسقط الرأسى للنقطه شكل **123**.




شكل **123**

**مثال: مثل النقطة A(?,1.5,6)**



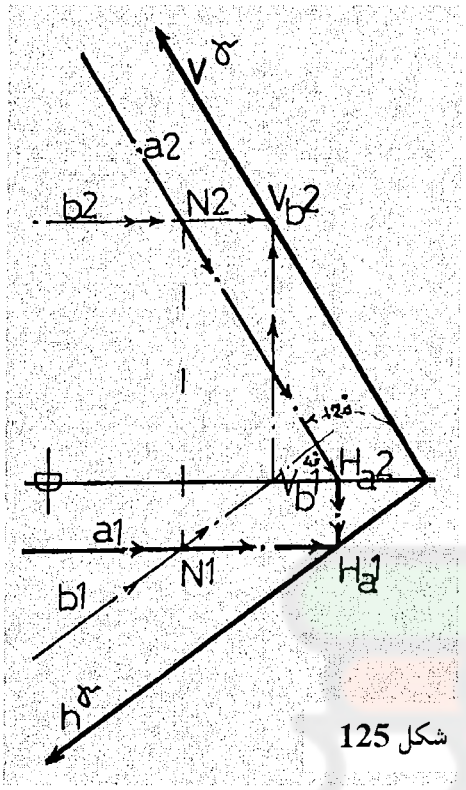

شكل 124

فى المثال الموضح نجـد أن نقطـة **A** مجهولة **X** وبالتالى نعتمد على البعـد $Y_A$ لتمرير مسقط أفقـى لمسـتقيم وجهـى مـوازى لخـط الأرض $f_1$ وبإستخدام نظرية توليد المستقيمات نوجد المسقط الرأسـى للمسـتقيم الوجهى $f_2$، ثم نعتمد علـى البعـد $Z_A$ لتمرير مسقط رأسى لمسـتقيم أفقى $h_2$ موازى لخط الأرض وبإستخدام نظرية توليد المستقيمات نوجد المسقط لأفقى للمستقيم الأفقى $h_1$. تقـاطع المساقط الافقيه للمستقيمين الأفقى والوجهى تعطى المسقط الأفقى للنقطة $A_1$، تقاطع المساقط الرأسـية للمسـتقيمين الأفقى والوجهى تعطى المسقط الرأسي للنقطة $A_2$، وهذا أيضا يتم عندما يكون المستوى ممثل بالأثـار ولكـن دون إستخدام نظرية توليد المستقيمات وإنما بإستخدام نظرية "سكة العميان" مباشرة أعتماد على الابعاد وبالتالى تنتج المساقط شكل **124**. وسنعطى عدة امثله على ذلك.

**مثال: عين أثرى المستوى المكون من المستقيمين a,b المتقاطعين فى N**

أولا : **N(2,1,4)** والمستقيم **b** أفقى يميل $45^0$ على المستوى الرأسى، **a** وجهى يميل $120^0$ على المستوى الأفقى من الحالة المعطاه نجد أن المستقيم الأفقى الواقع فى المستوى يحدد خاصيتين: الأولى أثر المستقيم الأفقى هو أثر رأسى يقع على الأثر الرأسى للمستوى وبالتالى هى نقطة يمكن منها رسم الأثر الرأسى للمستوى ولكن ليس لدينا إتجاهه، الثانيـة هى إتجاه المسقط الأفقى للمستقيم الأفقى $h_1$ هو إتجاه الأثر الأفقى للمستوى وبالتالى يبقى لنا نقطة نرسم منها إتجاه هذا الأثر شكل **125**.

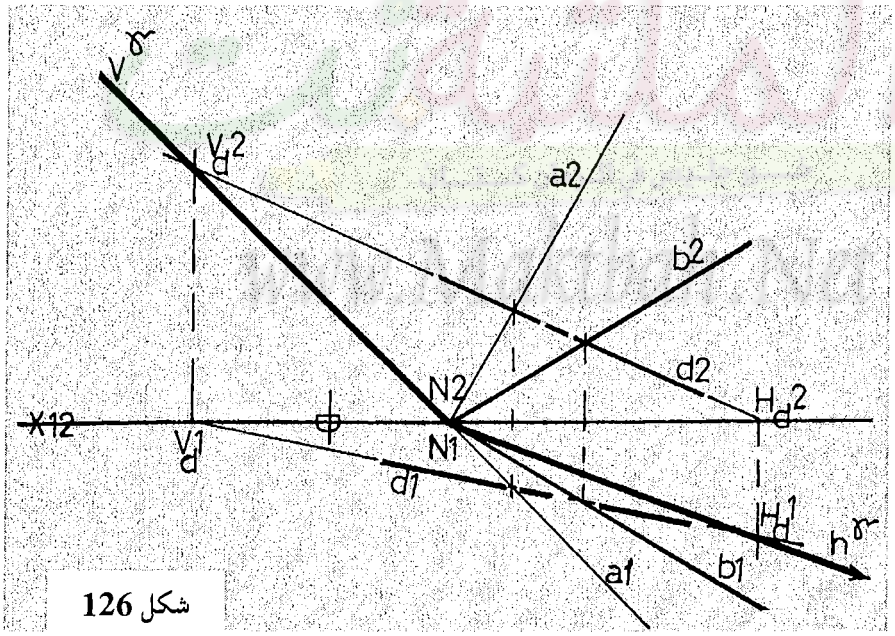
وكذلك المستقيم الوجهى الواقع فى المستوى يحدد خاصيتين: الأولى أثر المستقيم الرأسى هو أثر أفقى يقع على الأثر الأفقى للمستوى وبالتالى هى نقطة يمكن منها رسم الأثر الأفقى للمستوى وأصبح معروف إتجاهه من المستقيم الأفقى وبالتالى يتم رسمه مباشرة، الثانية هى إتجاه المسقط الرأسى للمستقيم الوجهى $f_2$ هو إتجاه الأثر الرأسى للمستوى وبالتالى إتجاه الأثر الرأسى يتم رسمه من الأثر الرأسى للمستقيم الأفقى.




شكل 125

**ثانيا: N(2,0,0) ، $a_2,a_1,b_2,b_1$ تصنع الزوايا $150^0$ و $30^0$ و $135^0$و $60^0$ مع خط الأرض**

الحل: نلاحظ أن المستوى مكون من مستقيمين ولكن لهم وضع خاص فى أستنتاج أثارهم وهى أنها كلها تقع على خط الأرض وبالتالى لايمكن تحديد أثار مباشره لهذة المستقيمات وكل ماتم الحصول عليه هو نقطة على خط الأرض هى رأس المستوى لأنها المحل لكل الأثار الأفقية والرأسية شكل 126.

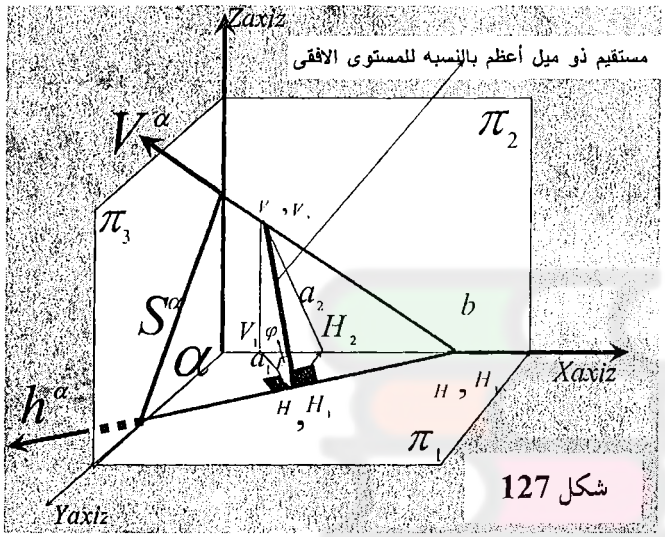



شكل 126

لذلك بناء على وضع المستوى الممثل بمستقيمين وكذلك نظرية

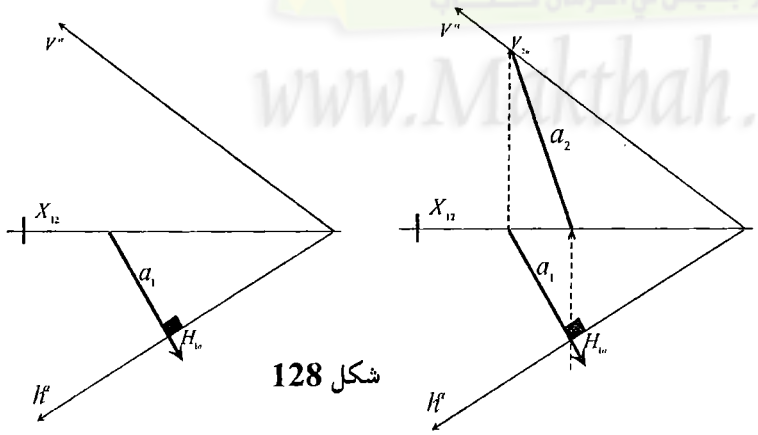
التوليد يتم إيجاد أى مستقيم فى المستوى بأى وضع حيث نمرر أى مسقط رأسى لمستقيم **d** بأى وضع كما بالشكل ثم يتم إستنتاج مسقطه الأفقى ويمكن إذا إيجاد أثار المستقيم الجديد **d** وهذه الأثار تقع على أثار المستوى يتم توصيلهم بالنقطة على خط الأرض فنستنتج أثار المستوى، شكل **126**.

## المستقيم ذو الميل الأعظم



شكل 127

ذهبيه **4**: المستقيم ذو الميل الأعظم بالنسبة للمستوى الأفقى $\pi_1$. المستقيم ذو الميل الأعظم بالنسبة للمستوى الأفقى هو المستقيم الواقع فى المستوى وله أكبر زاويه ميل $\varphi$ على المستوى الأفقى عن باقى المستقيمات الواقعة فى المستوى، وزاوية الميل هذه هى نفس زاوية ميل المستوى على المستوى الأفقى $\varphi$ شكل **127**. مميزات هذا المستقيم أنه عمودى على الأثر الأفقى للمستوى وبالتالى فهو عمودى على كل المستقيمات الأفقيه فى المستوى. يظهر ذلك فى الإسقاط بإستخدام نتيجة الزاويه القائمه تظهر قائمة إذا كان أحد أضلاعها طول حقيقى، ونتيجة لأن الأثر الأفقى للمستوى طول حقيقى فإنه يمكن رسم عمودى عليه مباشرة كما يظهر فى الشكل الموضح شكل **128**. ولإستنتاج مستقيم ذو ميل أعظم فى المستوى يتم رسم مسقط أفقى للمستقيم فى وضع عمودى على الأثر الأفقى ثم إستنتاج مسقطه الرأسى بإسقاط الأثار. ولإيجاد زاوية الميل

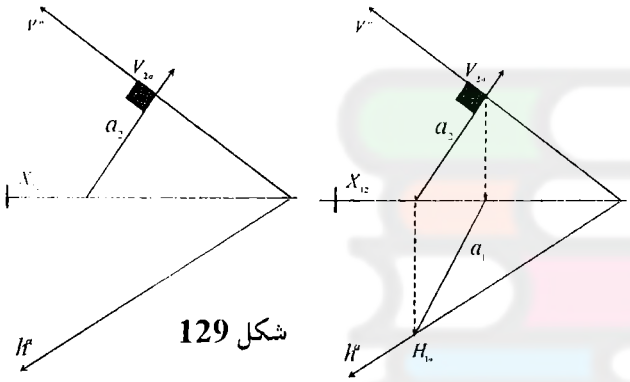


شكل 128

للمستوى أو للمستقيم على المستوى الأفقي يتم إستخدام أسلوب إيجاد الطول الحقيقى على المسقط الأفقى للحصـــول على الطول الحقيقى للمستقيم وكذلك زاوية الميل $\varphi$ .

## ذهبيه 5: المستقيم ذو الميل الأعظم بالنسبة للمستوى الرأسى $\pi_2$

المستقيم ذو الميل الاعظم بالنسبة للمستوى الرأسى هو المستقيم الواقع فى المستوى وله أكبر زاويه ميل $\varphi$ على المستوى الرأسى عن باقى المستقيمات الواقعة فى المستوى، وزاوية الميل هذه هى نفس زاوية ميل المستوى على المستوى الرأسى $\varphi$ . مميزات هذا المستقيم أنه عمودى على الأثر الرأسى للمستوى وبالتالى فهو عمودى على كل المستقيمات الوجهية فى المستوى. يظهر ذلك فى الإسقاط بإستخدام نتيجة الزاويه القائمة تظهر قائمة إذا كان أحد أضلاعها طول حقيقى، ونتيجة لأن الأثر الرأسى للمستوى طول حقيقى فإنه يمكن رسم عمودى عليه مباشرة كما يظهر فى شكل129. ولإستنتاج مستقيم ذو



شكل 129

ميل أعظم فى المستوى يتم رسم مسقط رأسى للمستقيم فى وضع عمودى على الأثر الرأسى ثم إستنتاج مسقطه الأفقى بإسقاط الأثار. ولإيجاد زاويه الميل للمستوى أو للمستقيم على المستوى الرأسى يتم إستخدام أسلوب إيجـــاد الطـــول الحقيقى على المسقط الرأسى للحصول على الطول الحقيقى للمستقيم وكذلك زاوية الميل $\varphi$ .

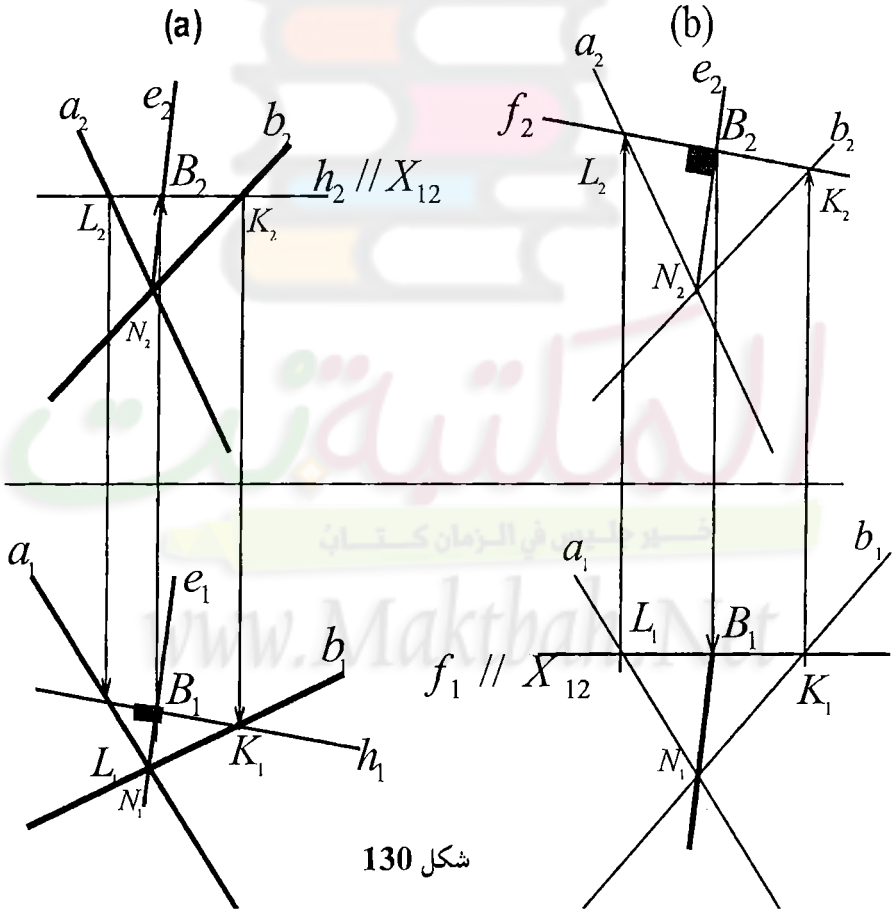
ملاحظة: *كل نقطة فى المستوى لايمر بها سوى مستقيم واحد ذو ميل أعظم بالنسبة للمستوى الأفقى وكذلك مســـتقيم واحد ذو ميل أعظم بالنسبة للمستوى الرأسى*

### - تمثيل مستقيم ذو ميل أعظم فى مستوى ممثل بمستقيمين

المستقيم ذو الميل الأعظم بالنسبه للمستوى الأفقى هو المستقيم الواقع فى المستوى ومن مميزات هذا المستقيم أنه عمودى على الأثر الأفقى للمستوى وبالتالى فهو عمودى على كل المستقيمات الأفقيه فى المستوى. لذا لرسم مستقيم ذو الميل اعظم بالنسبه للمستوى الأفقى يتم رسمه فى هذه الحالة على أى مسقط أفقى لمستقيم أفقى فى المستوى، لـــذلك يـــتم إستنتاج أى مستقيم أفقى **h** بإستخدام نظرية التوليد ثم رسم المسقط الأفقى للمستقيم ذو الميل الاعظم $e_1$ مـــن أى

نقطة فى المستوى ولتكن $N_1$ عمودى علي المسقط الأفقى للمستقيم الأفقى $h_1$ . وبإستخدام نظرية التوليد مرة أخرى يتم إستنتاج المسقط الرأسى للمستقيم ذو الميل الاعظم بإسقاط نقطة التقاطع **B**. كما بالشكل **(a) –130**

المستقيم ذو الميل الاعظم بالنسبه للمستوى الرأسى هو المستقيم الواقع فى المستوى مميزات هذا المستقيم أنه عمـــودى على الأثر الرأسى للمستوى وبالتالى فهو عمودى على كل المستقيمات الوجهية فى المستوى. لذا لرسم مستقيم ذو الميل اعظم بالنسبه للمستوى الرأسى يتم رسمه فى هذه الحالة عمودى على أى مسقط رأسى لمستقيم وجهى فى المســـتوى، لذلك يتم إستنتاج أى مستقيم وجهى **f** بإستخدام نظرية التوليد ثم رسم المسقط الرأسى للمستقيم ذو الميل الاعظم $e_2$ من أى نقطة فى المستوى ولتكن $N_2$ عمودى علي المسقط الرأسى للمستقيم الوجهى $f_2$ . وبإستخدام نظرية التوليد مرة أخرى يتم إستنتاج المسقط الأفقى للمستقيم ذو الميل الاعظم بإسقاط نقطة التقاطع **B**. كما بالشكل **(b)–130**




شكل 130

## تمرير مستوى بالمستقيم

**المعلوم المستقيم m[A(9,1,4), B(5,3,1)] والمطلوب تعين الأثرين الأفقى والرأسى لمستوى $\alpha$ يقع فيه المستقيم m بحيث يكون: أولا: $\alpha_1$ موازى لخط الأرض، ثانيا: $\alpha_2$ قاطع خط الأرض عند X=1، ثالثا: $\alpha_3$ عمودى على $\pi_1$، رابعا: $\alpha_4$ عمودى على $\pi_2$**

الحل: نوجد الأثر ألافقى والأثر الرأسى للمستقيم ثم نبدأ التحليل للمطلوب وبناء عليه نحدد وضع المستوى الذى يحتوى المستقيم. شكل 131

**أولا: $\alpha_1$ موازى لخط الأرض:** المستوى الموازى لخط الأرض أثاره الأفقية والرأسية توازى خط الأرض وبذلك فقد عرفنا إتجاه الأثار للمستوى ويبقى مكان إنطلاقها، ويتحدد من علاقة المستقيم الواقع فى المستوى حيث أن الأثار للمستقيم تقع علىالأثار للمستوى كل فى مسقطه، وبذلك نرسم من الأثر الرأسى للمستقيم خط يوازى خط الأرض ويكون هو الأثرالرأسى للمستوى $V^{\alpha 1}$، وكذلك من الأثر الأفقى للمستقيم نر سم خط يوازى خط الأرض ويكون هو الأثر الأفقى للمستوى $h^{\alpha 1}$. شكل 131

**ثانيا: $\alpha_2$ قاطع خط الأرض عند X=1**

من تحديد مكان X فهى رأس المستوى وبالتالى نصلها بالأثر الرأسى للمستقيم فتكون هى الأثر الرأسى للمستوى $V^{\alpha 2}$، نصلها بالأثر الأفقى للمستقيم فتكون هى الأثر الأفقى للمستوى $h^{\alpha 2}$. شكل 131

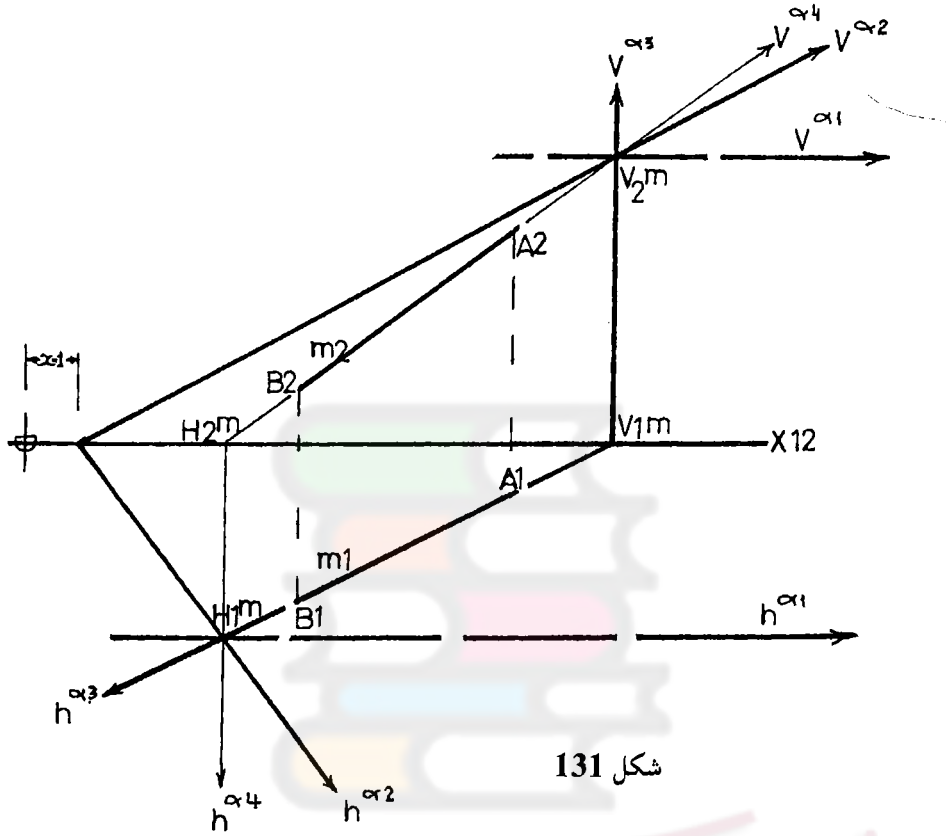
**ثالثا: $\alpha_3$ عمودى على $\pi_1$:**

من مميزات المستوى العمودى على المستوى الأفقى أنه خطى المسقط الأفقى أى أن المسقط الأفقى لأى شكل يقع فى هذا المستوى يكون على هذا الخط، وبالتالى من معرفه $m_1$ يكون تحدد $h^{\alpha 3}$ وهو منطبق عليه ، نمد $m_1$ حتى يصل لخط الأرض ومنه نرسم $V^{\alpha 3}$ عمودى على خط الأرض. شكل 131

**رابعا: $\alpha_4$ عمودى على $\pi_2$:**

من مميزات المستوى العمودى على المستوى الرأسى أنه خطى المسقط الرأسى أى أن المسقط الرأسى لأى شكل يقع فى هذا المستوى يكون على هذا الخط، وبالتالى من معرفه $m_2$ يكون تحدد $V^{\alpha 4}$ وهو منطبق عليه ، نمد $m_2$ حتى يصل لخط

الأرض ومنه نرسم $h^{\alpha 4}$ عمودى على خط الأرض. شكل 131

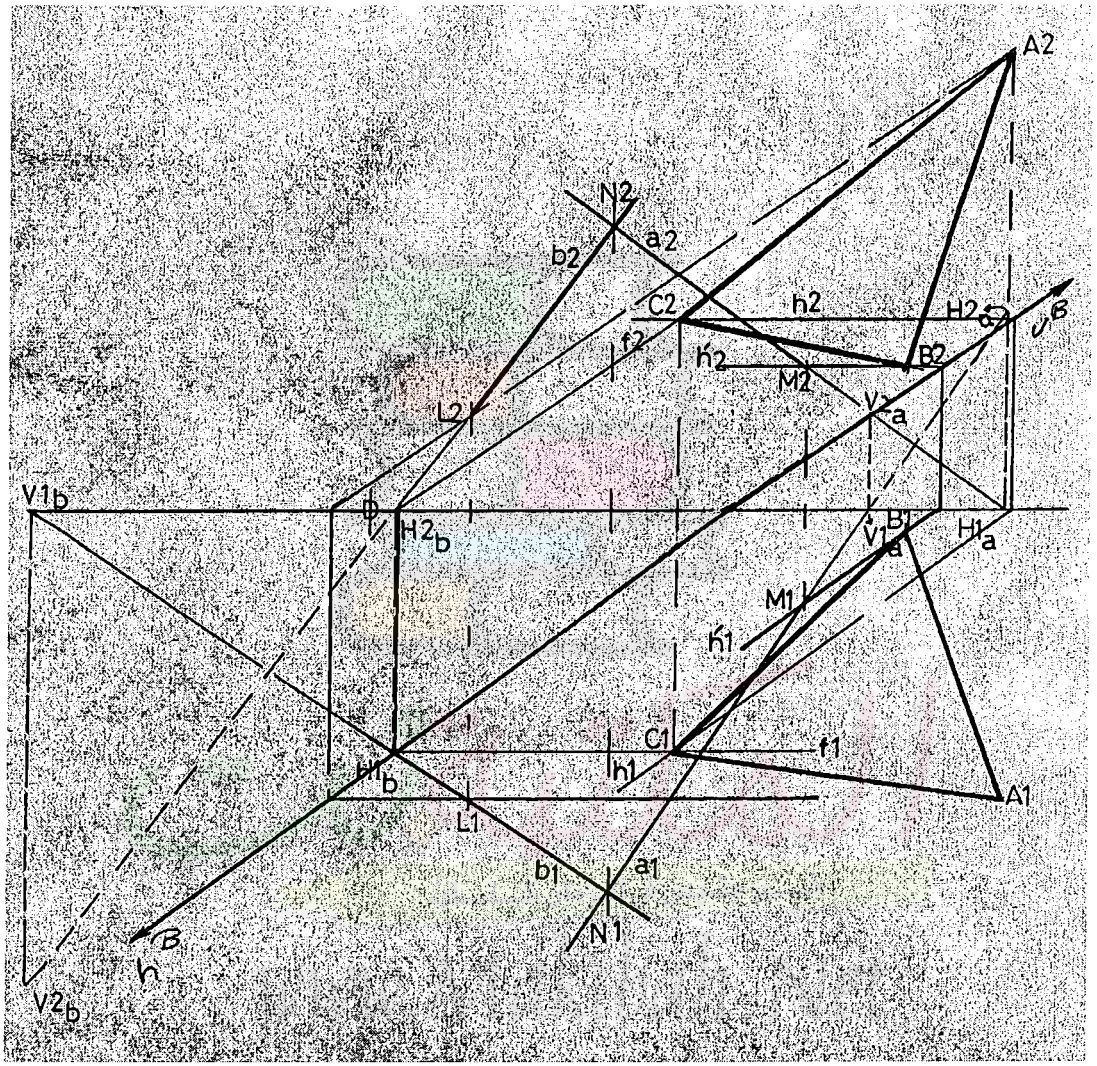



شكل 131

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

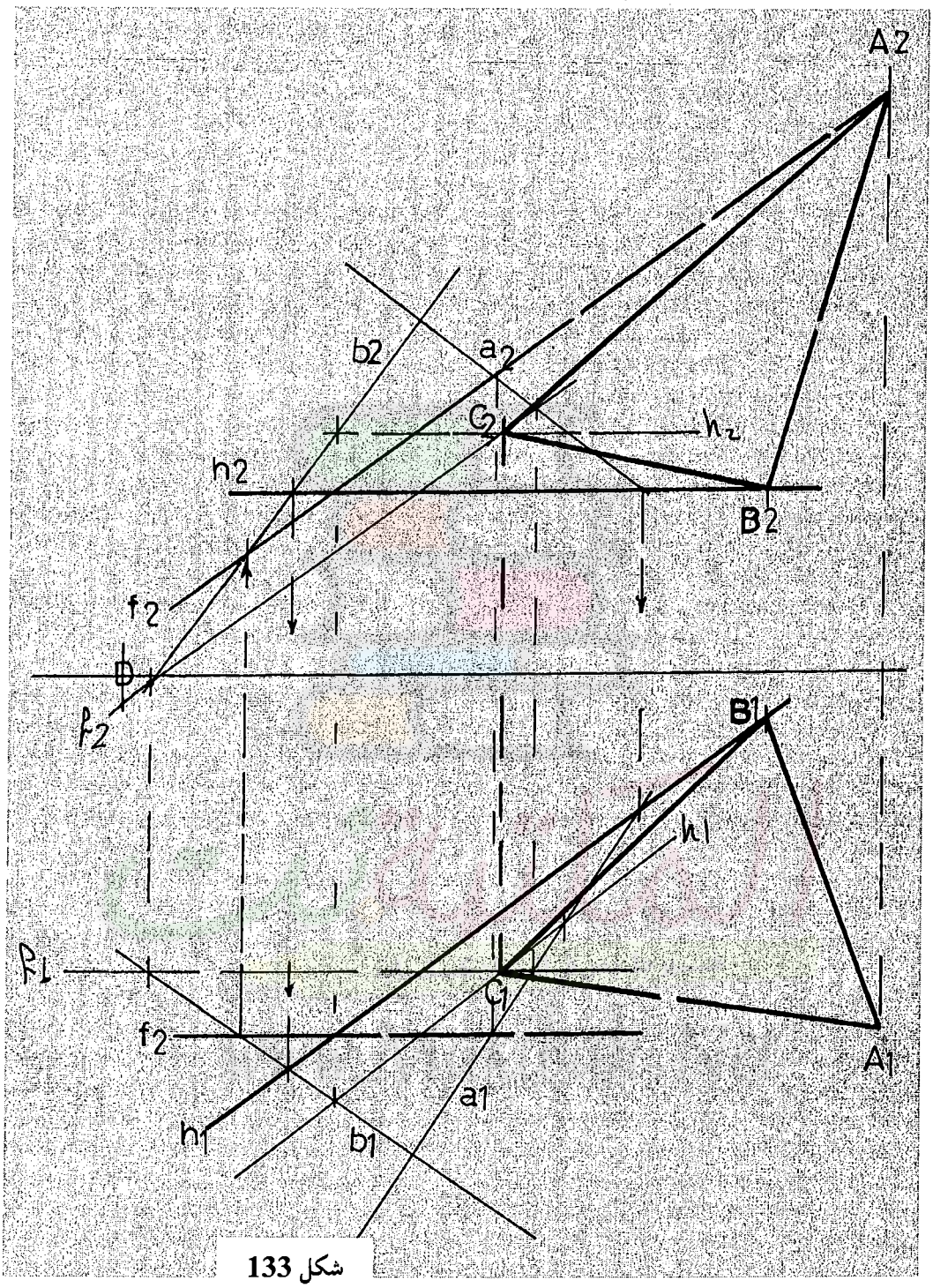
**مثال: المعلوم المستوى $\beta$ المكون من المستقيمين المتقاطعين فى نقطة N(5,8,6) والاول يمر بنقطة M(9,2,3) والثانى يمر بنقطة L(2,6,2) والمطلوب تمثيل المثلث ABC الذى يقع فى هذا المستوى حيث A(13,6,Z), B(11,Y,3), C(X,5,4)**

الحل الاول: بإيجاد أثار المستوى شكل 132




شكل 132

الحل الثانى بدون إستخدام الأثار: شكل 133




شكل 133

نلاحظ أن الحل الأول بإستخدام الأسلوب التقليدى فى إيجاد الأثار للمستوى أولا قد أضاع الكثير من الوقت وجعل شكل الحل معقدا وذلك عن الحل بإستخدام التمرير المباشر للمستقيمات الأفقية والوجهية وكذلك نظرية توليد المستقيمات. وفى كلتا الحالتين يتم تمرير وإستخدام المستقيمات الافقيه والوجهيه لإيجاد الإحداثيات الناقصة للنقاط

## أوضاع المستويات فى الفراغ والإسقاط من منظور الرسم الهندسى

كما تم الحدث سابقا فى الفرق فى الإسقاط بين الرسم الهندسى والهندسة الوصفية، فإننا نتحدث الأن نتحدث عن إسقاط المستويات بأوضاعها الخاصة والعامة من منظور الرسم الهندسى.

شكل 134 و 135 -(A) يبين الوضع الفراغى للمستوي الأفقى سواء كان مثلث أو مستطيل، (B) يبين الإسقاط بالنسبة للمستوي الأفقى على المستويات الثلاثة ودورانهما (C) يوضح الثلاثة مساقط بعد إفراد المستويات ونلاحظ أن المسقط الجانبى على اليمين فى الرسم الهندسى بهذا الأسلوب هو نفس المسقط الجانبى فى الهندسة الوصفية للمستوي الأفقى.

شكل 136 و 137 -(A) يبين الوضع الفراغى للمستوي الوجهى سواء كان مثلث أو مستطيل، (B) يبين الإسقاط بالنسبة للمستوي الوجهى على المستويات الثلاثة ودورانهما (C) يوضح الثلاثة مساقط بعد إفراد المستويات ونلاحظ أن المسقط الجانبى على اليمين فى الرسم الهندسى بهذا الأسلوب هو نفس المسقط الجانبى فى الهندسة الوصفية للمستوي الوجهى.

شكل 138 و 139 -(A) يبين الوضع الفراغى للمستوي الجانبى سواء كان مثلث أو مستطيل، (B) يبين الإسقاط بالنسبة للمستوي الجانبى على المستويات الثلاثة ودورانهما (C) يوضح الثلاثة مساقط بعد إفراد المستويات ونلاحظ أن المسقط الجانبى على اليمين فى الرسم الهندسى بهذا الأسلوب هو نفس المسقط الجانبى فى الهندسة الوصفية للمستوي الجانبى.

شكل 140 و 141 -(A) يبين الوضع الفراغى للمستوي الرأسى سواء كان مثلث أو مستطيل، (B) يبين الإسقاط بالنسبة للمستوي الرأسى على المستويات الثلاثة ودورانهما (C) يوضح الثلاثة مساقط بعد إفراد المستويات ونلاحظ أن

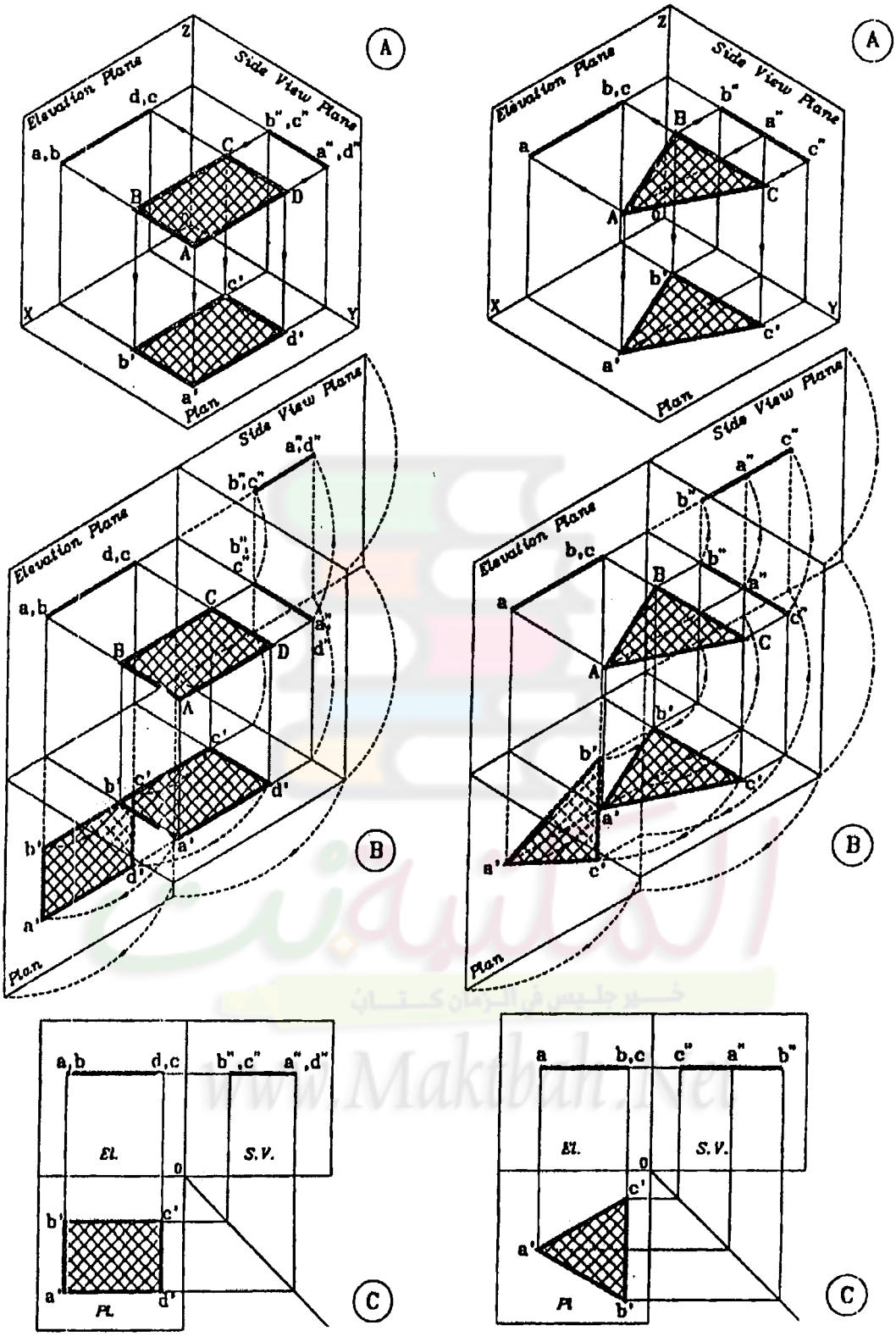
المسقط الجانبى على اليمين فى الرسم الهندسى بهذا الأسلوب هو نفس المسقط الجانبى فى الهندسة الوصفية للمستوي الرأسى.

شكل 142 و 143 -(A) يبين الوضع الفراغى للمستوي العمودى على الجانبى سواء كان مثلث أو مستطيل، (B) يبين الإسقاط بالنسبة للمستوي العمودى على الجانبى على المستويات الثلاثة ودورانهما (C) يوضح الثلاثة مساقط بعد إفراد المستويات ونلاحظ أن المسقط الجانبى على اليمين فى الرسم الهندسى بهذا الأسلوب هو نفس المسقط الجانبى فى الهندسة الوصفية للمستوي العمودى على الجانبى.

شكل 144 -(A) يبين الوضع الفراغى للمستوي العمودى على الرأسى سواء كان مثلث أو مستطيل، (B) يبين الإسقاط بالنسبة للمستوي العمودى على الرأسى على المستويات الثلاثة ودورانهما (C) يوضح الثلاثة مساقط بعد إفراد المستويات ونلاحظ أن المسقط الجانبى على اليمين فى الرسم الهندسى بهذا الأسلوب هو نفس المسقط الجانبى فى الهندسة الوصفية للمستوي العمودى على الرأسى.

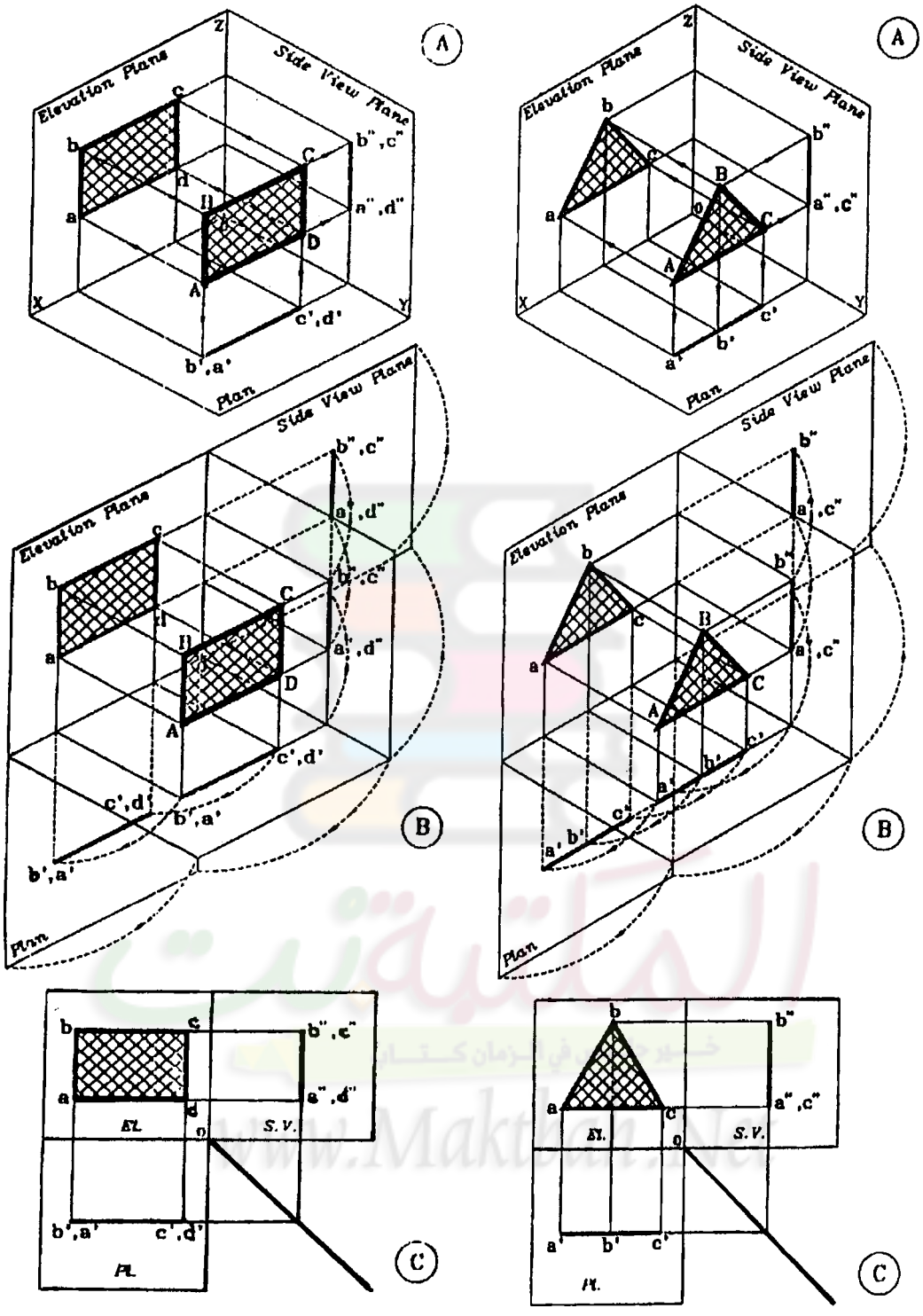
شكل 145-يبين الوضع الفراغى للمستوي العام.

المكتبة نت
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net




شكل135

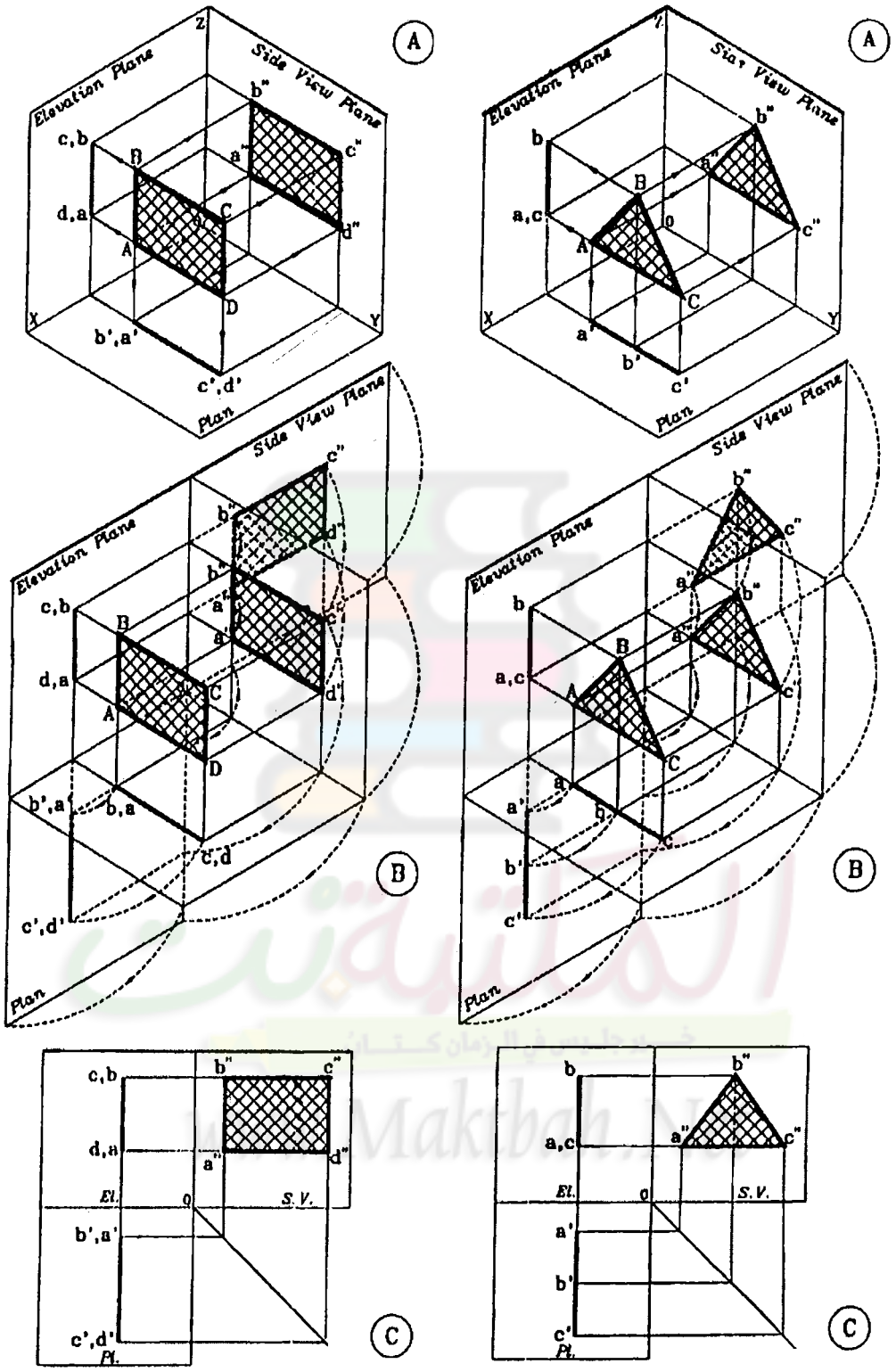
شكل134




شكل 136



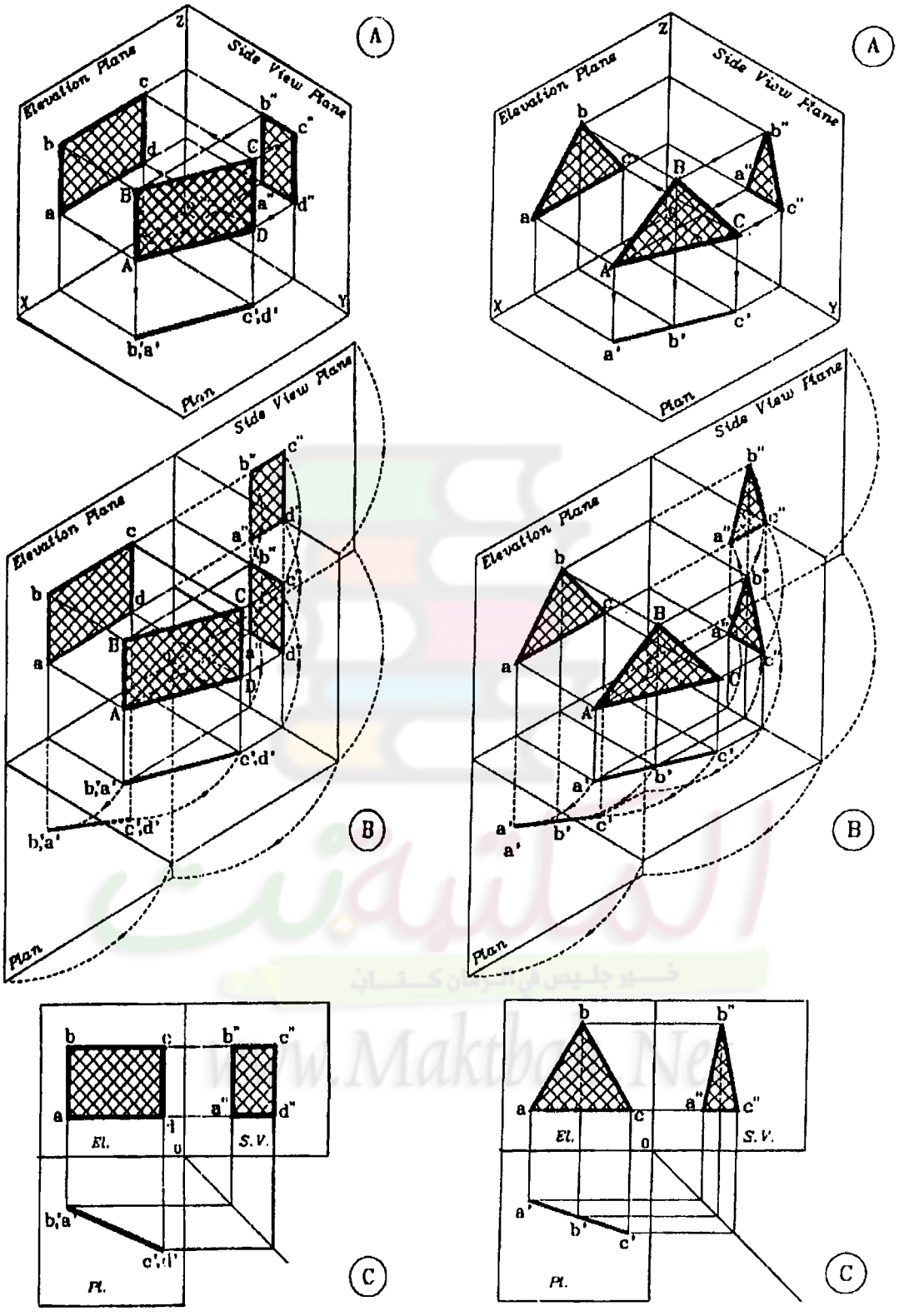

شكل137




شكل138



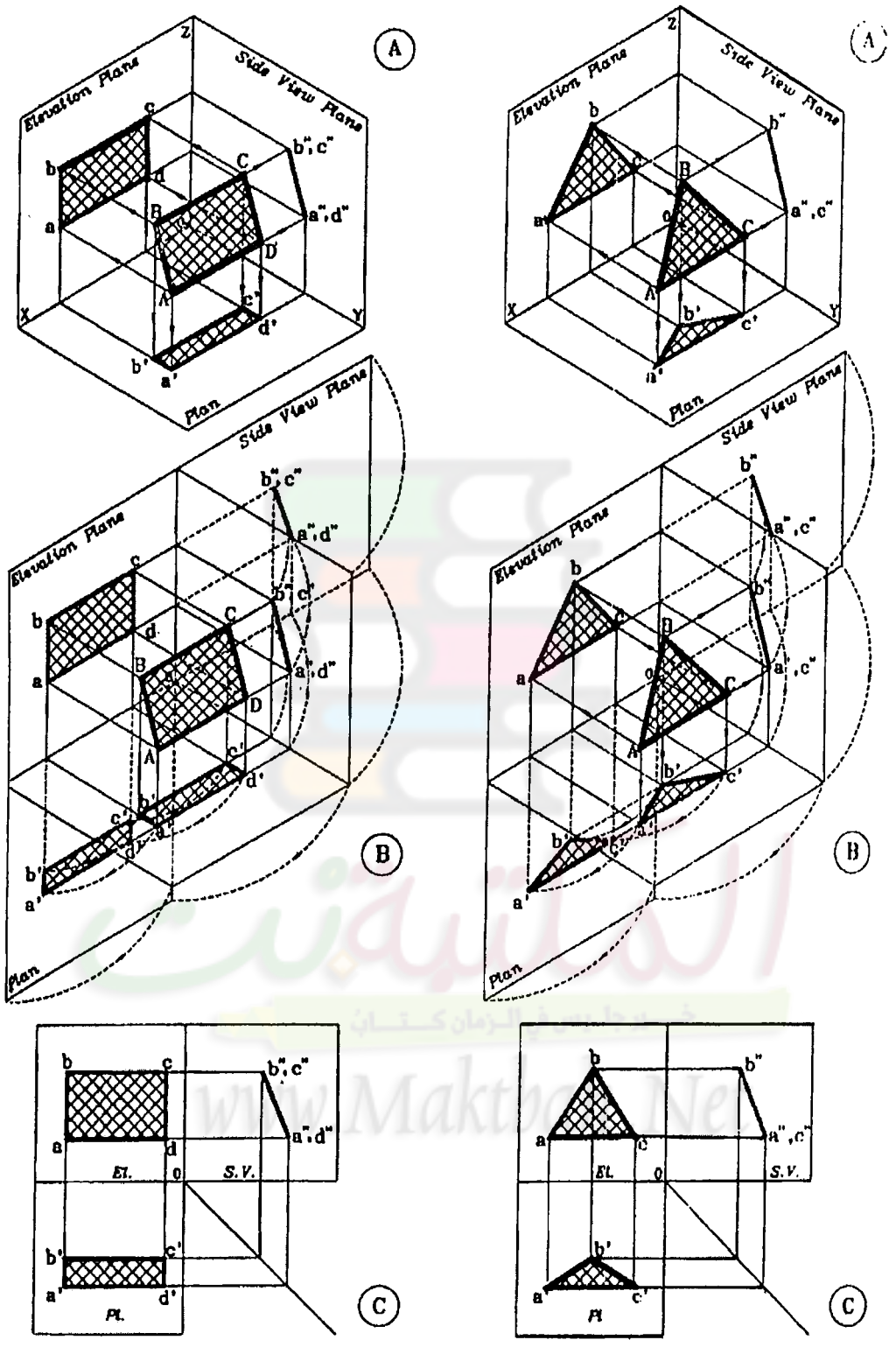

شكل139




شكل140



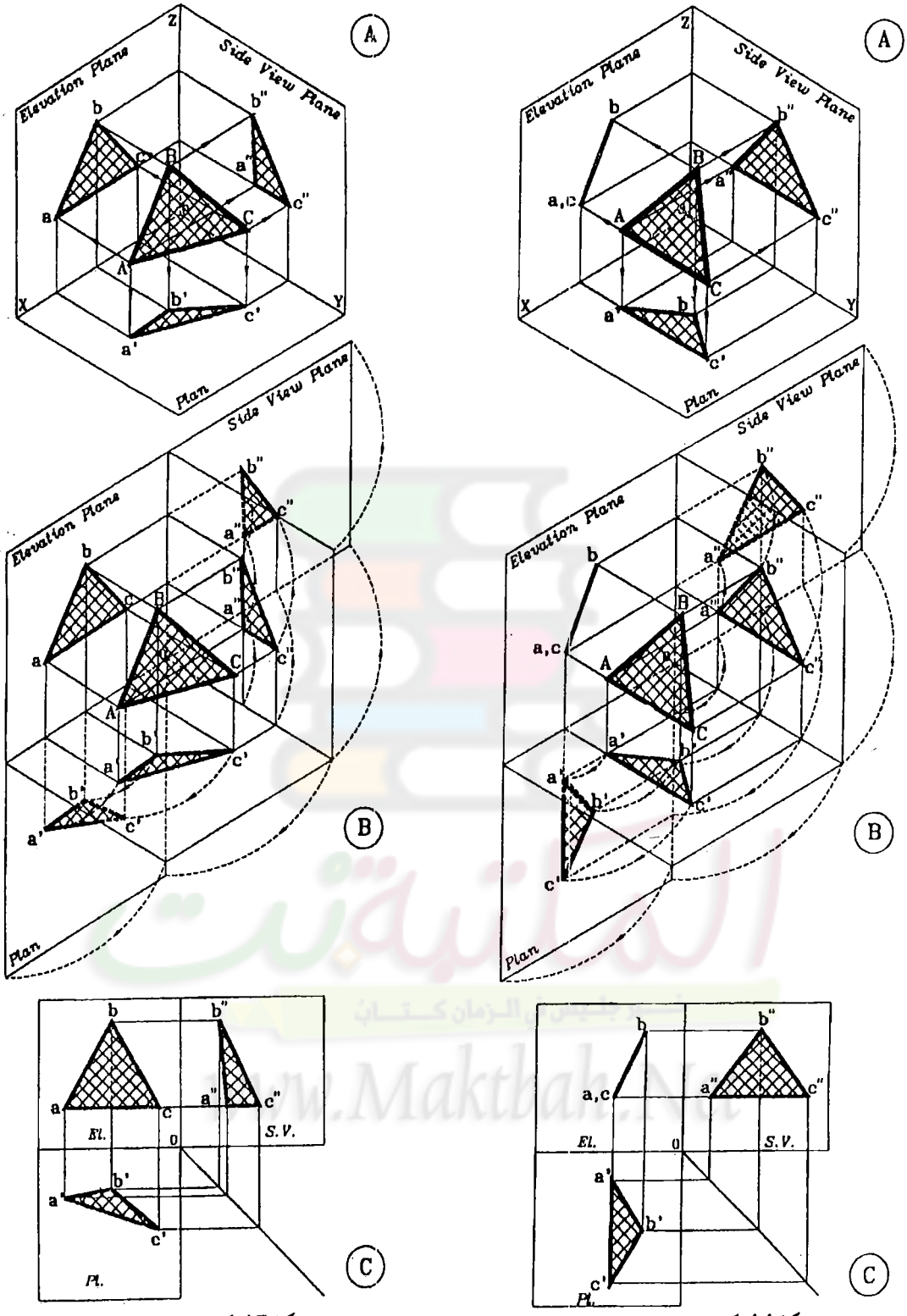

شكل141




شكل142




شكل143




شكل144




شكل145

# تمارين المستوى

1- عين أثار المستويات الاتية

( 2,90$^0$,90$^0$) و β و ( 2, ∞, 3 ) 0 و ( 2,∞,∞ ) Ψ و ( -1,4,5 ) Φ

( 0,45$^0$,30$^0$ ) و λ ( 0,135$^0$,120$^0$ ) ξ و ( -1,-3,-4 ) Л

2- عين أثار المستوى الذي يحتوي على النقط الثلاث الاتية :

1- A ( -3,2,4 ) B ( 3,7,2 ) C ( 1,1,6 ) ، 2- A ( -3,1,6 ) B ( 1,7,-1 ) C ( 2,2,2 )

3- A ( 2,0,3 ) B ( 0,-2,0 ) C ( -2,4,0 ) ، 4- $\alpha[A(1,1.5,2.5), B(2,2,1.5), C(0,4,1.5)]$

5- $\beta[D(2,0,3), E(0,-2,0), F(-2,4,0)]$

3- معطى نقطتين A ( 6,3,3 ) B ( 3,1,2 ) والمطلوب مربع وجهي ABCD .

4- مثل بالأثرين المستوى الرأسي ( خطي المسقط الأفقي ) الذي :

أولا : يمر بالنقطتين A(6,3,3 ) ، B( 3,1,2 ) ثم عين مسقطي نقطة M تقع في هذا المستوى وتبعد 4 سم عن $\pi_1$ و2 سم عن $\pi_2$ .

ثانيا : الذي يمر بنقطة C ( 4,1,3 ) ويميل 30$^0$ على $\pi_2$ ثم عين $N_1$ لنقطة N تقع في هذا المستوى حيث ( 1,2 ) $N_2$ .

5- مثل نقطتين A( 1,?,3 )و B( 7,3,? ) تقعان في المستوى $\alpha(5,150^5,120^0)$ .

6- المعلوم من مستوى أثره الأفقي h ونقطةN فيه عين أثره الرأسي إذا كان:

أولا : N(6,2,5 ) , h(1,135$^0$) ثانيا : N(1,2,-5 ) , h(7,30$^0$)

7- المعلوم مستوى $\beta(\infty,4,3)$ والمطلوب تمثيل المثلث ABC والواقع في المستوى إذا كانت A( 2,?,2) B(4,0,? ), C(?,3,?).

8- المعلوم تقطة N ومستقيم m والمطلوب تمثيل المستقيم n المار بالنقطة N ويوازي m ثم عين أثري المستوى المكون منهما إذا فرض ان:

أولا : N(2,3,1 ) , m أفقي يمر بالنقطة A(1,2,2 ) ويميل 30$^0$ على $\pi_2$ .

ثانيا : N(5,4,3 ) , m وجهي و يمر بالنقطة B(3,2,2 ) ويميل 45$^0$ على $\pi_1$ .

9- مثل متوازي الاضلاع ABCD الواقع في المستوى (-3,-3,2) β حيث A ( 3,1,? ) B( ?,2,1.5 ) C ( 3,?,3 )

10- مثل متوازي الاضلاع ABCD الواقع في المستوى (-3,-3,3) β حيث A ( 3,1,? ) B( ?,2,1.5 ) C ( 3,?,3 )

11- مثل المستوى الأفقي α الذي يمر بالنقطة P ( 4,4,2 ) ثم مثل المربع ABCD الذي يقع في المستوى α ومركزه P إذا كان طول ضلعه 4 سم والقطر CA يميل على $\pi_2$ ب 60$^0$ .

12- مثل المستوى الجانبي $\alpha$ الذي يمر بالنقطة A ( 5,2,5 ) ثم مثل المثلث ABC الذي يقع في المستوى $\alpha$ إذا كان ضلعه BA رأسي و طوله = 3 سم والضلع CA عمودي على $\pi_2$ وطوله 4 سم .

13- عين مساقط المثلث ABC المتساوي الساقين فيه AC= AB والواقع في المستوى $\lambda$( 7,7,? ) حيث A ( ?,?,2 ), B( 1,1, 5 ), C ( -2,?,?)

14- عين مساقط المثلث ABC والواقع في المستوى $\lambda$( 5,6, $\infty$ ) حيث ان B( ?,?,2 ) A ( 0,?,5) والضلع AB طوله 5 سم والضلع AC أفقى وطوله 6 سم ، اذكر عدد الحلول.

15- عين مساقط الشكل الرباعي ABCD والذي يقع في مستوى يوازي خط الأرض X12 حيث A ( 3,3,1 ) B( 1.5,1, 3 ) C ( 5,?,3) D ( 6,2,? ) .

16- عين مساقط الشكل السداسي ABCDEF حيث A ( 1,3,2 ) B ( 2.5,5,4 ) C( 5,?,5 ) D ( 7,2.5 ? ) E ( 6,1,1.5 ) F ( ?,1.5,1 )

17- مثل المعين الواقع في المستوى $\alpha$ حيث A(0,?,2) و B(1,?,1) و C(2,?,?) أذكر عدد ( 4,5, $\infty$) الحلول.

18- مثل المثلث الرأسى الذى فيه A (8,1,2), B (2,7,4) ,C (?,5,6)

19- مثل المثلث ABC العمودى على المستوى الجانبى الذى فيه A(1,2,3) و B(4,3.5,?) و C(5,1,?) وان مستوى المثلث يميل 30 درجه على المستوى الأفقى واستنتج أثار المستوى

20- مثل المستطيل ABCD الواقع فى المستوى الأفقى والذي رأسه A ( 0,1,5.5 ) وضلعه BC طوله 6 سم ويقع على المستقيم MN حيث N ( -3,1,3 ) M ( 1,8,4 ) ومثل نقطة في الفراغ تبعد عن رؤوس المستطيل بمقدار 7 سم .

21- عين مساقط المثلث ABC المتساوي الساقين والواقع في المستوى $\alpha$ ( 0,45$^0$,135$^0$ ) فيه A ( 3,4,? ) والضلع AB مستقيم وجهي طوله 7 سم والضلع BC مستقيم أفقي ونقطة C تقع في المستوى الرأسي $\pi_2$ ثم عين الدائرة التي تمر برؤوس المثلث .

22- مثل كل من المستويين $\alpha, \beta$ اللذان يوازيا مستوى التماثل واستنتج أثارهما ، حيث يمر المستوى $\alpha$ بالنقطه A(6,7,1) ويمر المستوى $\beta$ بالنقطه B(4,-2,4)

23- مثل كل من المستويين $\alpha, \beta$ اللذان يوازيا مستوى الإنطباق واستنتج أثارهما ، حيث يمر المستوى $\alpha$ بالنقطه A(5,7,1) ويمر المستوى $\beta$ بالنقطه B(8,-5,5)

24- عين أثرى المستوى $\delta$ المكون من المستقيمين a,b المتقاطعين في N

أولا : b, N(2,1,4) أفقى يميل 45 على $\pi_2$ ، a وجهي يميل 120 على $\pi_1$

ثانيا : N (2,0,0 ) ، والمساقط $b_1$ ,$b_2$ , $a_1$, $a_2$ , تصنع 60$^0$,135$^0$,30$^0$,150$^0$ مع خط الأرض .

25- المعلوم مستقيم[A(9,1,4), B(5,3,1) ] m والمطلوب تعيين الأثرين الأفقي والرأسي لمستوى $\alpha$ يحيوي m بحيث يكون : أولا : $\alpha_1$ موازى خط الأرض ثانيا : $\alpha_2$ قاطع خط الأرض عند X=1

ثالثا : $\alpha_3$ عمودى على $\pi_1$ رابعا : $\alpha_4$ عمودى على $\pi_2$

26- مثل متوازي الأضلاع ABCD الواقع في المستوى ( -3,3,4 )α إذا كان ضلعه AD طوله 3 سم ويقع في المستوى الرأسي$\pi_2$ B ( 1,?,0 ) A ( -1,0,? )

27- عين مساقط المثلث ABC والواقع في المستوى($0,135^0,45^0$ ) β إذا كان AB مستقيم وجهي طوله 10 سم وكان BC مستقيم أفقي و الرأس C تقع في المستوى الوجهي .

28- عين مساقط المثلث ABC المتساوي الساقين والواقع في المستوى( 7,7,?) $\alpha$ فيه AC= AB و A ( 1.5,1,? ), B ( 7,?,1 ) والضلع AC جانبي .

29- مثل المعين ABCD إذا كان الحرف BC مستقيم أفقي وكان طول AB = 6سم و A ( 2.5,?,2.5 ) ( تقع في المستوى ( -4,4,2 ) Ψ .

المكتبة نت
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

# الباب السادس

# الموضع

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

# الموضـــع

يبحث هذا الفصل العلاقة بين المستقيم والمستوى من حيث وضع كل منهما بالنسبة للأخر وتشمل الاتى:

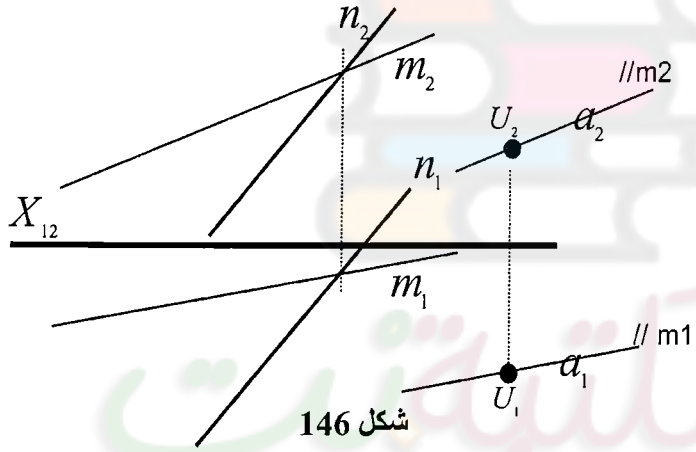
1. **التوازى : كتوازى المستويات والمستقيم مع المستوى**
2. **التقاطع: تقاطع المستويات معا، وكذلك تقاطع المستقيم مع المستوى**

## 1- التوازى بين المستقيم والمستوى

من المعروف فى الهندسة الفراغية أنه: يوازى مستقيم مستوى إذا وازى مستقيم داخل المستوى. وهذا يعنى أنه يمكن رسم من أى نقطة ملايين المستقيمات توازى المستوى. شكل **146**

**مثال: أرسم من نقطة U مستقيم يوازى المستوى الممثل بمستقيمين m,n**

الحل : لكى نرسم مستقيم يوازى مستوى يتم إختيار مستقيم داخل المستوى وليكن **m** ومنه نرسم من المسقط الأفقى للنقطة $U_1$ موازى للمسقط الأفقى للمستقيم **m** وهو $a_1$ $m_1$// وكذلك من المسقط الرأسى للنقطة $U_2$ موازى للمسقط الرأسى للمستقيم **m** وهو $m_2$ // $a_2$ شكل **146** .

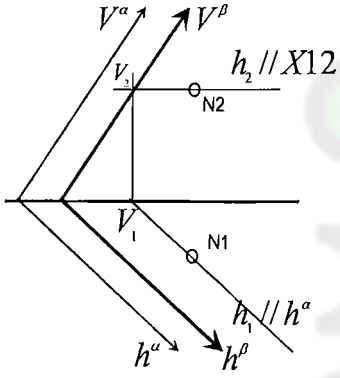


شكل 146

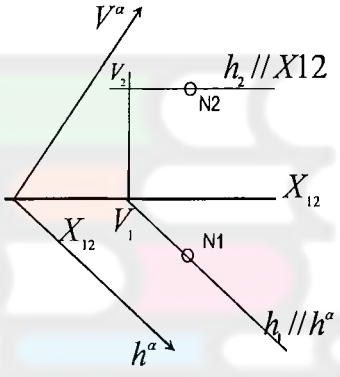
وهذا الحل يضمن التوازى ولكن يعيب هذا الحل أنه يعتمد على إختيار القائم بالرسم لأى مستقيم فى المستوى ليرسم موازى له. ولذلك فهناك ملايين الحلول لهذا التمرين . ومن هنا نشأت المقولة أنه لايجوز رسم مستقيم يوازى مستوى لأنهم ملايين الحلول وإنما يتم رسم مستوى من النقطة يوازى المستوى، وفيه يتضمن كل المستقيمات التى توازى المستوى وهذا هو الحل العام.

## رسم مستوى يوازى مستوى من نقطة معلومة بالأثار

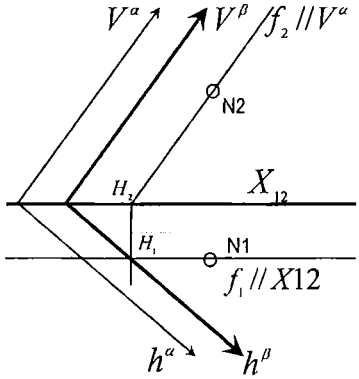
يتم رسم مستوى يوازى مستوى من نقطة **N** بتمرير مستقيم أفقى أو وجهى موازى من هذة النقطة حيث نحصل على أثر هذا المستقيم ومنة نرسم أثار المستوى الجديد توازى أثار المستوى القديم. شكل **147** يبين تمرير مستقيم افقى من نقطه **N** حيث نحصل على أثرة الرأسى $V_2$ ومنة نرسم الأثر الرأسى للمستوى الجديد $V^\beta$ يوازى الأثر الرأسى $V^\alpha$ حتى يقطع خط الأرض فى نقطة منها نرسم الأثر الافقى للمستوى الجديد $h^\beta$ *يوازى الاثر القديم* $h^\alpha$ شكل **148**. والعكس صحيح فى شكل **149** وذلك بتمرير مستقيم وجهى.




شكل 148



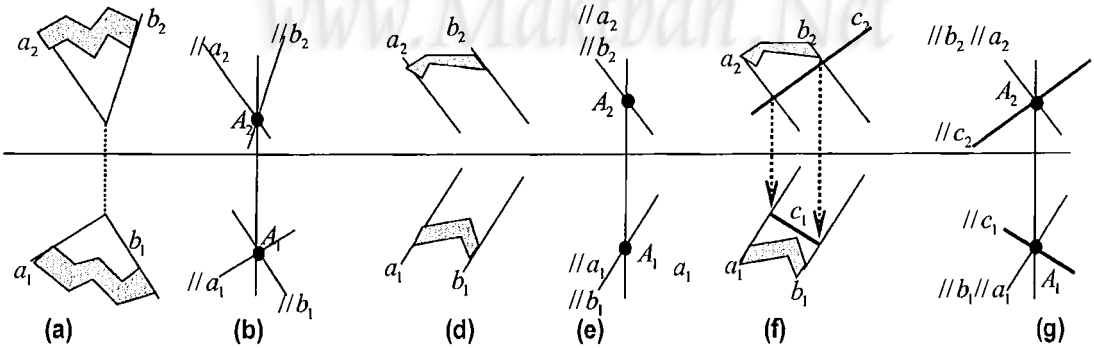

شكل 147




شكل 149

## رسم مستوى ممثل بمستقيمين يوازى مستوى ممثل بمستقيمين من نقطة معلومة

فى شكل **149'** الشكل **(a)** يوضح مستوى مميل بمستقيمين متقاطعين ، ولكى نرسم مستوى يوازيه من نقطة **A** كما فى الشكل **(b)** يتم رسم من هذه النقطة مستقيم **a//** ,ومستقيم **b//** كل منهم مساقطه توازى توازى مساقط كل



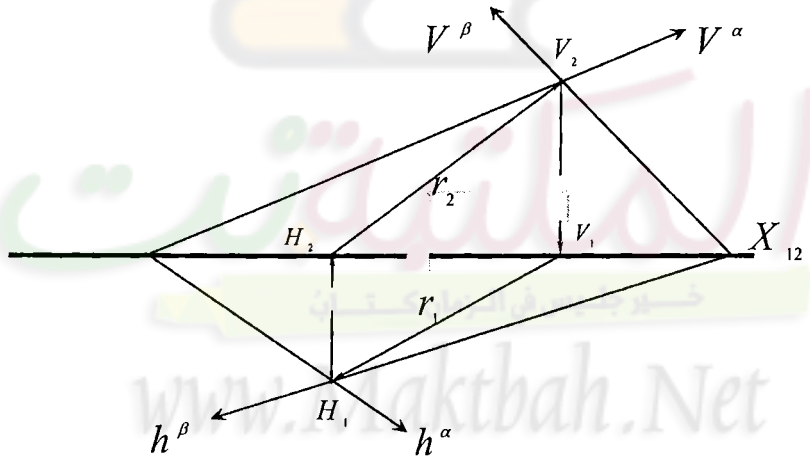

شكل 149'

مستقيم كما هو موضح بالشكل. وفى الشكل (d) المستوى ممثل بمستقيمين متوازيين ولكى نرسم موازى له فى الشكل (e) نجد أن المستقيمن سينطبقا على بعض وبالتالى المستوى فى الشكل (e) ممثل بمستقيم واحد وهذا لايجوز، لذلك نلجأ للشكل (f) حيث نمرر أى مستقيم c داخل المستوى بإستخدام نظرية التوليد حيث نمرر $c_2$ ونستنتج $c_1$، ومن ذلك نرسم من النقطة A موازى للمستقيم c الواقع أيضا فى المستوى كما بالشكل (g)

## 2 - خط تقاطع مستويين

خط تقاطع المستويين ماهو إلا خط واقع فى كلا المستويين ، ومن علاقة المستقيم الواقع فى المستوى بالمستوى أن الأثر الأفقى للمستقيم يقع على الأثر الأفقى للمستوى وكذلك الأثر الرأسى للمستقيم يقع على الأثر الرأسى للمستوى .

ومادام خط التقاطع يقع فى كل من المستويين فإن الأثر الأفقى لخط التقاطع $H_1$ يقع على الأثر الأفقى لكل من للمستويين $h^\alpha$ و $h^\beta$ وكذلك الأثر الرأسى لخط التقاطع $V_2$ يقع على الأثر الرأسى لكل من للمستويين للمستوى $V^\alpha$ و $V^\beta$ . وبذلك يكون معلوم أثار خط التقاطع وعلية نطبق قاعدة معلومية الاثار ومطلوب المساقط ( إسقط عمود ووصل) ونستنتج مساقط خط التقاطع $r_1, r_2$ شكل 150.

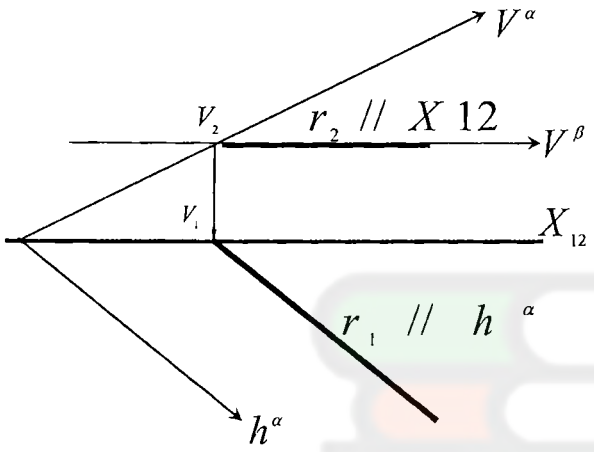



شكل 150

## خط تقاطع مستويين أحدهما يوازى أحد مستويات الإسقاط: يكون مستقيم يوازى نفس مستوى الإسقاط

### 1. خط التقاطع لمستويين أحدهما مستوى أفقى: يكون خط التقاطع مستقيم أفقى

المستوى $\alpha$ وضع عام و المستوى $\beta$ مستوى أفقي، عندما يتقاطع مستوى أفقي مع مستوى في وضع عام فإن خـــط التقاطع يحقق خواص المستويين، حيث أن كل المستقيمات التى تقع فى مستويات خاصة موازيه لمستوى الإسقاط يكون لها نفس خواص هذه المستويات الموازيه لمستوى الإسقاط وبالتالى خط التقاطع يكون مستقيم أفقي شكل **151**وهـــو أيضا يقع فى المستوى العام. وبناء على ذلـــك نرسم خط تقاطع أفقى يحقـــق خـــواص خـــط التقاطع بين المستويين ويحافظ على خواصه من حيث أنه مستقيم أفقى ويقع فى المستوى العام. ونعلم أن المستقيم الأفقى ليس له ســـوى أثـــر رأسي $V_2$ يقع على الأثر الرأسي للمســـتوى الموجود في وضع عام وأثرة الأفقي غير موجود شكل **151** .

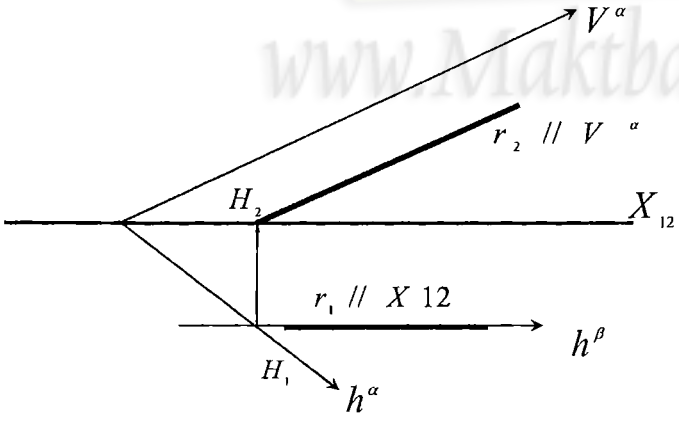



**شكل 151** خط تقاطع مستويين احدهما افقى

حيث المسقط الرأسي لخط التقاطع $\mathbf{r_2}$ موازى لخط الأرض ويقع على الأثر الرأسي للمستوى الأفقي القـــاطع $V^{\beta}$ و المسقط الأفقي $\mathbf{r_1}$ موازى للأثر الأفقي للمستوى العام ويظهر بطولة الحقيقي شكل **151** ويمكن الحـــل بأســـتخدام مستويات مساعدة كما سيتم الشرح قادما.

## 2 . خط تقاطع مستويين أحدهما مستوى وجهى : يكون مستقيم وجهى

عندما يتقاطع مســـتوى وجهـــى مـــع مستوى في وضع عام فإن خط التقاطع يحقق خواص المستويين، حيث *أن كـــل المستقيمات التى تقع فى مستويات خاصة موازيه لمستوى الإسقاط يكون لها نفس خواص هذه المستويات الموازيه لمستوى*

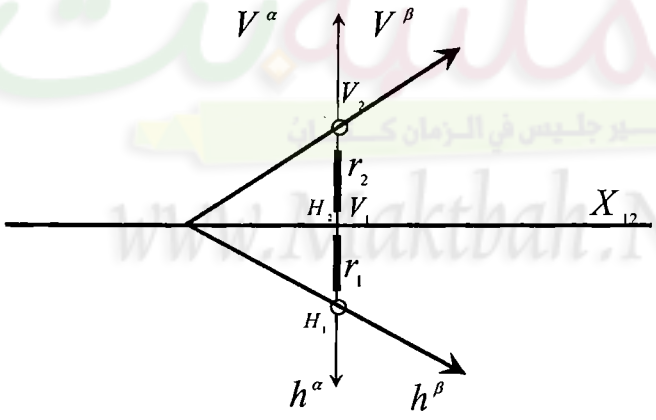



**شكل 152** خط تقاطع مستويين احدهما وجهى

*الإسقاط* وبالتالى خط التقاطع يكون مستقيم وجهى وهو أيضا يقع فى المستوى العام شكل **152**. وبناء على ذلك نرسم خط التقاطع مستقيم وجهى يحقق خواص خط التقاطع بين المستويين ويحافظ عل خواصه من حيث أنه وجهى ويقع فى المستوى العام. فعندما يتقاطع مستوى وجهى $\beta$ مع مستوى عام $\alpha$ فإن الناتج مستقيم وجهي أثرة الافقي $H_1$ يقع على الأثر الأفقي للمستويين العام والوجهى . و المسقط الأفقي لخط التقاطع $r_1$ يقع موازى **X12** في المستوى الأفقي ومنطبق على الأثر الأفقي للمستوى الوجهى $h^\beta$ والمسقط الرأسي لخط التقاطع $r_2$ موازى للأثر الرأسي للمستوى العام ويظهر بطولة الحقيقي .

## 3. خط تقاطع مستويين أحدهما مستوى جانبى فإن خط التقاطع سيكون مستقيم جانبى

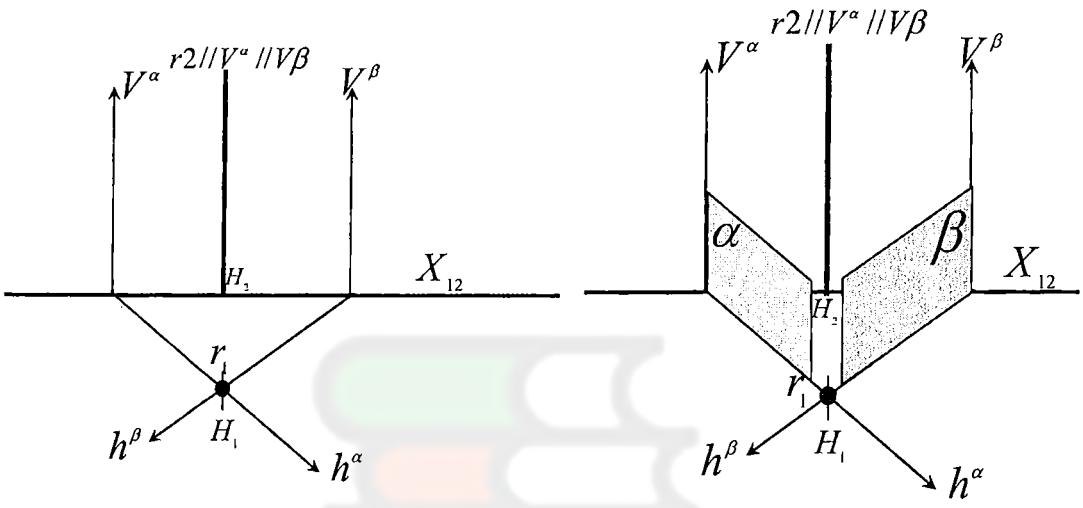
حيث ان كل المستقيمات التى تقع فى مستويات خاصة يكون لها نفس خواص هذه المستويات الخاصة وبالتالى خط التقاطع لمستوى عام مع مستوى جانبى يكون مستقيم جانبى وهو أيضا يقع فى المستوى العام شكل **153**. وبناء على ذلك نبحث عن أثار خط التقاطع التى تحقق خواصه وفى ذات الوقت تحقق خواص خط التقاطع على أثار المستويات المتقاطعة كما يتضح فى الشكل **153** ، نلاحظ أن خط التقاطع سيكون مستقيم جانبى يظهر بطوله الحقيقى فى المستوى الجانبى.




**شكل 153** خط تقاطع مستويين احدهما جانبى

## خط تقاطع مستويين متعامدين على أحد مستويات الإسقاط: يكون مستقيم عمودى على نفس مستوى الإسقاط.

### 1- خط تقاطع مستويين عموديين على المستوى الأفقى يكون مستقيم عمودى على المستوى الأفقى.




**شكل 154**

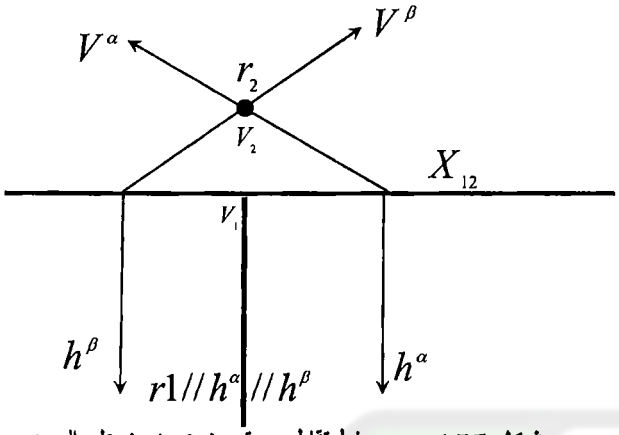
خط تقاطع مستويين عموديين على الأفقى

خط تقاطع مستويين متعامدين على أحد مستويات الإسقاط يكون مستقيم عمودى على نفس مستوى الإسقاط ونقطة إنطلاق خط التقاطع هى نقطة تقاطع خطيى المسقط للمستويين شكل **154**، حيث أن المستويين كل منهم خطى المسقط الأفقى وتقاطعهم فى الأفقى هو نقطة وهى مسقط خط التقاطع فى المستوى الأفقى. إذا نُركز على خواص المستويين العموديين وعلى مكان تواجدهم فى خطى المسقط حتى ننطلق من نقطة تقاطع الخطين. وفى هذه الحالة نتيجه لأن المستويين رأسيين فإن خط التقاطع سيكون مستقيم رأسى أى أن مسقطه الأفقى نقطه وهى نقطة تلاقى الأثار الأفقية للمستويين ويكون مسقطه الرأسى موازى للأثار الرأسية شكل **154**.

*وعامة هناك نتيجة يجب أن نعلمها ألا وهى:* إذا كانت أثار المستويين المتقاطعين متوازية فى أحد مستويات الإسقاط ( الرأسى $\pi_2$ أو الافقى $\pi_1$ أو الجانبى $\pi_3$ ) فإن مسقط خط التقاطع فى نفس مستوى الإسقاط يوازيهم . كما فى شكل **154** فى المستوى الرأسى الأثار الرأسيه للمستويين متوازيه وهى عموديه على الأفقى وبالتالى فإن مسقط خط التقاطع فى الرأسى يوازيهم أى يكون رأسى وهو بذلك مستقيم رأسى ويكون مسقطه الأفقى نقطة. وكذلك فى الحالتين القادمتين. وبالتالى خط التقاطع لأى مستويين نأتى به إما بدراسة خواص المستويين أو بدراسة الأثار. ويمكن إستخدام مستويات إضافية لإستنتاج خط التقاطع وسيتم شرحها فى البنود القادمة.

## 2. خط تقاطع مستويين عموديين على المستوى الوجهى يكون مستقيم عمودى على المستوى الوجهى

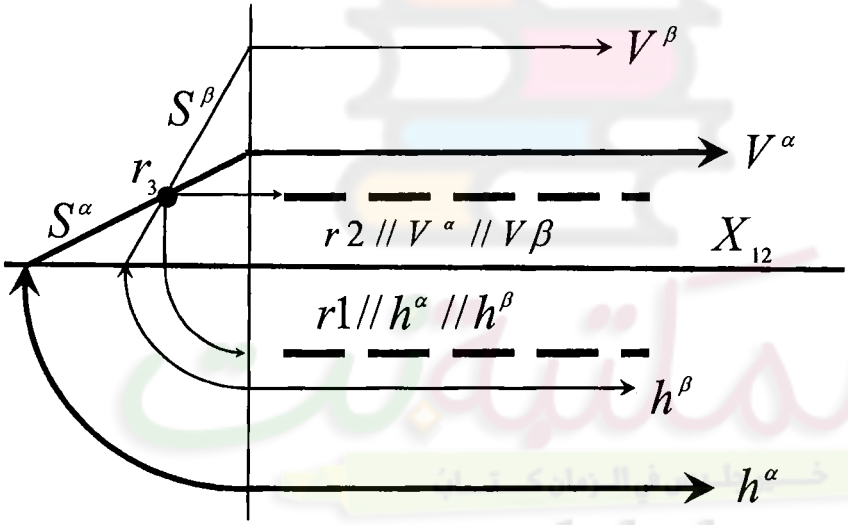
بنفس القاعدة السابقة فى شكل 155يمكن إستنتاج مساقط خط التقاطع فيكون مستقيم عمودى على المستوى الرأسى ويحقق خواص خط التقاطع وعلاقته بأثار المستويين المتقاطعين فيه.




خط تقاطع مستويين عموديين على الوجهى **شكل 155**

## 3. خط تقاطع مستويين عموديين على المستوى الجانبى يكون مستقيم عمودى على المستوى الجانبى

بنفس القاعدة السابقة يمكن إستنتاج مساقط خط التقاطع لمستويين عموديين على المستوى الجانبى شكل 156حيث الأثار الأفقية متوازية فيكون مسقط خط التقاطع الأفقى موازى




**شكل 156** خط تقاطع مستويين عموديين على الجانبى

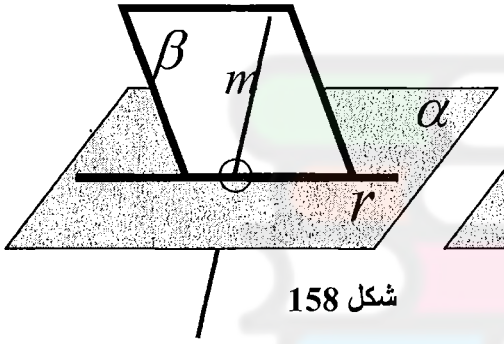
لهم، وأيضا الأثار الرأسية متوازية فيكون مسقط خط التقاطع الرأسى موازى لهم ولكن يبقى نقطة إنطلاق مساقط الخط r . نقطة الإنطلاق هذه لاتظهر إلا فى تقاطع خطى المسقط للمستويين وهى موجودة فى الجانبى لأنهم مستويين عموديين على الجانبى وذلك كما سبق القول أن خط تقاطع أى مستويين عموديين على مستوى الإسقاط يكون مستقيم عمودى على نفس مستوى الإسقاط شكل 156 . ومما تقدم فإن خط التقاطع مستقيم يوازى خط الأرض وعمودى

على المستوى الجانبي أى نقطه فى الجانبى. " خط تقاطع مستويين يوازيا خط الأرض هو مستقيم يوازى خـــط الأرض".

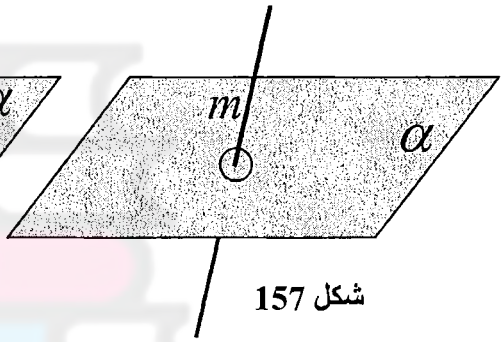
وبذلك يتم الخروج من نقطة تقاطع خطى المسقط فى الجانبى ونرسم مساقط خط التقاطع توازى الأثار شكل 156.

## 3-نقطة تقاطع مستقيم مع المستوى العام

نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى هي النقطة الواقعة على المستقيم وفى المستوى في وقت واحد كما بالشـــكل 157 ولكـــن لتحديدها يتم تمرير أي مستوى جديد بهذا المستقيم (شكل 158) ويكون حينئذ خط تقاطع المستوى الجديد مع المســـتوى القديم هو المحل الهندسي لنقطة التقاطع شكل 158ونحدد أكثر بتقاطع المستقيم الموجود مع خط تقاطع المستويين.

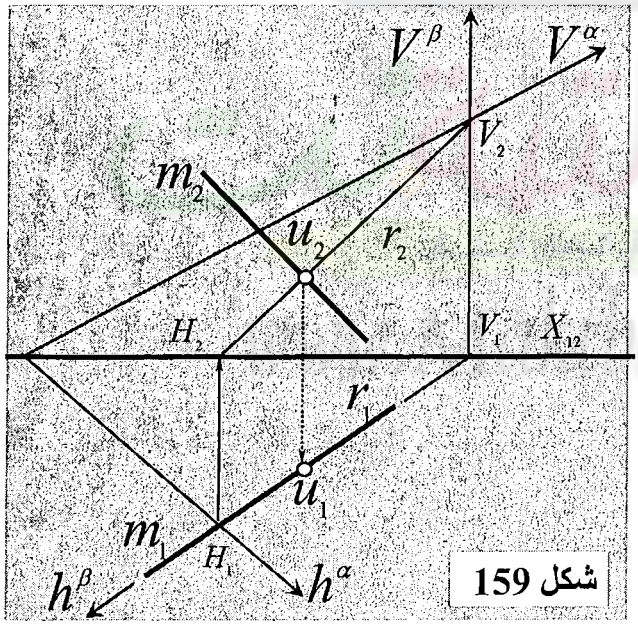


شكل 158



شكل 157

## خطوات تعيين نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى عام:



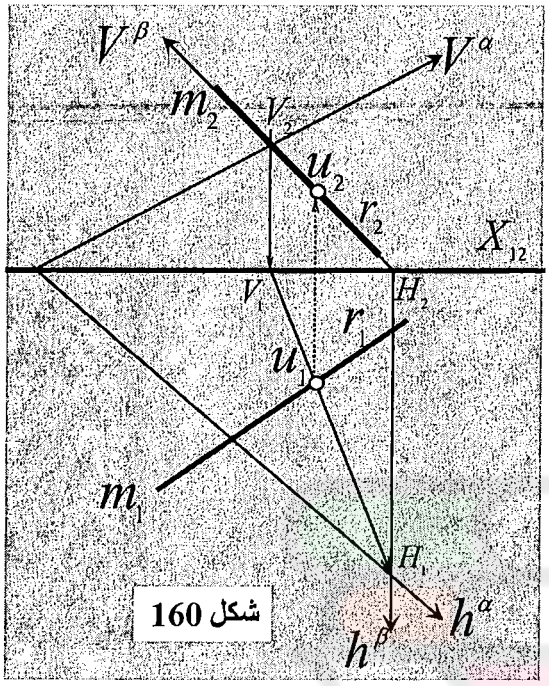
شكل 159

1- نمرر بالمســـتقيم m مســـتوى عمـــودى $\beta$ على $\pi_1$ شكل 159 أو عمودى على $\pi_2$ شكل 160.

2- تعيين خط تقاطع المستوى العمودى مـــع المستوى الموجود يكون r . شـــكل 159 و شكل 160

3- تعيين نقطة تقاطع المستقيم مع خط التقاطع فتكون $m \cap r = U$ هي النقطة المطلوبـــة. شكل 159و شكل 160

ويتم ذكرها كالتالى : نمرر بالمستقيم مستوى خاص فتتحول الحالة لخط تقاطع مستويين، خط التقاطع الناتج هـو الذى يقطع المستقيم الموجود فى نقطه U وهـى نقطة تقاطع المستقيم مع المستوى. فـإذا كـان التمرير ب $m_1$ شكل 159 فإن نقطة التقاطع $U_2$ستظهر على $m_2$ بتقاطعه مع $r_2$ ثم بالتناظر نوجد $U_1$ ، وإذا كان التمرير ب $m_2$ شـكل 160 فإن نقطة التقاطع $U_1$ ستظهر علـى $m_1$ بتقاطعه مع $r_1$ ثم بالتناظر نوجد$U_2$ .



شكل 160

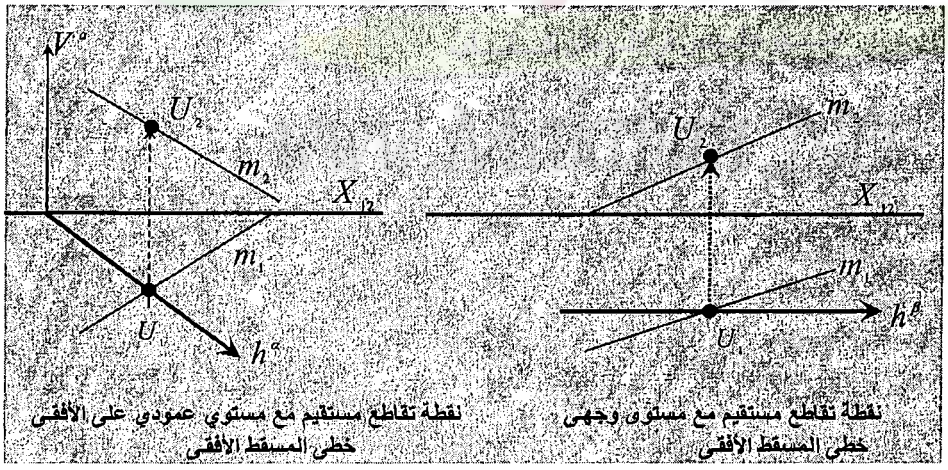
ولابد أن نركز فى الخطوات جيدا ونحفظ ترتيبها حتى تسهل دائما الحل.

## نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى خطى المسقط

نتيجة: نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى خطى المسقط تظهر مباشرة فى مكان خطى المسقط

### 1. نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى خطى المسقط الأفقى العمودى على المستوى الأفقى تظهر مباشره على المستوى الأفقى

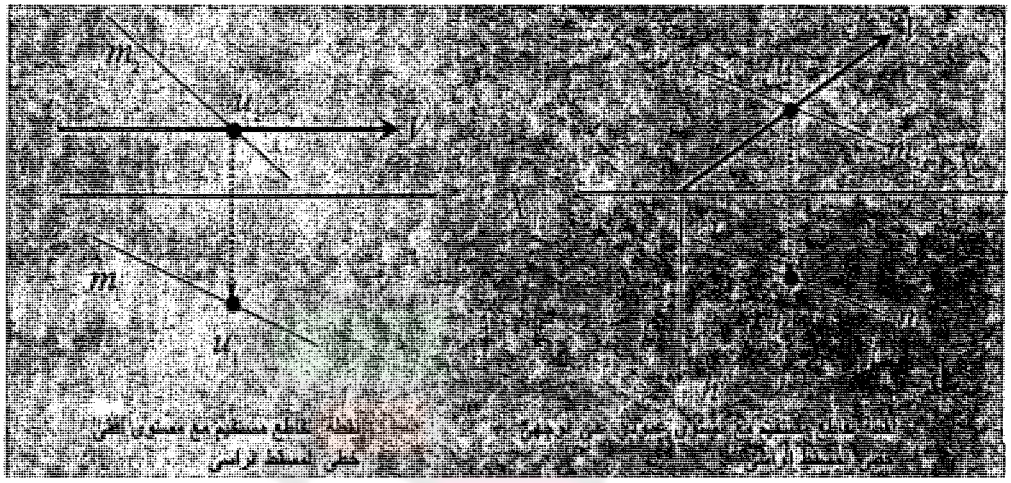
فى تقـــاطع المستقيم مع خطى المسقط الأفقـى. شـــكل 161 يوضـــح نقطـــة تقاطع المســـتقيم مـــع مســـتوى



شكل 161 شكل 162

عمودى على المستوى الأفقى (خطى المسقط الأفقى)، شكل 162يوضح نقطة تقاطع المستقيم مع مستوى وجهى عمودى على المستوى الأفقى (خطى المسقط الأفقى).

## نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى خطى المسقط الرأسى (العمودى على المستوى الرأسى)

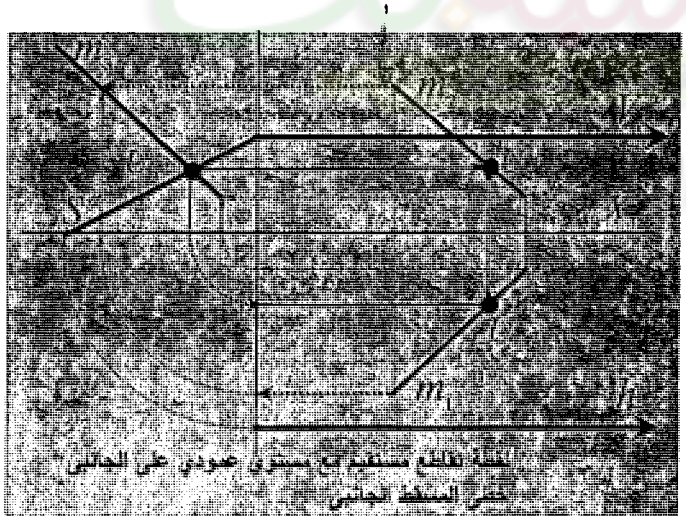


شكل 163



شكل 164

نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى خطى المسقط الرأسى العمودى على المستوى الرأسى تظهر مباشره فى المستوى الرأسى على تقاطع المستقيم مع خطى المسقط الرأسى. شكل 163 يوضح نقطة تقاطع المستقيم مع مستوى عمودى على المستوى الرأسى (خطى المسقط الرأسى)، شكل 164يوضح نقطة تقاطع المستقيم مع مستوى أفقى عمودى على المستوى الرأسى (خطى المسقط الرأسى).



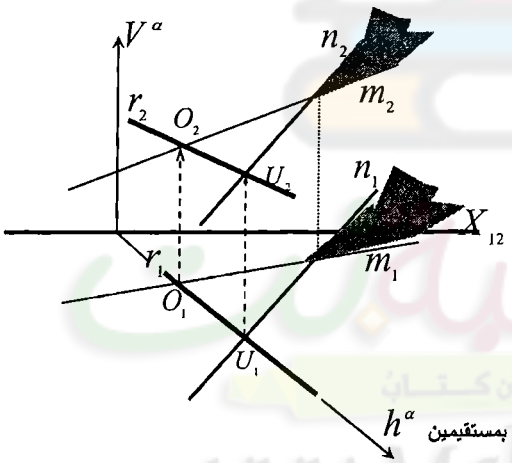
شكل 165

## 3. نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى خطى المسقط الجانبى العمودى على المستوى الجانبى ( المستوى الموازى لخط الأرض ، المستوى الذى يمر بخط الأرض، مستوى التماثل ،مستوى الإنطباق، الموازى للتماثل، الموازى للإنطباق )

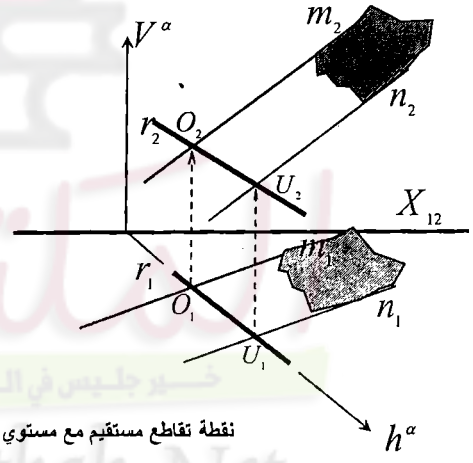
كل هذه المستويات المذكورة لها نفس الخاصيه، عموديه على المستوى الجانبى شكل 165، خطية المسقط الجانبى "قـــى الثلاثات" أى أن نقطة تقاطعها مع أى مستقيم تظهر فى الثلاثات أى فى المسقط الجانبى ، وعليه فدائما نذهب بالمستقيم لمسقطه الجانبى ثم نوجد نقطة التقاطع ونعود بها. ومن كل ماتقدم فسوف نستغل هذه الخاصية لخطى المسقط فى إيجـــاد خط تقاطع مستويين وكذلك نقطه تقاطع مستقيم مع مستوى ولكن سيكون المستوى ممثل بمستقيمين .

## خط تقاطع مستويين أحدهما مستوى خطى المسقط والأخر ممثل بمستقيمين (بمجرد النظر)

الفكرة: لنأتى بخط تقاطع مستويين بهذا الشكل نأتى بنقطة تقاطع كل مستقيم مع المستوى ثم نصل النقطتين فيكونا خط تقاطع المستويين شكل 166 وشكل 167. ونتيجة لأن المستوى الأول خطى المسقط فإن نقطة تقاطع كل مستقيم مـــع هذا المستوى الخطى المسقط تظهر مباشرة فى إتجاه خطى المسقط. لذلك فالحل يكون أسهل مايمكن فى شكل 166 شكل 167حيث ننظر لنقطتى التقاطع الظاهرين بمجرد النظر $O_1$, $U_1$ وهما $r_1$ على خطى المسقط نصعد بهم فنوجد مسقط




شكل 166

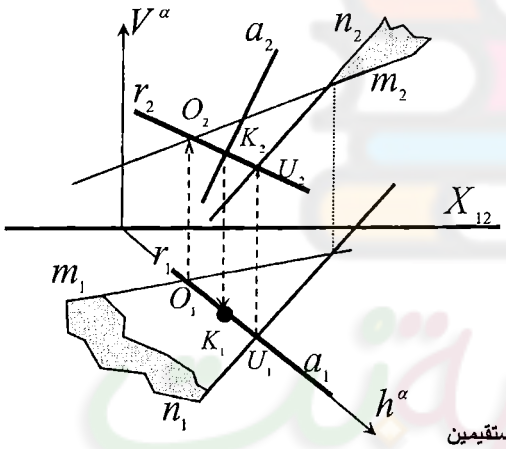



شكل 167

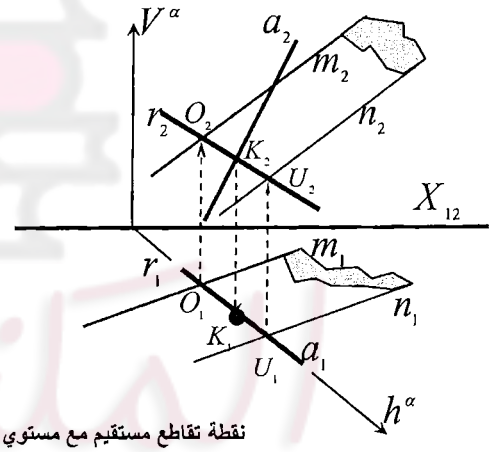
خط التقاطع $O_2$ $U_2$ وهما $r_2$. وكما بالأشكال الموضحة فإن هذا يتم للمستوى الممثل بمستقيمين سواء متوازيين شكل 167 أو متقاطعين شكل 166. وكما ترى أن الحل أصبح بمجرد النظر على نقطتي التقاطع الظـــاهرين حيـــث نـــأتى بمساقطهم بالتناظر ونوصلهم فينتج خط التقاطع . أى أن الحل يتلخص فى = صعود نقطتين.

## نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى ممثل بمستقيمين (متقاطعين أو متوازيين)

من نفس الخطوات العامة فى تحديد نقطة تقاطع مستقيم مع المستوى العام، حيث نمرر بالمستقيم مستوى خاص فتتحول الحالة لخط تقاطع مستويين،وكذلك من الحالة السابقة، يتم نفس الإسلوب ولكن أسهل حيث أنـــه بمجـــرد أن نمـــرر بالمستقيم مستوى خاص (خطى) فتتحول الحالة لخط تقاطع مستويين وهى الحالة السابقة حيث أن أحد المستويين خطى المسقط وبالتالى سهل أن نوجد خط التقاطع بنفس الإسلوب السابق ومن ثم نوجد نقطة تقاطع المستقيم مع خط التقاطع فتكون نقطة تقاطع المستقيم مع المستوى كما بالشكلين **168**و **169**، وقد راعينا أن تكون الحالتين موجودتين فى تمثيل المستوى سواء كان بمستقيمين متوازيين شكل **169** أو متقاطعين شكل **168**. أى أن الحل أيضا يتلخص فى = صعود نقطتين –توصيل – نزول نقطة.




شكل 168

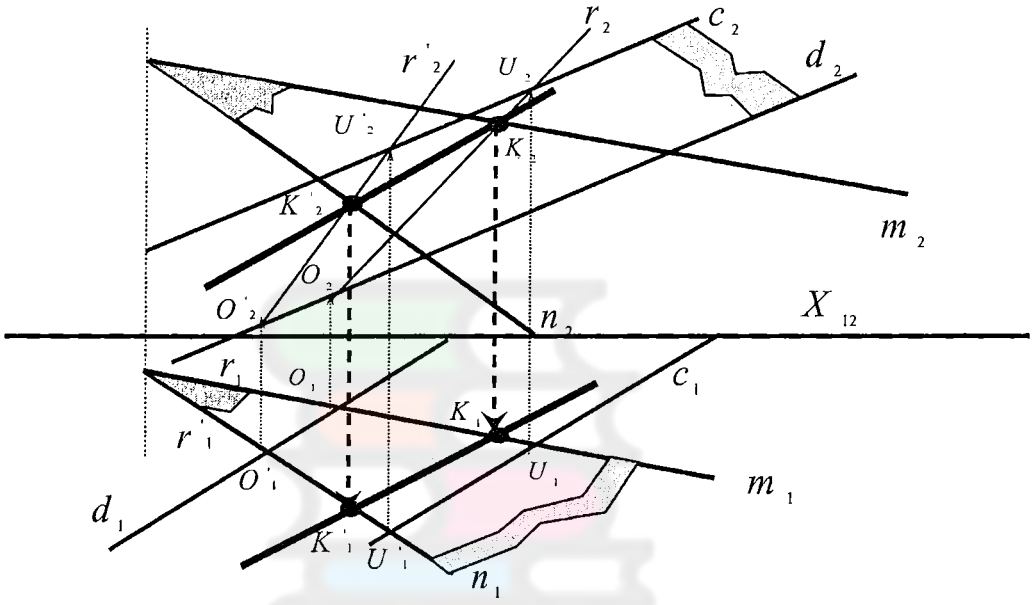



نقطة تقاطع مستقيم مع مستوي ممثل بمستقيمين

شكل 169

www.Maktbah.Net

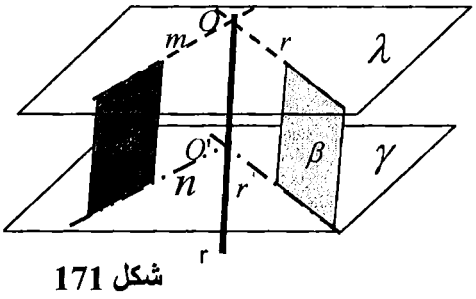
## خط تقاطع مستويين كلاهما ممثل بمستقيمين " بإستخدام إسلوب نقطه تقاطع مستقيم مع المستوى العام"




**شكل 170** خط تقاطع مستويين كل منهما معثل بمستقيمين

الحل الأول: كما بالشكل **170** نأخذ أحد المستويات الممثل بمستقسمين **c,d** ، ونوجد نقطة تقاطع كل مستقيم منهم مع المستوى الأخر بأسلوب البند السابق وماقبله، ثم نصل نقطتى التقاطع، حيث نوجد نقطة تقاطع $m$ معع المستوى الممثل بالمستقيمين المتوازيين **c,d**ونجد أنها **K**، ثم أيضا نقطه تقاطع $n$مع نفس المستوى الممثل بالمستقيمين المتوازيين **c,d**ونجد أنها **K'**، ثم نصل نقطتى التقاطع **KK'** فيكون خط التقاطع. وهناك أُسلوب أخر للحل سيتم عرضه بعد البند القادم. وبالتالى فإن فكرة الحل هى تكرار نفس إسلوب البند السابق مرتين وهو = صعود نقطتين –توصيل – نزول نقطة. مرة على المستقيم **m** فنستنتج نقطة تقاطع وأخرى على المستقيم **n** فنستنتج الأخرى ثم توصيل النقطتين فيكون خط التقاطع

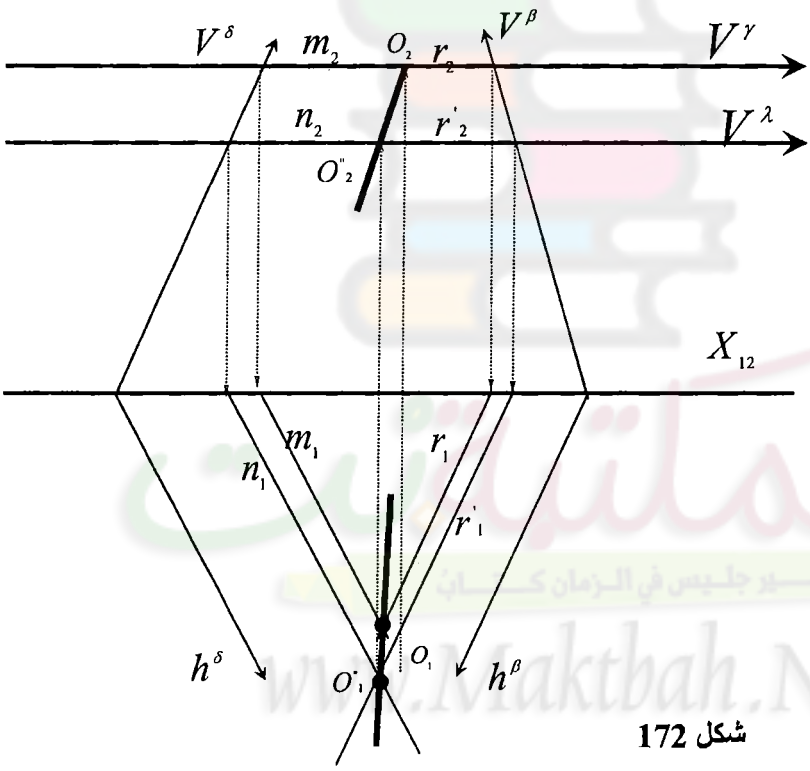
# خط تقاطع مستويين بإستخدام مستويات مساعدة




شكل 171

1- خط تقاطع مستويين أحد أثارهم لاتتلاقى فى حدود الورقة

كما يتضح فى الشكل الفراغى شكل 171 أن كل من المستويين $\alpha, \beta$ لايتقاطعا وعليه فإننا لو إستطعنا إيجاد أى نقطتين على خط التقاطع **O,O'** وتم توصيلهم يكون هو خط التقاطع **r**. ونيجة لإستحالة تلاقى الأثار، نستخدم مستويات مساعده ، حيث نمرر مستوى أفقى إضافى $\lambda$ يقطع كل من المستويين فى خط كما بالشكلين171و 172 الموضح فيكون الخطين **m,r** هذين الخطين يتقاطع إمتدادهما فى نقطة **O** وهى نقطة على خط التقاطع. ونكرر ذلك بإستخدام المستوى المساعد الأخر $\gamma$ شكل 171و172 حيث ينتج خطى تقاطع **n,r'** ويتقاطعا فى **O'** نقطة أخرى على خط التقاطع. بتوصيل **OO'** هو خط تقاطع المستويين.




شكل 172

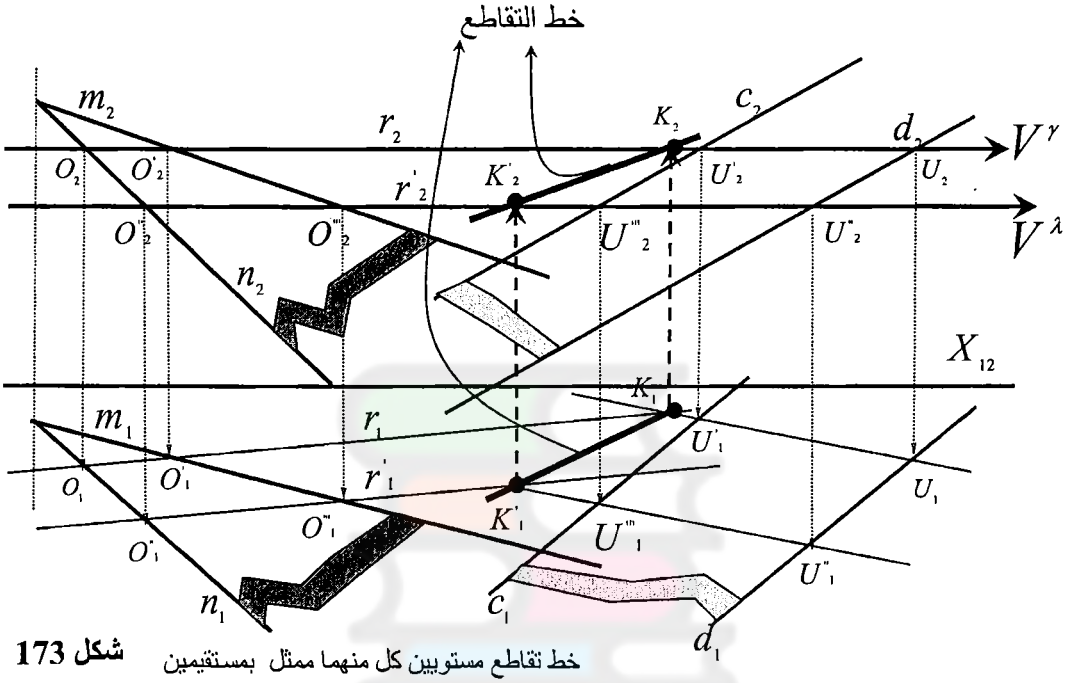
خط تقاطع مستويين لاتتلاقى فى حدود الورقة

تنبيه: المستقيمان الناتجة من التقاطع وهى **m,n,r,r'** مستقيمان أفقية لأنها موجودة داخل مستويات أفقية $\lambda$ و $\gamma$ ولو تم إستخدام مستويات وجهية ستكون خطوط التقاطع مستقيمات وجهية (كما سبق فى البنود الأولى فى إيجاد خط تقاطع مستويين ).

www.Maktbah.Net

دكتور مهندس/ أحمد محمد القصاص

## 2- خط تقاطع مستويين كلاهما ممثل بمستقيمين ' بإستخدام إسلوب خط تقاطع



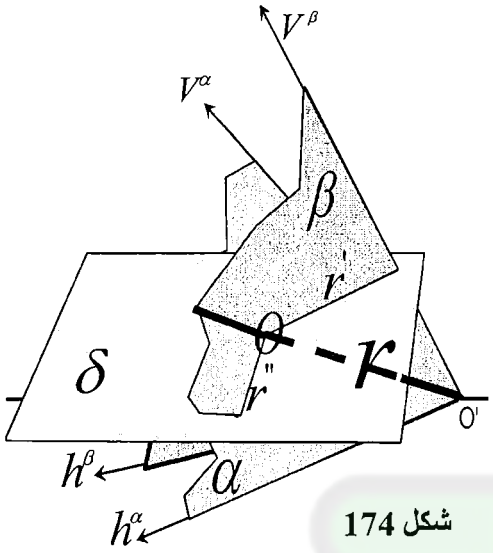

**شكل 173** خط تقاطع مستويين كل منهما ممثل بمستقيمين

### مستويين'

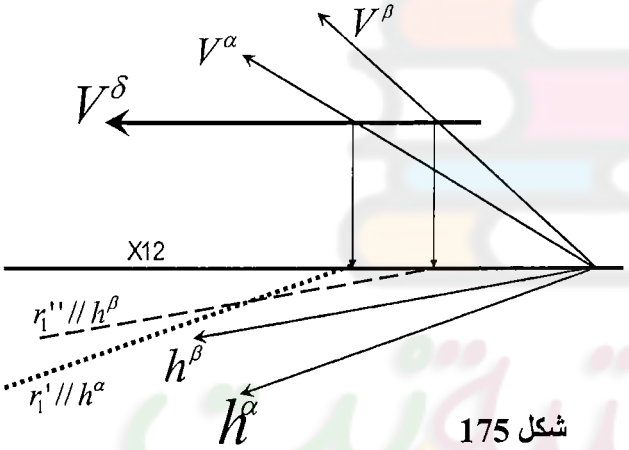
بنفس الإسلوب السابق حيث أنها نفس الحالة السابقة ولكن المستوى ممثل بمستقيمين ، وبإستخدام مستويات مساعدة أفقية أو وجهية ، وفى الشكل الموضح **173** تم إستخدام مستويين أفقيين. نمرر المستوى الأفقى الأول $V^\gamma$ على أى إرتفاع فيقطع المستوى الممثل بالمستقيمين **c,d** فى المستقيم **UU'** (مستقيم أفقى ) و يقطع المستوى الممثل بالمستقيمين **m,n** فى المستقيم **OO'** (مستقيم أفقى ) هذين الخطين مساقطهم الأفقية تتقاطع فى نقطة **K** نوجد مسقطها الرأسى على المساقط الرأسية لخطوط التقاطع. نكرر نفس الإسلوب بتمرير مستوى أخر $V^\lambda$ يقطع كل من المستويين فى خط، الخطين يتقاطعا فى نقطة **k'**، نوجد مسقطها الرأسى على المساقط الرأسية لخطوط التقاطع. نصل النقطتين **k,k'** فيكون خط التقاطع، شكل **173**.

## خط تقاطع مستويين أثارهم تتلاقى فى نقطة واحدة على خط الارض

مستويين متقاطعين فى نقطة واحدة على خط الارض شكل 174 يعنى أنه معلوم نقطة على خط التقـــاطع وهـــى **O'** وبالتالى يبقى نقطة على خط التقاطع ونتيجة لأننا لو مررنا مستوى خاص $\delta$ أشكال **174**و **175** فإنه يقطع كل من المستويين فى خط، هذين الخطين **r'', r'** يتقاطعا فى نقطـــة على خط التقاطع **O** شكل **175**، خطى التقاطع ينتجـــا من: المستوى $\alpha$ مع المستوى $\delta$ هو **r'** ، المستوى $\beta$ مع المستوى $\delta$ هو **r''** . الخطين يتقاطعا فى **O** نصلها بنقطه تقاطع المستويين **o'** فى كل مـــن المسقط الافقى والرأسى فيكون مسقطى خـــط التقاطع **r** ، أشكال**174**و **175**. شكل **176** يوضح الشكل النهائى لخط التقاطع فى كل من المسقطين الرأسى والأفقى.

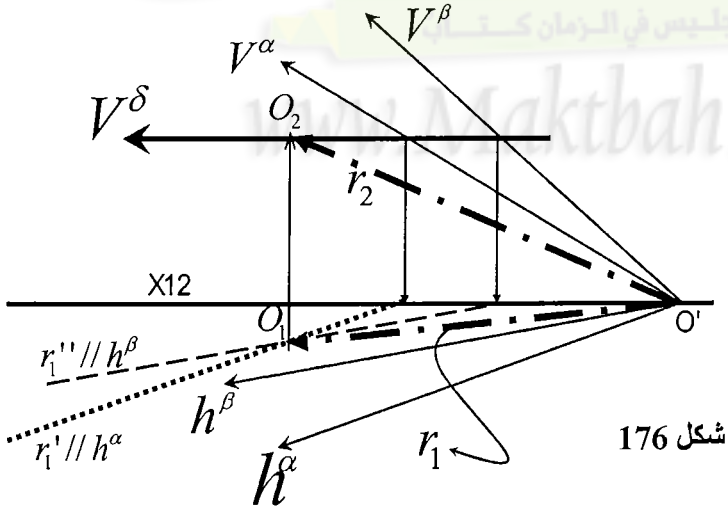



شكل 174




شكل 175

ومـــن الشـــكل الفراغـــى **174** نلاحظ أن الـــثلاث مســـتويات تقاطعوا فى نقطة واحدة وهى **O'** . وهذه من النتائج الهامـــة أن أى ثلاث مستويات لاتحمـــل نفـــس الصفه تتقاطع جميعهـــا فى نقطـــة واحدة.

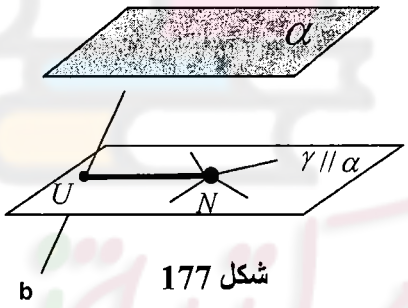



شكل 176

**مثال: المعلوم نقطة N(9,3,3) والمستقيم [ A(4,0,2) , B (11,7,6)] b ومستوى $(16,60^0,135^0)$ $\alpha$ والمطلوب تعين المستقيم d والذى يمر بنقطة N ويقطع b ويوازى $\alpha$ ، أذكر الحل الفراغى ومثل بالاسقاط**

الحل:

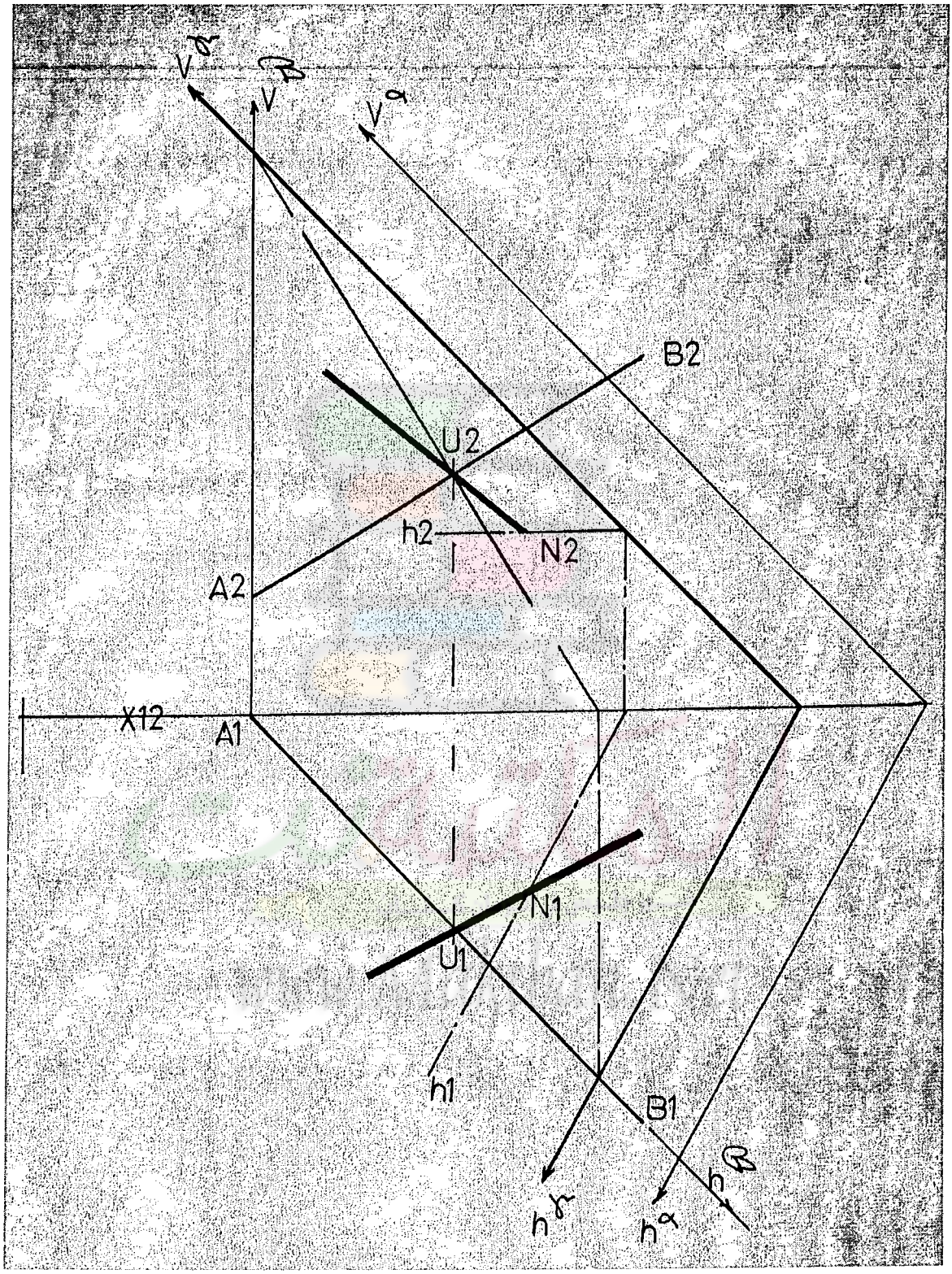
المطلوب مستقيم قاطع يمر بالنقطة N ويوازى المستوى $\alpha$ ، ويجب أن نعلم أنه لايوجد فى الهندسة الوصفيه عملية رسم مستقيم يوازى مستوى لان شرط أن يوازى مستقيم مستوى هى أن يوازى مستقيم بداخل المستوى. ونتيجة لان المستوى يحمل ملايين المستقيمات فإن عملية رسم مستقيم يوازيه ليست محدده لأننا لانعرف سنرسم موازى لأى من المستقيمات فى المستوى شكل 177 .لذلك تكون الفكرة رسم مستوى يوازى المستوى من هذه النقطه ويكون هذا هو الحل الهندسى لكل المستقيمات التى توازى المستوى المطلوب ويتوقف إختيار المستقيم الموازى على شرط أخر يكون مطلوب للحل فيتحدد عليه المستقيم المطلوب.




**شكل 177**

خطوات الحل الوصفى: شكل **178**

1. *من نقطة N نرسم المستوى $\gamma$ يوازى المستوى $\alpha$*
2. *نوجد نقطة تقاطع المستقيم b مع المستوى $\gamma$ وهى نقطة U*
3. *نصل نقطة N بنقطة U فيكون هو القاطع الموازى للمستوى $\alpha$*



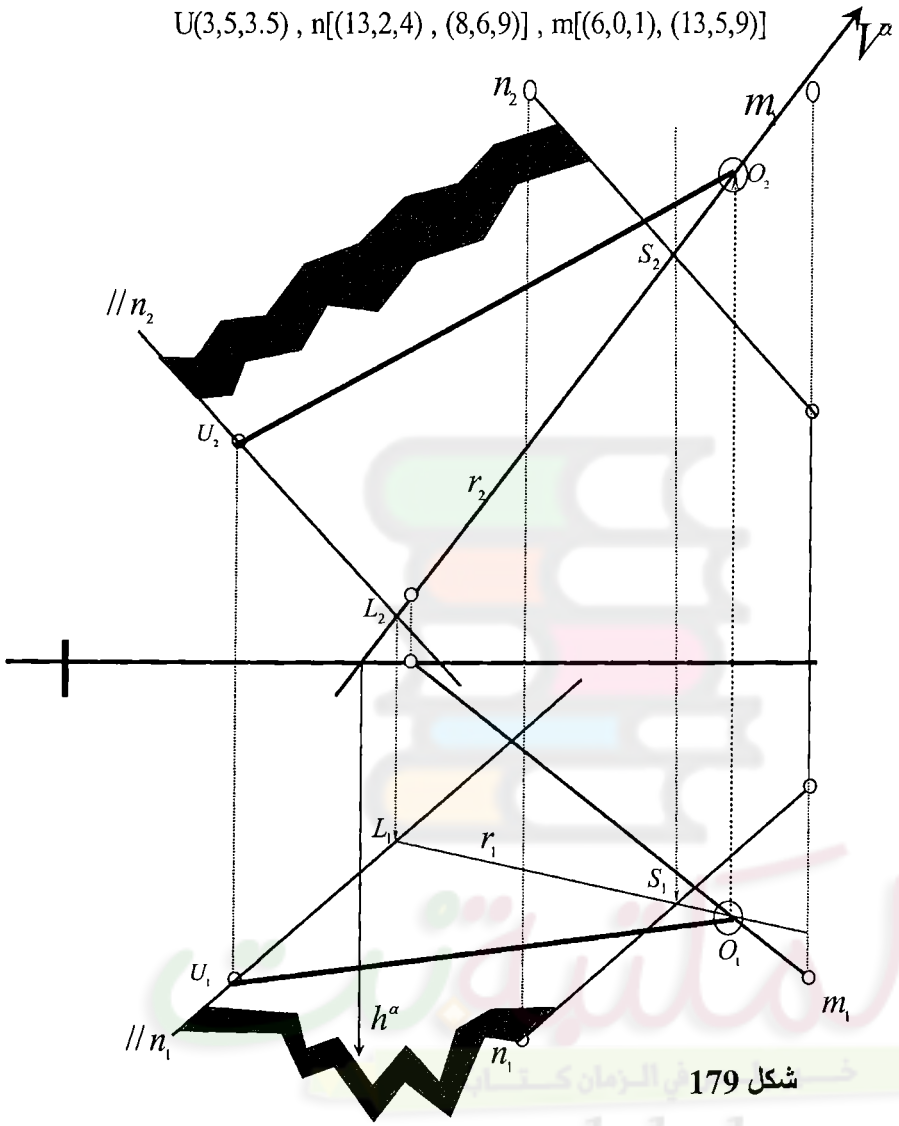

شكل 178

## قاطع لمستقيمين شماليين ويمر بنقطة معلومة

الحل:

عين قاطع لمستقيمين شماليين m,n بحيث يمر بنقطة U اذا كان

U(3,5,3.5) , n[(13,2,4) , (8,6,9)] , m[(6,0,1), (13,5,9)]




شكل 179

1-نكون من النقطة $U$ وأحد المستقيمات مستوى (وذلك برسم موازى للمستقيم من النقطه U فيكون المستوى ممثل بمستقيمين متوازيين ويمكن أيضا أن يكونوا متقاطعين بأن نصل نقطة U بأى نقطة على المستقيم) شكل 179، وفى هذه الحالة نكون من $U$ والمستقيم $n$ مستوى وذلك برسم مستقيم //n من U فيكون المستوى ممثل بمستقيمين متوازيين شكل 179.

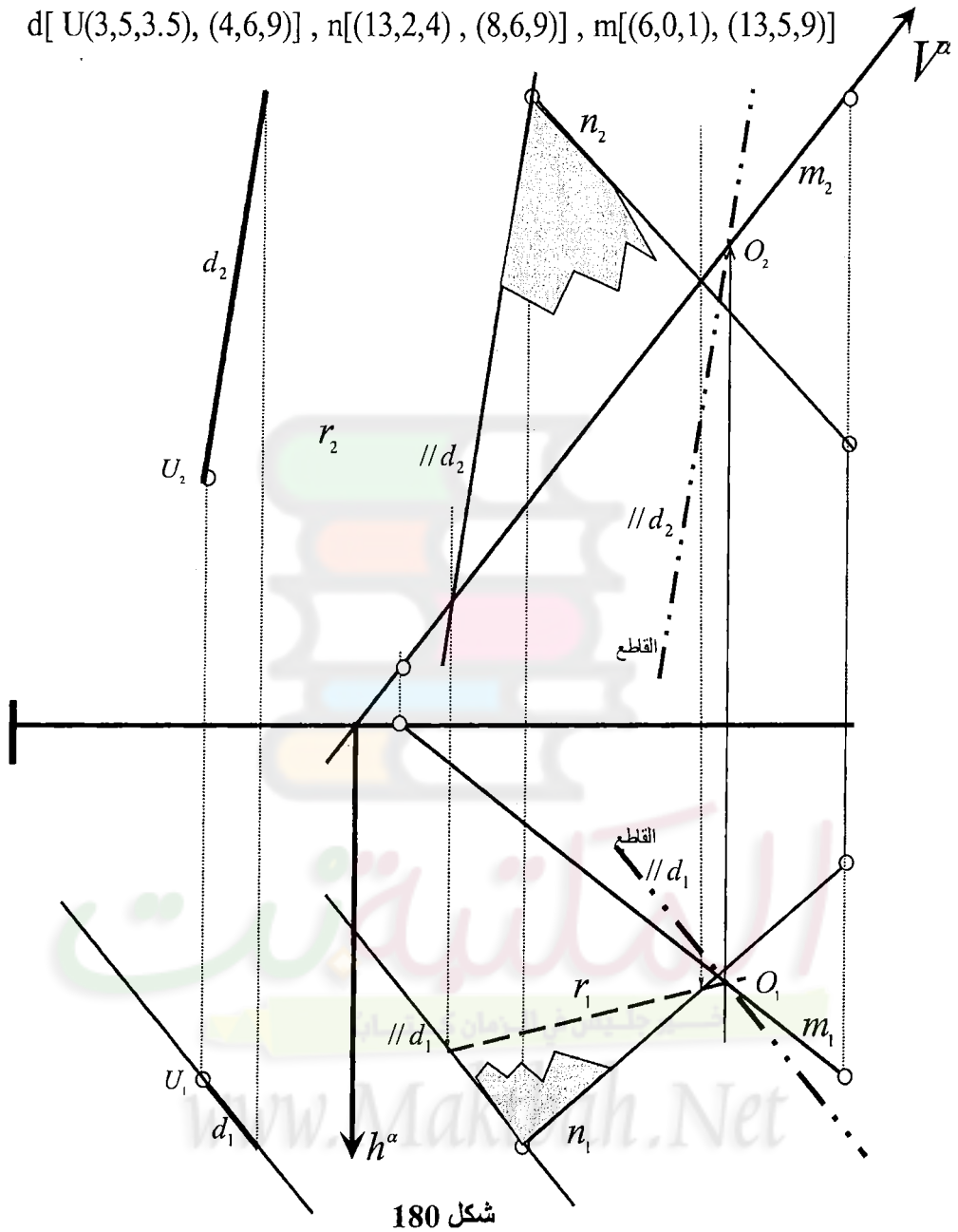
2-نوجد نقطة تقاطع المستقيم الاخر وهو $m$ مع المستوى الجديد، بأن نمرر بالمستقيم مستوى خاص ، حيث نمرر ب $m_2$ مستوى $\alpha$ عمودى على المستوى الرأسى فتتحول الحالة لخط تقاطع مستويين و°نوجد خط التقاطع بأستخدام أسلوب التقاطع الخاص بخطى المسقط حيث نوجد $L_2$, $S_2$ ومن ثم بالتناظر نوجد $S_1$,$L_1$ ويكون هذا هو $r_1$ والذى يقطع $m_1$ فى $O_1$.شكل 179

3- نصل $U$ ب $O$ ونمده فيقطع المستقيم الاخر فيكون هذا هو القاطع المطلوب .

## قاطع لمستقيمين شماليين ويوازى إتجاه معلوم

عين قاطع لمستقيمين شماليين m,n بحيث يوازى الإتجاه d اذا كان

d[ U(3,5,3.5), (4,6,9)] , n[(13,2,4) , (8,6,9)] , m[(6,0,1), (13,5,9)]




**شكل 180**

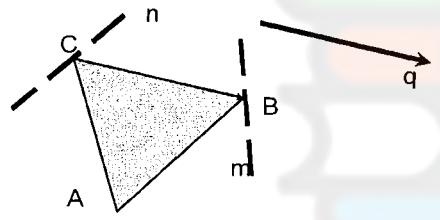
الحل: **1**–نكون من أحد المستقيمات وليكن **n** والإتجاه الموازى **d** مستوى (وذلك برسم موازى للإتجاه **d** مـــن أى نقطه على المستقيم **n** فيكون المستوى ممثل بمستقيمين متقاطعين هما **n** والموازى للإتجاه **//d**) شكل **180**

2-نوجد نقطة تقاطع المستقيم الأخر وهو $m$ مع المستوى الجديد المكون من n والموازى للإتجاه //d وهى نقطة O بأن نمرر من $m_2$ مستوى عمودى فتنتج نقطة التقاطع على $m_1$. شكل 180

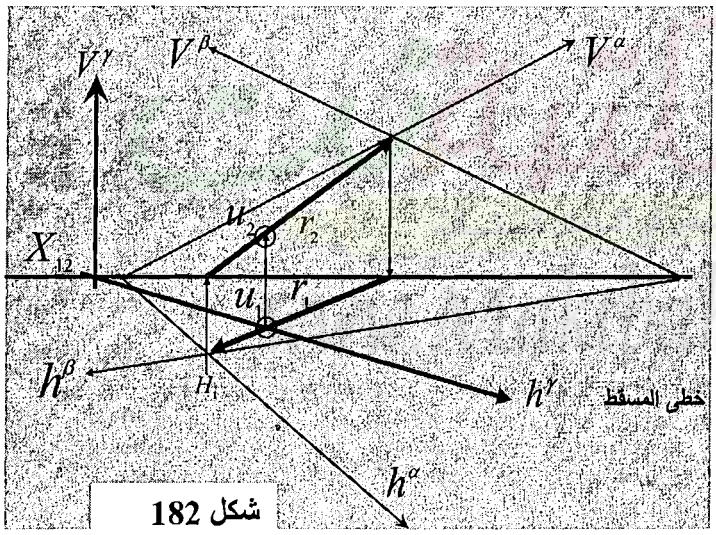
3- من $O$ نرسم موازى للإتجاه فيكون هذا هو القاطع المطلوب الموازى للإتجاه المعلوم ويقطع المستقيمين، ونلاحظ أنه يقطع المستقيمين على نفس نقطتى التناظر فى المستقيمين شكل 180. *بنفس الإسلوب يمكن حل المثال الاتى:*

**مثل المثلث الذى فيه A(5,6,0.5) والضلع BC يوازى المستقيم q وتقع نقطة B على المستقيم m ونقطة C تقع على المستقيم n. ,q[R(12,2,2), O(9,1,3)] M [ N(10,5,0.5), F(6,0,5)], n[P(5,2,3.5), Q(0,4,0)]**

الحل: الضلع BC يوازى المستقيم q والمستقيمان m,n مستقيمان شماليان شكل 181، بالتالى BC هو قاطع لمستقيمين شماليين ويوازى إتجاه معلوم هو q. لذا يتم حل المثال على أنه قاطع لمستقيمين شماليين m,n ويوازى إتجاه معلوم هو q والقاطع للمستقيمين يكون هو المستقيم BC حيث تكون Bعلى m والنقطه Cعلى n.



شكل 181



شكل 182

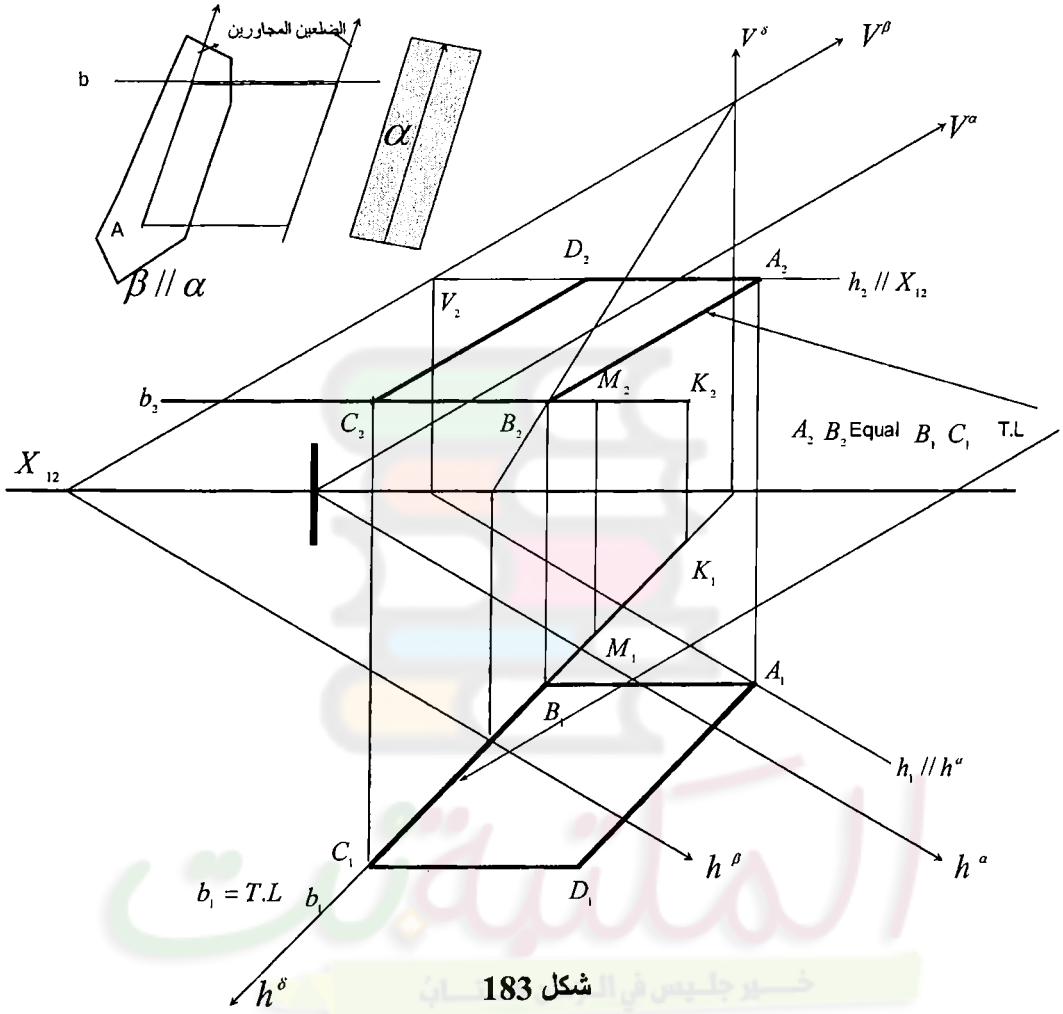
## عين النقطة المشتركة بين الثلاث مستويات $\alpha, \beta, \gamma$

الحل: أى ثلاث مستويات عامة تتقاطع فى نقطة واحدة شكل 182، حيث يتقاطع اى مستويين فى خط ، هذا الخط يتقاطع مع المستوى الثالث فى نقطة، أو بنظرة أخرى كل مستويين يتقاطعا فى خط وبذلك يتقاطع الخطين فى نقطة.

فى شكل 182 يوضح الأتى: $\beta \cap \alpha = r$ ثم $r \cap \gamma = U$.

مثل المعين ABCD حيث رأسة ( A(9.5, 4, 4.5 ، ويقع أحد اضلاع المعين BC على المستقيم b [ K(8,1,2), M(6,3,2) ] والضلع AB يوازي المستوى $\alpha$ $(0,150^0,30^0)$

الحل:

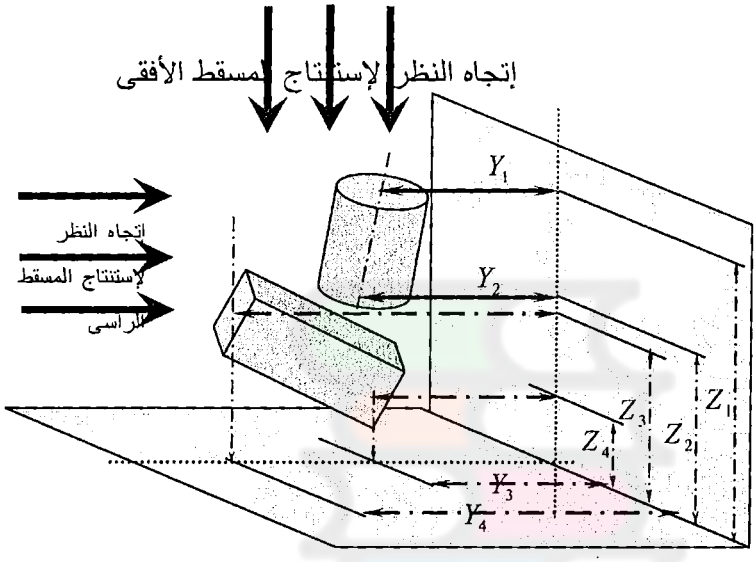



شكل 183

1. من نقطة A نرسم المستوى $\beta$ يوازى المستوى $\alpha$ ويكون المحل الهندسى للضلع BA لأنه يوازى المستوى $\alpha$
2. نقطة تقاطع المستوى $\beta$ مع المستقيم b هى النقطة B شكل 183
3. بقياس الطول الحقيقى للضلع AB على إتجاه الطول الحقيقى للمستقيم b إبتداء من نقطة B نحصل على النقطة C
4. نلاحظ أن المستقيم AB وجهى والمستقيم b أفقى أى أن القياس لأطوال حقيقية على بعضها مباشرة ،شكل 183

## تحديد الظاهر والمختفى فى الإسقاط

من الشكل الفراغى **184** نلاحظ وجود جسمين وهما إسطوانة ومنشور ونريد أن نُسقط الجسمين على المستوى الأفقى والرأسى. وعند الإسقاط على المستوى الأفقى وننظر من أعلى لأسفل فى الإتجاه الموضح، نجد أن الإسطوانة هى تظهر أولا للناظر ومعنى هذا أنها صاحبة أعلى قيمتة للبعد **Z** وخاصة $Z_1$ وهذا الإرتفاع يظهر فى المسقط الرأسى مع أننا نتكلم عن الإسقاط فى المستوى الأفقى. وبالتالى ماتحتها أى صاحب أقل **Z** سيظهر بعدها منقط أى جزء من المنشور سيظهر مختفى تحت الإسطوانة فى المسقط الأفقى. وبالتالى نتعلم هذه النتيجة: أننا لكى نعرف الظاهر والمختفى فى الأفقى ننظر على المسقط الرأسى ونرى الأعلى أى أكبر **Z** فهذا يعنى أنها ظاهرة فى الأفقى والأقل مختفية.




شكل 184

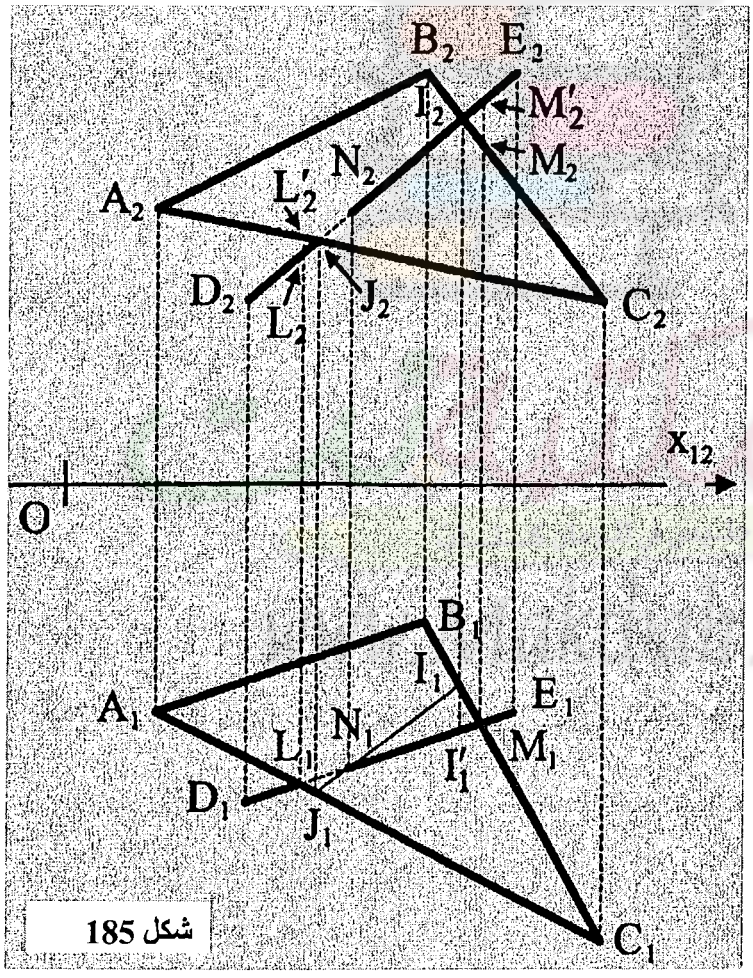
ثانيا: عند الإسقاط على المستوى الرأسى وننظر من الشمال لليمين عمودى على المستوى الرأسى فى الإتجاه الموضح شكل **184**، نجد أن المنشور يظهر أولا للناظر ومعنى هذا أنه صاحب أعلى قيمتة للبعد **Y** وخاصة $Y_4$ وهذا البعد أمام المستوى الرأسى يظهر فى المسقط الأفقى مع أننا نتكلم عن الإسقاط فى المستوى الرأسى. وبالتالى مابعدها أى صاحب أقل **Y** سيظهر بعدها منقط أى جزء من الإسطوانة سيظهر مختفى تحت المنشور فى المسقط الرأسى. وبالتالى نتعلم هذه النتيجة: أننا لكى نعرف الظاهر والمختفى فى الرأسى ننظر على المسقط الأفقى ونرى أكبر **Y** فهذا يعنى أنها ظاهرة فى الرأسى والأقل مختفية.

ولقد إبتكرنا هذا الشكل ليوضح للطالب طبيعة إسقاط الأجسام وترتيب الإسقاط وكذلك معرفة الأسباب لظهور بعض الأجزاء من الشكل وإختفاء الأخر. ولم نوضح الإسقاط على المستويات حتى تظهر الفكرة والخطوط واضحة.

**عين نقطة تقاطع المستقيم l=DE مع المثلث ABC ثم حدد الظاهر والمختفى حيث: A(1,2.5,3), B(4,1.5,4.5), C(6,5,2), D(2,3.5,2), E(5,2.5,4.5)**

الحل:

لتحديد نقطة التقاطع نتبع الإسلوب التقليدى حيث نمرر بالمستقيم مستوى خاص وفى هذه الحالة سنستخدم مستوى عمودى على المستوى الرأسى (خطى المسقط الرأسى ) ، فتتحول الحالة لخط تقاطع مستويين ونستنتجه مباشره من على خطى المسقط ثم نوجد مسقطه الأفقى وهو **IJ=r** ، خط التقاطع **IJ** مسقطة الافقى يقطع المستقيم**DE** فى نقطه ، هى نقطة تقاطع المستقيم مع مستوى المثلث وهى **N** شكل 185.



شكل 185

**الظاهر والمختفى**

بالنسبة للظاهر والمختفى يظهر ذلك على جزء من المستقيم ، حيث يكون جزء من المستقيم فوق مستوى المثلث والأخر تحت مستوى المثلث وذلك إبتداء من نقطة تقاطعه مع المستوى.. وتحديد الظاهر والمختفى يكون بتحديد جزء المستقيم الذى يعلو مستوى المثلث ويتم ذلك فراغيا كما تم فى شكل 184

ووصفيا يحدد كالأتى: لو أن جزء من المستقيم أمام جزء من المثلث بالنسبة لمن ينظر على المستوى الرأسى فإنه يرى أولا جزء المستقيم فهذا يعنى أن المستقيم أقرب للناظر وأبعد بالنسبه للمستوى الرأسى عن المثلث ، أى أن بعد جـزء المستقيم فى الإتجاه Y أكبر من بعد جزء من المثلث عن المستوى الرأسى. وكذلك أيضا بالنسبة للمستوى الأفقى ولكن التحديدسيتم على البعد Z .

ولتحديد ذلك وصفيا نأخذ إما الجزء قبل أو بعد نقطة التقاطع ونأخذ معه أحد أضلاع المثلث الذى تقـاطع معـه فى المسقط. ، ويتحدد ذلك فى كل مسقط مستقل عن الأخر.

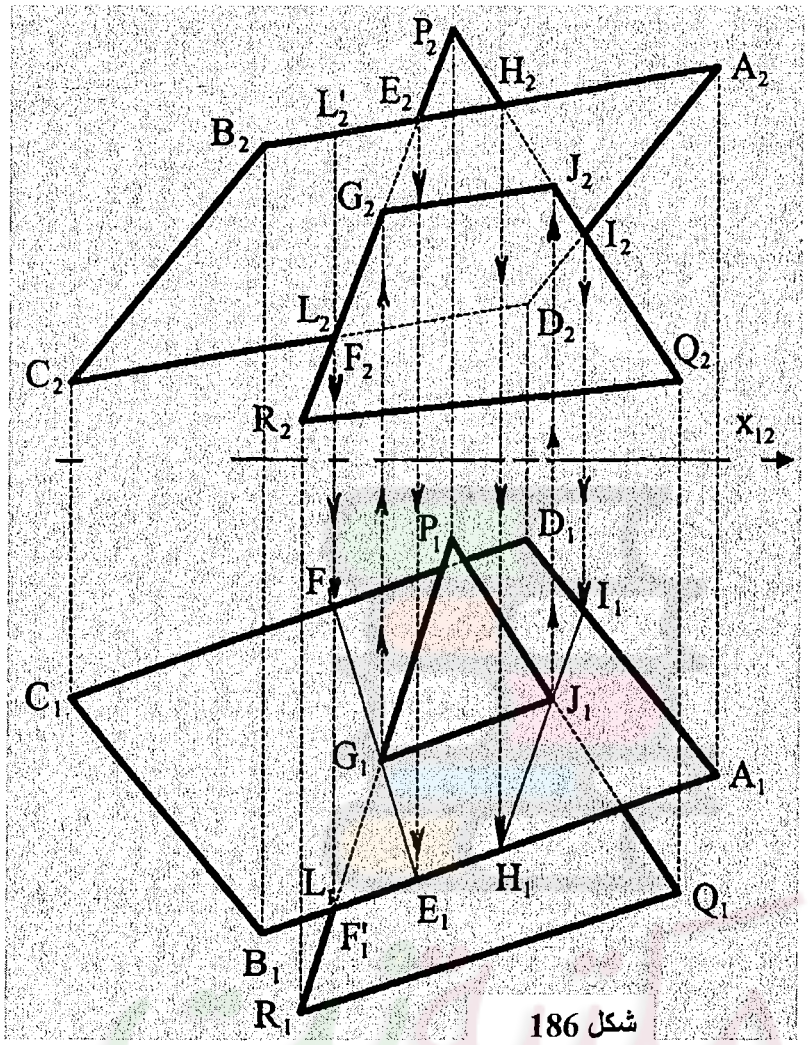
## تحديدالظاهر والمختفى فى المسقط الرأسى:

وفى هذا المثال شكل 185 سنأخذ الجزء NE مع المستقيم BC من المثلث فهم متقاطعين رأسـيا (شـكلا ولـيس موضوعا) لأنهم ثماليين " لذلك يسمى هذا الإسلوب بقاعدة المستقيمين الشماليين" وبالتالى بتحديد نقطة التقاطع هذه فى المسقط الرأسى وهى $I_2$ نتجه للمسقط الأفقى للنظر وبإيجاد مساقطها الأفقية على كل من $N_1E_1$و$B_1C_1$ فنجد $I_1'$ على جزء المستقيم $N_1E_1$و $I_1$ على ضلع المثلث $B_1C_1$ . نلاحظ أن $I_1'$ هو الأبعد وهو صاحب أكبر بعد Y وهذا يعنى أن جزء المستقيم ظاهر فوق ضلع المثلث فى المستوى الرأسى وبالتالى هذا الجزء هو الظاهر فى المسقط الرأسى وعليه يكون نظيره من نقطة التقاطع N إلى نهاية الظهور تحت المثلث مختفى تحت مستوى المثلث وهو الجـزء $N_2L_2$ . امـا الحدود الخارجيه للمستقيم عن حدود المثلث فهى ظاهرة وذلك بالنسبة الرأسى.

## تحديدالظاهر والمختفى فى المسقط الأفقى:

فى شكل 185يتم تكرار ذلك فى المسقط الأفقى حتى نستطيع تحديد أفقيا الظاهر والمختفى ، ويتم ذلك علـى جـزء المسقط الأفقى $N_1D_1$مع المسقيم $A_1C_1$ فنجدهم متقاطعين فى نقطة $L_1$ ، وبذلك نتجه للمسقط الرأسى لتحديـد أيهما هو الظاهر فى الأفقى فنجد لها مسقطين رأسيين أعلاهما الموجوده على $A_2C_2$ وبالتالى هو يكون الظاهر فى الأفقى وجزء المستقيم من نقطة التقاطع $N_1$ الى النقطة $L_1$ هو المختفى أفقيا.

**مثال: عين خط تقاطع المثلث PQR مع متوازى الأضلاع المعلوم ABCD ثم حدد الظاهر والمختفى**



شكل 186

الحل:

لتحديد خط التقاطع المستويين ،نأخذ أى مستقيمين من المثلث ونوجد نقطة تقاطع كل مستقيم مع مستوى متوازى الاضلاع وبالتالى ينتج نقطتين نصلهم معا فيكون خط التقاطع شكل 186. ويتم ذلك لكل مستقيم بإتباع الإسلوب التقليدى حيث نمرر بكل مستقيم مستوى خاص وفى هذه الحالة سنستخدم كل من المستقيم PQو PR . نبدأ بالمستقيم PQ حيث نمرر نمرر بالمسقط $P_2Q_2$ مستوى عمودى على المستوى الرأسى وينتج خط التقاطع HI والذى يقطع مسقط المستقيم PQ فى النقطة J. و بالمستقيم PR حيث نمرر بالمسقط $P_2R_2$ مستوى عمودى على المستوى الرأسى وينتج خط التقاطع FE والذى يقطع مسقط المستقيم PR فى النقطة G. نصل GJ فيكون خط التقاطع شكل 186.

**تحديد الظاهر والمختفى** نستعين بقاعدة المستقيمين الشماليين فى كل مسقط على حده.

- فى المسقط الافقى: نجد أن المسقط بداية من نقطة التقاطع $G_1R_1$ فى المثلث والمسقط للضلع $A_1B_1$ فى مستوى المتوازى متقاطعين فى نقطة $L_1$ ولتحديد أفقيا من من $G_1R_1$ أو $A_1B_1$ ظاهر والأخر مختفى:

نتجه للمسقط الرأسى ونرى المساقط المناظرة ل $L_1$ فى المسقط الرأسى مسقطين فى شكل 186 فنجدهما $L_2$ على $G_2R_2$ و $L_2'$ على $A_2B_2$، وبما أن الإحداثى Zللنقطة $L_2'$ أكبر من الإحداثى للنقطة $L_2$ ، لذلك تكون الضلع الذى تقع عليه $L_2'$ فى المسقط الرأسى وهو $A_2B_2$ المناظر له فى الأفقى $A_1B_1$ هو الظاهر ويختفى الأخر وهو $G_1L_1$ حيث أنه الجزء الموجود من المستقيم $P_1R_1$ تحت مستوى المتوازى. ومنه أيضا نعلم أن الجزء $G_1P_1J_1$ هو الظاهر من المثلث فوق مستوى المتوازى شكل 186.

- فى المسقط الرأسى: نجد أن المسقط بداية من نقطة التقاطع $G_2R_2$ فى المثلث والمسقط للضلع $C_2D_2$ فى مستوى المتوازى متقاطعين فى نقطة $F_2$ ولتحديد رأسيا من من $G_2R_2$ أو $C_2D_2$ ظاهر والأخر مختفى:

نتجه للمسقط الأفقى ونرى المساقط المناظرة ل $F_2$ فى المسقط الأفقى فى شكل 186 فنجدهما $F_1$ على $C_1D_1$ و $F_1'$ على $G_1R_1$ ، وبما أن الإحداثى Yللنقطة $F_1'$ أكبر من الإحداثى للنقطة $F_1$ ، لذلك تكون الضلع الذى تقع عليه $F_1'$ فى المسقط الأفقى وهو $G_1R_1$ المناظر له فى الرأسى $G_2R_2$ هو الظاهر ويختفى الأخر وهو $F_2D_2$ حيث أنه الجزء الموجود من المستقيم $C_2D_2$ تحت مستوى المثلث. ومنه أيضا نعلم أن الجزء $G_2R_2J_2Q_2$ هو الظاهر من المثلث فوق مستوى المتوازى، ونظيره من نقاط التقاطع $G_2$, $J_2$ هو المختفى من المثلث تحت المتوازى شكل 186.

المكتبة نت
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

# تمارين الموضع

1- مثل المستوى الذي يمر بالمستقيم l = AB ويوازي المستقيم k = CD حيث : A(-3,2,1) , B(0,1,3.5),C(0,-1,5),D(4,3,2 ) .

2- مثل المستوى الذي يمر بالنقطة المعلومة A( -3,-2,-2 ) ويوازي المستوى α(4,6,6) .

3- مثل خط تقاطع المستويين α و β في الحالات الاتية .

a) α ( 7,7,4) و β( 1, $150^0$,$60^0$ )

b) α ( 5,5,∞) و β( 1, $120^0$,$45^0$ )

c) α 1افقي ( 2 ) و α( 1, $120^0$,$45^0$ ) β

d) α( 2, 1350 ,30 ) و β( 1,3 ) يوازي خط الارض .

4- المعلوم مستوى α( 10,$30^0$,$120^0$ ) مثل فيه المستقيم m حيث

a) M [ A ( 4,y,1) , B ( 7,y,3 ) ]

b) H(x,7) و V(x,2) حيث H , V هما الاثران الافقي والرأسي للمستقيم m .

5- المعلوم مستوى α( 1,135$^0$,30$^0$ ) مثل فيه مستقيم :

اولا : h افقي فوق $\pi_1$ ويبعد عنه مسافة 3 cm .

ثانيا : f وجهي امام $\pi_2$ ويبعد عنه مسافة 4 cm .

6- مثل مستوى المثلث A B C حيث A ( 3,3,1) و B ( 7,1,4 ) و C ( 8,2,z ) الذي يقع في مستوى عمودي على $\pi_3$ ثم عين اثري هذا المستوى .

7- المعلوم مستوى α( 9 ,60$^0$,135$^0$ ) مثل فيه النقطتين A ( 6,y,1 ) و B ( 7,3,z) .

8- المعلوم من مستويين الاثران الرأسيان vα(1,450) ونقطة N(4,1,2) حيث :

اولا : vβ( 10,135$^0$)

ثانيا : vβ( 3.5,45$^0$) .

ثالثا :vβ يوازي خط الارض ويرتفع عنه 4 سم .

رابعا : vβ( 6,90$^0$) .

9- المعلوم من مستويين hα ( 0,135$^0$) وvβ ( 11,150$^0$) عين vα و hβ اذا علمت ان :

اولا : نقطة N(5,4,2) نقطة تقع على خط تقاطع المستويين .

ثانيا خط تقاطع المستويين يوازي اتجاه معلوم a حيث a1 و a2 يصنعان على الترتيب $120^0$ و $135^0$ مع خط الارض.

10 مثل نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى حيث [ ( 3,4,6 ) , ( 7,1,1) ] a اذا فرض ان :
اولا : ( $1,150^0$ )α حيث α رأسي ثانيا : ( $1,135^0,45^0$ )α .
ثالثا : α عمودي على $\pi_2$ حيث ( $4,60^0$ )α .

11- مثل خط تقاطع المستويين ( $1,150^0,60^0$ )α و ( 3, 3,5 ) C , B ( 8, 7, 5 ) , A ( 11, 2 ,1) β [ عن طريق تعيين نقطتي AB و AC مع المستوى α .

12- مثل المثلث ABC والذي يقع في مستوى يوازي المستوى ( $15,30^0,135^0$ ) α حيث A ( 7,2,3 ) B ( 1,5,z) , C ( 3,y,8 ) .

13- مثل القاطع لمستقيمين شماليين {(-5,5,3),(-3,1,1)}q, {(-3,0,5),(1,4,3)}p ويمر بنقطة N(2.5,2.5,3 ) .

14- مثل المستقيم الذي يقطع المستقيمان الشماليان AB,CD ويقع في المستوى (5-,2,3)β حيث A(0,2,3),B(3,3,0),C(1,6,5)D(7,4,0) .

15- عين النقطة المشتركة بين الثلاث مستويات .
اولا : ( $120^0$ ,$30^0$ ,12 ) α و ( $150^0$ , $70^0$ ,8,5 ) β و ( $45^0$ ,$120^0$ ,1 ) γ .
ثانيا : ( $135^0$ ,$60^0$ 7 ) α و ( $150^0$ , 1 ) β حيث β رأسي و ( 5, 4 ) γ ويوازي خط الارض .
16 - مثل نقطة تقاطع المستقيم ( 1,9,9 ) D و ( 1,0.5,6 ) H مع المثلث A( 8,7,5 ) , B ( 4,2,1) C ( 2,4,4)

17 - مثل مثلثا متساوي الساقين فيه AB = AC ويقع في المستوى ( 6,6,5 ) β بحيث يقع AB في المستوى ( 6,4,6- ) α ويقع AC في المستوى ( 1 ,3, -3) γ علما بأن النقطة B تقع في $\pi_2$ .
18 – عين طول القطعة المستقيمة من المستقيم [ ( 5,1,6- ) , (0,5,7) ] a والمحصورة بين المستويين ( α 4,4,-3 ) و ( 4, 3-, 4- ) β .
19- مثل المستوى الذي يمر بالنقطة ( 1,2,1 ) N ويوازي المستوى ( 8,7,6 ) α .
20 – مثل المستطيل الذي يقع قطره BD على المستقيم a وقطره AC يوازي المستوى ( 6,6,6 ) γ حيث [ ( 6,5,4 ) , ( 4,1,0- ) ] a و ( 4,4,4- ) A .

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

# الباب السابع

# الإسقاط المساعد

www.Maktbah.Net

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

# الإسقاط المساعد

هذا الباب هو الباب الذى حير كل العاملين فى الهندسة الوصفية والإسقاط عموما وأتعب الكثيرين ممن يستعجلوا الحصول على المعلومة وتقديمها للطلاب بصورة نمطية دون البحث فى ماوراء المعلومه والمفهوم لها حتى يستطيع التفهم الجيد لكل شئ. لذا فإن هذا الباب نشأت فكرته من الأوضاع الخاصة لكل من المستقيمات والمستويات، حيث وجد أن الاجزاء ذات الأوضاع الخاصة هى دائما الأسهل فى التعامل والأوضح وكذلك هى التى تمتلك صفات كثيرة دون غيرها من الأوضاع العامة وبالتالى تسهل دائما التعامل مع الأجزاء الصعبة. ومثل هذه الأوضاع التى يمكن تلخيصها هى كالأتى:

**أولا للمستقيم**: المستقيم فى الأوضاع الخاصة كلها يظهر بطوله الحقيقى فى بعض مستويات الإسقاط وبالتإلى هذا يسهل لنا الأتى ; أولا: قياس الطول الحقيقى عليه مباشرة ; ثانيا: يتم تطبيق عليه نظرية الزاوية القائمة " الزاوية القائمة تُسقط قائمة مادام أحد أضلاعها بطوله الحقيقى" حيث يسهل إستخدام الخصاص الهندسية للأشكال الهندسية فى المستوى والتى تمتلك زوايا قائمة لتحديد مواقع النقاط التى تتضح عند نقاط التعامد ; ثالثا: كل المستقيمات العمودية بالإضافة لأنها تظهر طول حقيقى فى بعض المستويات إلا أنها تظهر نقطة فى أحد المستويات وبالتالى توجد التطبيقات الكثيرة التى تتطلب أن يكون المستقيم واضح أنه نقطة ، مثل تحديد الزاوية الزوجية بين مستويين يكون واضح لو أن خط تقاطع المستويين مسقطه كان نقطة هذا يعنى أن الزاوية تظهر مباشرة، بالإضافة إلى تطبيقات كثيرة تعتمد على الأوضاع الخاصة للمستقيمات.

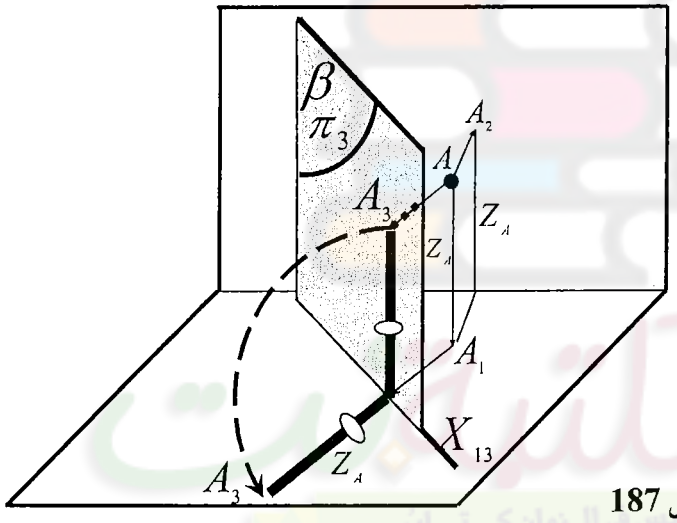
**ثانيا المستوى**: الأوضاع الخاصة للمستوى تظهر بداية عندما يكون المستوى خطى المسقط أى عمودى على أحد مستويات الإسقاط وهذا يتم الإستفادة منه فى أولا: أنه يمكن رسم موازى له مباشرة من أى مسقط للنقطة فى إتجاه خطى المسقط إعتماد على أنه خطى المسقط، ثانيا: رسم مستقيم يوازى مستوى من أى مسقط للنقطة فى إتجاه خطى المسقط، ثالثا: إيجاد نقطة تقاطع المستوى مع أى مستقيم فى إتجاه خطى المسقط مباشرة، رابع: تحديد ورسم مستوى موازى لمستوى على بعد محدد. أما المستويات التى توازى مستويات الإسقاط فإن الأشكال التى تقع فى هذه المستويات تظهر بشكلها الحقيقى **T.S** فى مستوى الإسقاط الموازى، وبالتالى تحتفظ بجميع خصائص الهندسة المستوية

من التوازى والتعامد. لذلك نتيجة للتسهيلات التى تقدمها هذه الأوضاع الخاصة لجأ العلماء الذين سبقونا لهذا العلم وكذلك من إجتهدوا من بعدهم أن يحاولو تحويل المستقيمات والمستويات العامة إلى أوضاعها الخاصة حتى يمكن الإستفادة من هذه الأوضاع فى مواجهة التمارين المتعددة الصعبة. ومن هنا أصبح لزاما علينا أن نتعلم كيف يمكن أن نحول مستقيم من وضع عام إلى وضع خاص يظهر بطوله الحقيقى ثم إلى وضع عمودى بحيث يظهر نقطة، وكذلك كيف يمكن تحويل المستوى لوضع خطى المسقط بدلا من الوضع العام ثم كيف نأتى بالشكل الحقيقى للمستوى للسيطرة على تمرين الهندسة الوصفية والتعامل معه على أنه هندسة مستوية. وهذا ماسيتم شرحه فى هذا الباب.

**تنبيه:** فى هذا الباب سنستخدم مستويات إضافية تكون عمودية أولا على أحد مستويات الإسقاط الأفقية أو الرأسية وفى ذات الوقت لها وضع خاص مع الأجزاء الموجودة من التمارين.

## 1-الإسقاط المساعد للنقطة

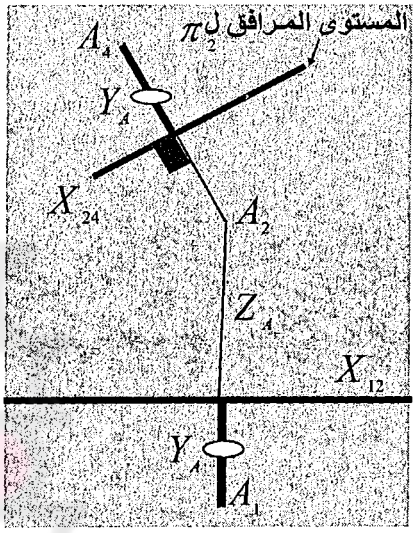
في إسقاط مونج يتم الاستعانة بمستويين أساسين $\pi_1, \pi_2$ للإسقاط المباشر عليهم. ومن عيوب هذا النظام أن الإسقاط عليهم ياتى تبعا للوضعيه



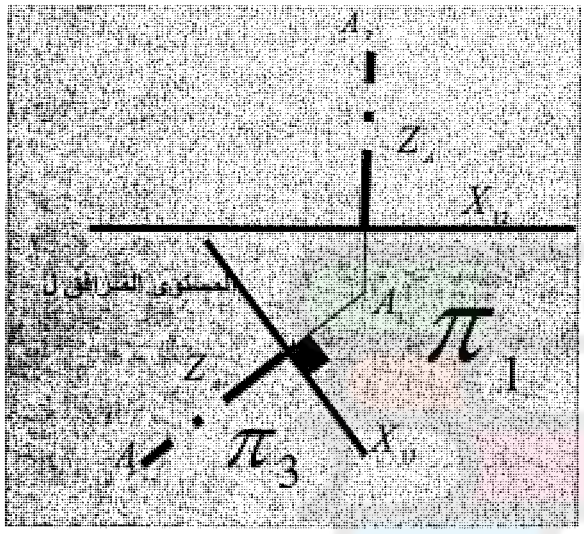
شكل 187

الفراغيه للمستقيم أو المستوى الذى يتم إسقاطه ( مائلا على الأفقى او الرأسى او باى وضع غير التوازى او التعامد بالنسبه للمستويات الرئيسيه $\pi_1, \pi_2$ ) .ونتيجه للخواص العديده للأوضاع الخاصه للمستقيمات والمستويات وسهوله التعامل معها ومميزاتها العديده فقد جاءت فكره الإسقاط المساعد الذى يستطيع تحويل كل من المستقيمات والمستويات من الأوضاع العامه لأوضاع خاصه. يتم ذلك من خلال الإستغناء عن أي من المستويين $\pi_1$ و $\pi_2$ وإستخدام الأخر واستبدال المستوى الذى تم الإستغناء عنه بمستوى أخر عمودي على الأخر (شكل **187** ) ولكن له وضع خاص يحدد

من خلال الشكل المراد إسقاطه والتعامل معه مثل وضع المستوى $\beta$ بالنسبة للمستقيم حيث تم الإستغناء عن المستوى الرأسى وإستخدام مستوى عمودى على المستوى الأفقى شكل **187**. وباحداث عملية الإنطباق تظهر الصورة حسب وضع المستوى و الغرض منه . وعندما نستغني عن $\pi_2$ . ونأخذ مستوى أخر عمودي علـى $\pi_1$ كمسـتوى ثالـث




شكل **189**




شكل **188**

$\beta=\pi_3$ فإنه يتقاطع معه في خط أرض جديد يكون بين المستويين**3,1**.

بالتالي خط الأرض يكون إسمه الجديد $X_{13}$ شكل **187** وشكل **188** ويعتبر بهذا الشكل المستوى $\pi_3$ الجديـد مستوى خطى المسقط على $\pi_1$ لأنه عمودى عليه. كذلك لو تم إستخدام مستوى عمودي على $\pi_2$ يكون خط الأرض بين المستوى **2** و المستوى **4** الجديد هو $X_{24}$ شكل **189**. ومن شكل **188**عند إنطباق المستوى $\beta$ علـى $\pi_1$ يتضح أن بعد $A_3$ عن $X_{13}$ هو نفسة بعد $A_2$ عن $X_{12}$ وهو $Z_A$ وهذه القاعدة سيتم تطبيقها عامة وهى كالأتى:

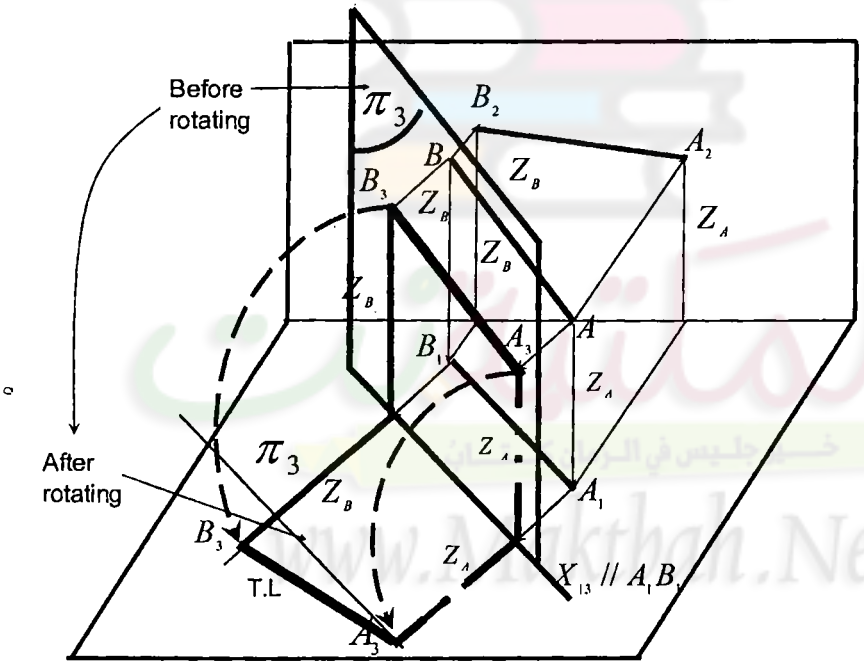
**<u>نتيجة1. * بعد المسقط المتروك عن خط الأرض المتروك يساوى بعد المسقط الجديد عن خط الأرض الجديد . أو</u>**

**<u>* بعد المسقط القديم عن خط الأرض القديم يساوى بعد المسقط الجديد عن خط الأرض الجديد .</u>**

يجب أن نعلم أن المستوى 3 العمودى على $\pi_1$ معرف بأنه المستوى المرافق إلى $\pi_1$ شكل 188 ويسمى المستوى 4 العمودى على $\pi_2$ بأنه المستوى المرافق إلى $\pi_2$ شكل 189. ويمكن إحداث تتالي للمستويات المساعدة المفروضة $X_{13}$ , $X_{35}$ , $X_{57}$ كلهم عمودين على $\pi_1$ ولكن بأوضاع مختلفة تخدم الغرض من وضعها وكذلك $X_{24}$ , $X_{46}$, $X_{68}$ بالنسبة إلى $\pi_2$ . وتستخدم الأرقام الفرديه للمستويات المرافقه ل $\pi_1$ و $\pi_3$ و $\pi_5$ بالتتالى وكذلك الأرقام الزوجية للمستويات المرافقه للمستويات $\pi_2$ و $\pi_4$ و $\pi_6$ بالتتالى. والأن إعتماد على الأفكار الموضحه سابقا فإنه سيتم التعامل مع المستقيمات والمستويات ذات الأوضاع العامه لتحويلها لمستقيمات ومستويات ذات وضع خاص لتسهيل حل التمارين.

## الإسقاط المساعد للمستقيم

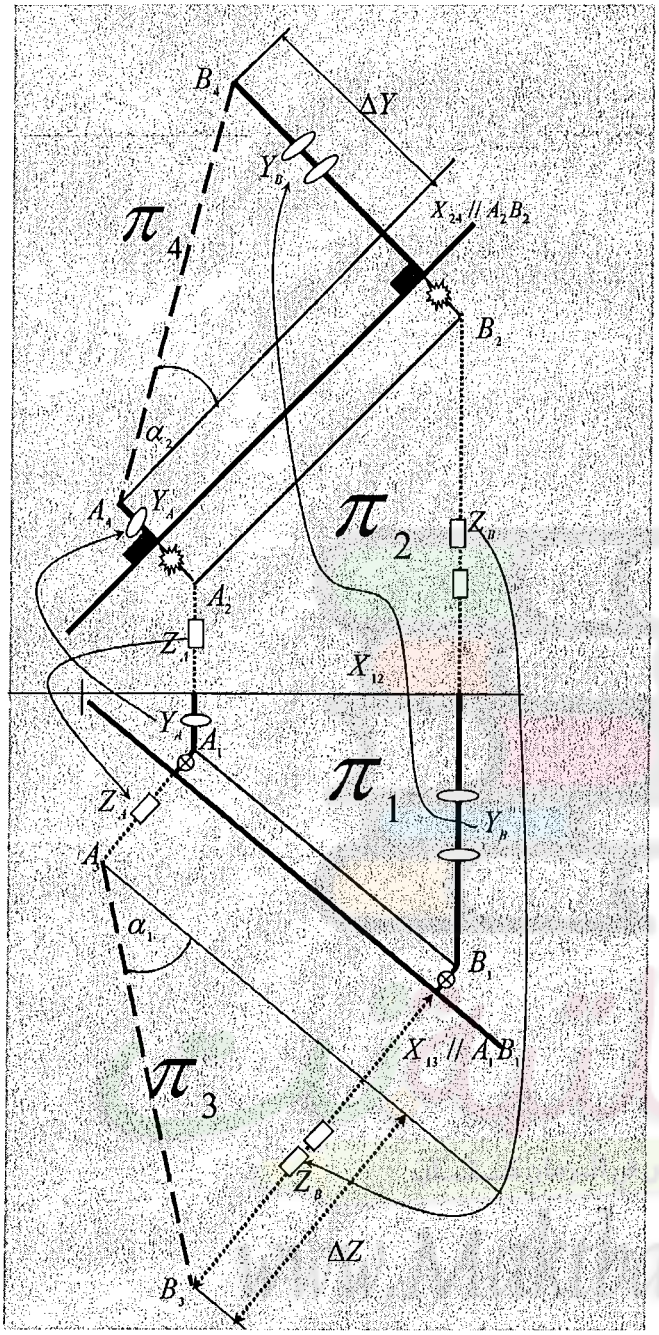
### 1. إيجاد الطول الحقيقي للمستقيم/ تحويل المستقيم من وضع عام إلى وضع موازي لمستوي المسقط (أفقي أو وجهي)




شكل 190

الأوضاع التى ظهرت فى الأشكال السابقة توضح طبيعة الأبعاد التى تنقل عند عمل الإسقاط المساعد وذلك باستخدام المستويات العمودية. ونتيجة لسهولة التعامل مع المستقيمات الخاصة الأفقية والوجهية فإنه جاءت الفكرة فى كيفية تحويل مستقيم من وضع عام إلى مستقيم أفقى أو وجهى. ومن شكل 190 نلاحظ أنة لو تم

إستخدام مستوى مساعد موازى للمستقيم عمودى على مستوى الإسقاط $\pi_1$ فإن المستقيم لو تم إسقاطة علية فإنة سيسقط علية بطولة الحقيقى شكل **190** يوضح رسم المستوى $\pi_3$ الجديد موازى للمستقيم وبذلك يتم إسقاط $AB$ علية بأرقام جديدة وهى $A_3B_3$ وبالأبعاد $Z_A, Z_B$ وهى نفس الأبعاد لكل من $A_2, B_2$ فوق $X_{12}$. المستوى $\pi_3$ يتقاطع مع $\pi_1$ فى خط أرض جديد هو $X_{13}$ ونلاحظ أن خط الأرض الجديد $X_{13}$ يوازى المسقط الأفقىللمستقيم $AB$ حيث يوازى $A_1, B_1$. وبدوران المستوى $\pi_3$ لينطبق على المستوى الأفقى $\pi_1$ نلاحظ أن خطوط التناظر بين $A_1, A_3$ وبين $B_1, B_3$ هى عمودية على $X_{13}$ وبذلك التعامل مع خط الأرض $X_{13}$ يكون مثل التعامل $X_{12}$ حيث أن خطوط التناظر تكون عمودية على كل منهما.




شكل **191**

شكل **191** يوضح كيفية إستخدام الإسقاط المساعد كأسلوب لإيجاد الطول الحقيقى سواء على ويتم الإسقاط من $A_1, B_1$ خطوط تناظر عمودية على $X_{13}$ ونأخذ الأبعاد فوق $X_{12}$ وهى $Z_A, Z_B$ لكل من $A_2, B_2$ وهى

ونقيسها على خطوط التناظر العمودية إبتداء من $X_{13}$ وذلك لإستنتاج كل من $A_3B_3$ وبالتالى يمكن القـــول بـــأن الأبعاد فوق $X_{12}$ يتم نقلها تحت $X_{13}$ فيكون المسقط فى $\pi_3$ طول حقيقى شكل **191**. بالنسبة إلى $\pi_2$ ســـيتم رسم $X_{24}$ // $A_2B_2$ ويتم الإسقاط من $A_2, B_2$ خطوط تناظر عمودية على $X_{24}$ ونأخذ الأبعاد تحـــت $X_{12}$ وهى $Y_A, Y_B$ لكل من $A_1, B_1$ ونقيسها على خطوط التناظر العمودية إبتداء من $X_{24}$ وذلك لإستنتاج كل من $A_4B_4$ وبالتالى يمكن القول بأن الأبعاد تحت $X_{12}$ يتم نقلها فوق $X_{24}$ ويكون المسقط فى $\pi_2$ طول حقيقى.وفى كلتا الحالتين يتضح كيفية وحدود إنطباق كل من $\pi_3$ و $\pi_4$ شكل **191**. ونلاحظ أنه تحول المستقيم في هذه الحالة إلى مستقيم أفقي يظهر بطول الحقيقي وكذلك زاوية ميلة على المستوى الأفقي $\alpha_1$ وكذلك بالنسبة لـــ $\pi_2$ فنوجـــد $\alpha_2$.

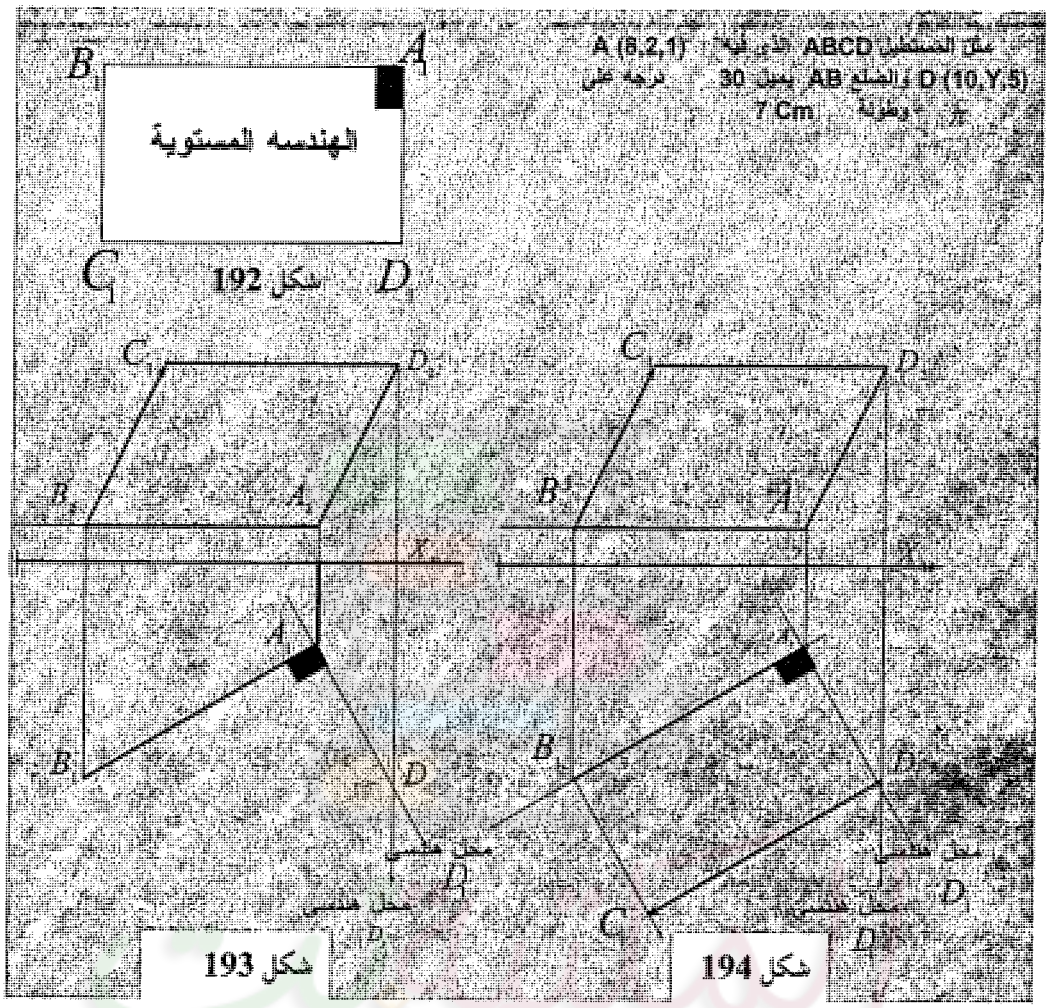
***نتيجة 2. الزاوية القائمة تسقط قائمة طالما كان أحد أضلاعهايظهر بطولة الحقيق T.L (طالما موازى لمستوى المسقط) والعمودى على ال T.L ليـــس T.L " مادام الإسقاط ليس لشكل حقيقى".***

لذلك إذا كان الحل فى الهندسة المستوية يستلزم عمل عمود واحد على أحد المستقيمات أو إسقاط عمود من نقطة على مستقيم فإن هذا يقودنا إلىجعل هذا المستقيم يظهر فى وضع **T.L** حتى يمكن إقامة العمود علية وهذا يعنى إستخدام خط أرض موازى لأحد مساقطه الأفقية أو الرأسية ويجب أن لاننسى أن العمود الذى يـــتم عملـــة طولـــة لـــــيس **T.L** وإن كان مطلوب طول هذا العمودى ليتم إستخدامة بعد ذلك فى تطبيق أخر فإننـــا لابـــد أن نـــأتى بالطول الحقيقى لهذا العمود كمستقيم منفصل ثم إستخدامه فى القياس للطول بعد ذلك تبعا للغرض المطلوب منه.

www.Maktbah.Net

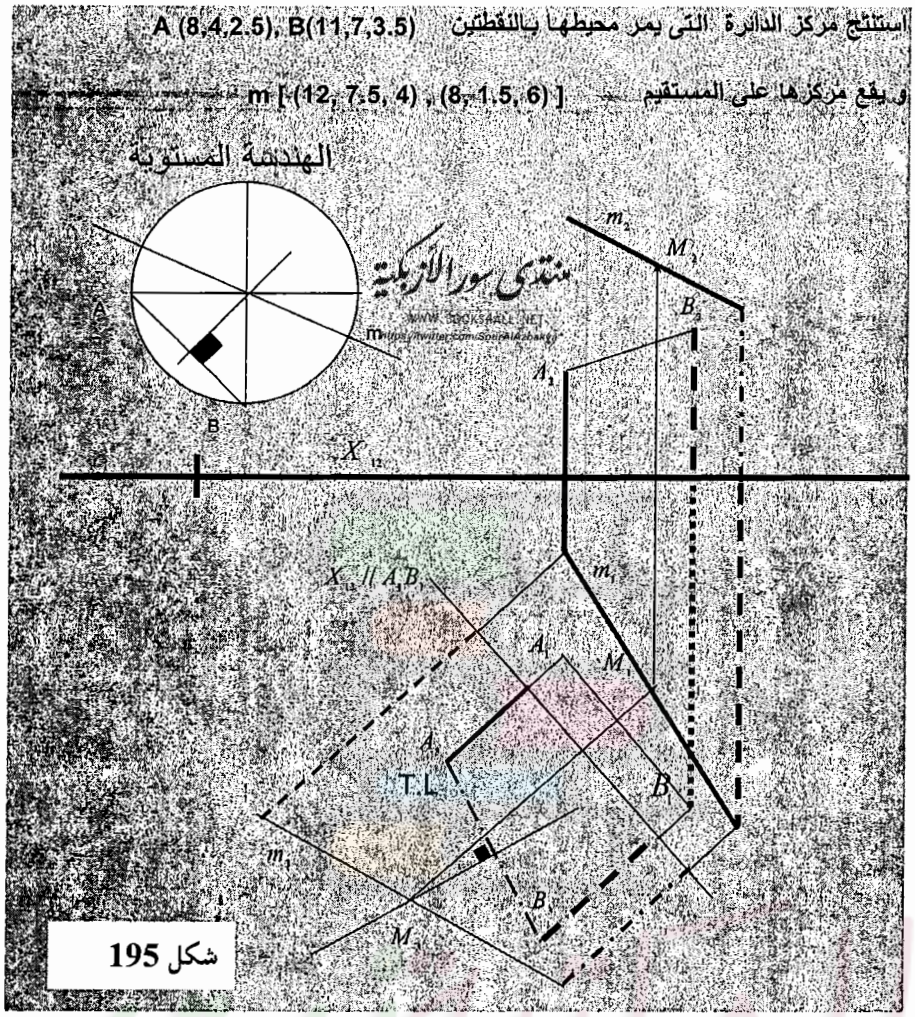
والإستفادة من إيجاد الطول الحقيقى للمستقيم تتلخص فى إيجاد زوايا الميل للمستقيم على المستويات الأساسية $\pi_1, \pi_2$ وإتاحة إقامة المستقيمات العمودية على المستقيمات . كالمثال التالى:

**تطبيقات تحويل المستقيم إلى الطول الحقيقى ذات إستخدامات متعددة، وإليك هذا المثال:**

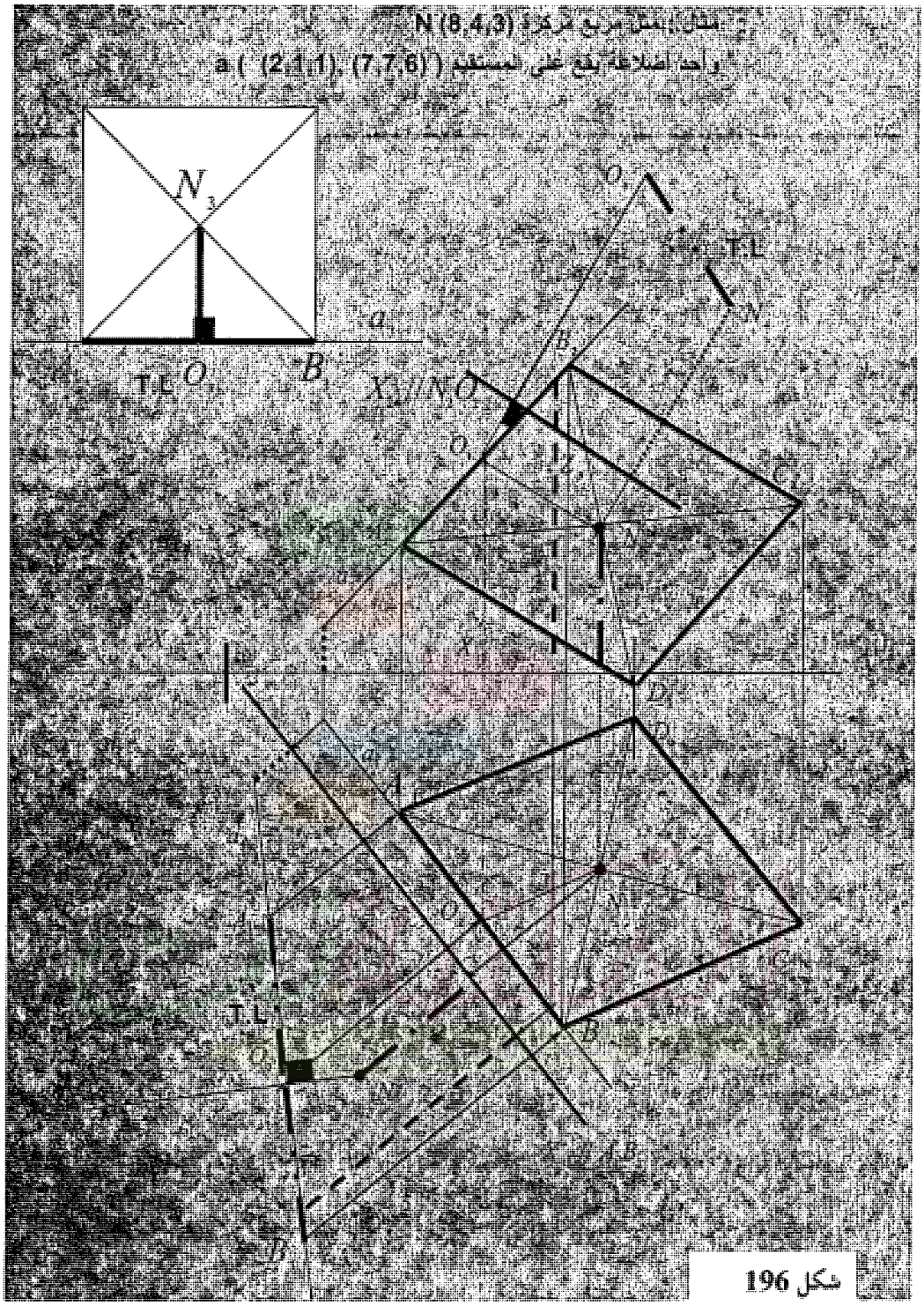



نجد من المعطيات فإن المسقط الرأسى كامل بالنسبة للمستطيل ولكن المسقط الأفقى ناقص شكل **193**، ومن الحل بالهندسه المستويه شكل **192** نجد أن المعطى هو الضلع **AB** وناقص الإحداثى للنقطة **D** ومن خصائص المستطيل أن الضلع **AB**عمودى على **AD** وهذا يعنى أننا سنقيم عمودى على **AB** فيكون محل هندسى للضلع **AD** وهذا متاح فى الهندسه المستوية ولكن لتنفيزة فى الهندسة الوصفية لابد أن يكون الضلع **AB** فى حالة **T.L** ومن حسن الحظ أنه **T.L** لأنه أفقى شكل **194** وبالتالى يمكن عمل عمودى عليه مباشرة فى المسقط الأفقى فيكون هذا العمودى محل هندسى للنقطة **D** يتقاطع مع المحل الرأسى فى المسقط الأفقى لنقطة **D**.

مثال: فى شكل 195 معطـــى وتر فى الـــدائرة ومحل هندســـى للمركز وهـــذا يعنى فى الهندسة المســـتوية أنـــه سنقيم عمود من منتصف الـــوتر يتقاطع مع المحل الهندسى للمركز فى المركـــــز . ولتنفيذ ذلـــك




بالهندسة الوصفية يتم الذهاب إلى الثلاثات بكل التمرين أى بجميع المعطيات ويتحول الوتر حينئذ إلى **T.L** فنحصل على $A_3B_3$ وإقامة عمود علية يتقاطع مع $m_3$ فى المركز $M_3$ والعودة بة لإستنتاج $M_1$ ثم $M_2$ بالعودة عموديا على خطوط الأرض بخطوط التناظر. بنفس الفكرة يمكن رسم مثلث متساوى الساقين معلوم قاعدتة ورأسة تقع على مستقيم مثل **m**.




شكل 196 يوضح حل التمرين بالهندسة المستوية الذى أنصح دائما بالبداية به حيث نحصل على الحل المبدئى بالهندسة المستوية ثم نترجم خطوات الحل بما يتفق معة فى الهندسة الوصفية. ومن هذا المثال يمكن أن نتعلم كيف نفكر. المعطى فى

هذا المثال هو مركز المربع ومحل هندسى لأحد أضلاعة، وبالتالى لإكمال الشكل بالهندسة المستوية يتم إسقاط عمود من مركز المربع على المستقيم **a** نحصل على نقطة منتصف الضلع **O** ومنها نقيس طول هذا العمود يمين وشمال **O** نحصل على نقطة **A , B** ثم نصل **AN** وغدة ثم نقيس مثلة نحصل على**C** ثم نصل **BN** ونقيس مثلة نحصل على**D** . من هذا الحل نجد أولا لتحويل هذا الفكر للهندسه الوصفية نتابع تنفيذ الخطات وصفيا:

أولا: لإسقاط عمود من **N** على **a** لابد أن يكون **a** بطولة الحقيقى ، بناء على ذلك لابد أن نحول المستقيم **a** إلى **T.L** وهذا لن يتم إلا فى الثلاثات أى يتم عمل $X_{13} // a_1$ ومعة كل المعطيات وهى $N_1$ و $a_1$ وبالتالى نحصل على $a_3$ و $N_3$ وفى هذا الوقت يمكن عمل عمود من $N_3$ على $a_3$ لأنة أصبح **T.L** ( نصيحه عامه: عندما نحصل على أى نقطة فى الثلاثات $\pi_3$ لابد أن نعود بها مباشرة إلى $\pi_1$ و $\pi_2$ )

ثانيا: فى الهندسة المستوية يمكن أن نقيس طول العمودى مباشرة على الضلع **a** ولكن فى الهندسة الوصفية لايجوز حيث أنة لايتم قياس طول عادى على طول حقيقى وبالتالى المطلوب إيجاد الطول الحقيقى لهذا العمودى ثم العودة به لقياسه على الطول الحقيقى للمستقيم $a_3$ .( الطول الحقيقى لهذا العمودى يمكن إيجاده بطريقة فرق البعد للضلع $ON$ أو بإستخدام الإسقاط المساعد بخط أرض جديد $X_{35}$ موازى إلى $O_3N_3$ أو بخط أرض $X_{15}$ موازى إلى $O_1N_1$ أو $X_{24}$ موازى إلى $O_2N_2$ كل هذا يؤدى إلى إيجاد الطول الحقيقى للعمودى).

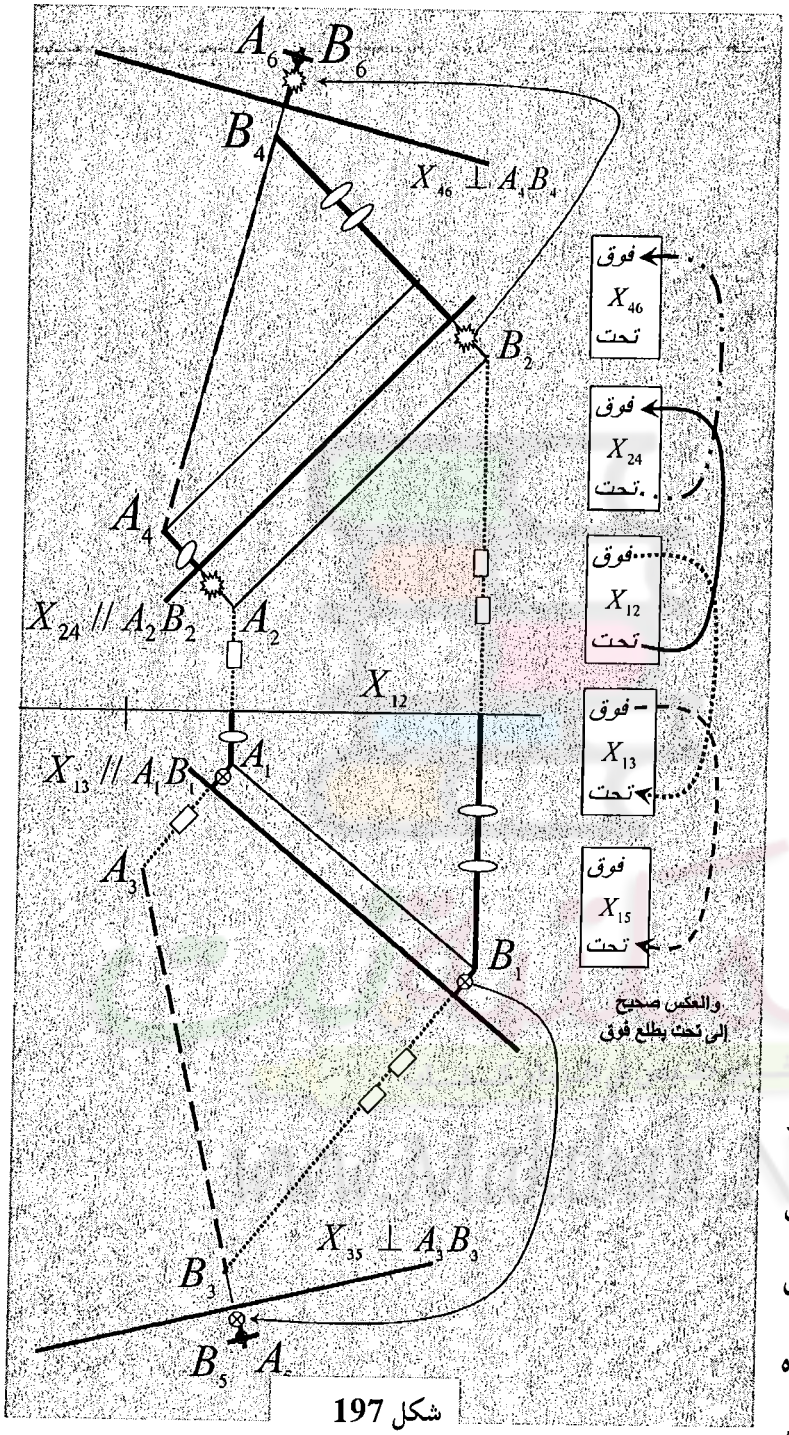
ثالثا: عند قياس الطول الحقيقى يمين وشمال $O_3$ نحصل على $A_3$ , $B_3$ ثم نعود بهم ونكمل الشكل كما سبق الذكر فى الحل بالهندسة المستويه حتى نحصل على شكل دقيق وأضلاع متوازية.

www.Maktbah.Net

## تحويل المستقيم إلى نقطة

تحويل مستقيم إلى نقطه هو تحويل مستقيم من وضع عام إلى وضع عمودى على مستوى المسقط شكل **197**. وفى السابق تم إستخدام مستوى موازى لمسقط المستقيم لنحصل على الطول الحقيقي فإذا تم إسقاطه على مستوى عمودىعلى ال**T.L** $X_{35}$ فيتحول المستقيم إلى نقطة . وكذلك لا يمكن إسقاط على مستوى عمودى على $\pi_2$

إلا إذا تحول المستقيم إلى طولة الحقيقي بإستخدام $\alpha_{24}$ الموازى للمسقط الرأسى ثم إستخدام خـط أرض عمـودى $X_{46}$ فيتحول لنقطة شكل 197.



شكل 197

ملاحظه: بالنسبه للمستقيمات ذات الأوضـاع الخاصـة .( المستقيم الأفقي والوجهي وكل مـاهو بطولـة الحقيقـى فى مسقطه الأفقى أو الرأسـى) يسقط مرة واحدة عمودى .

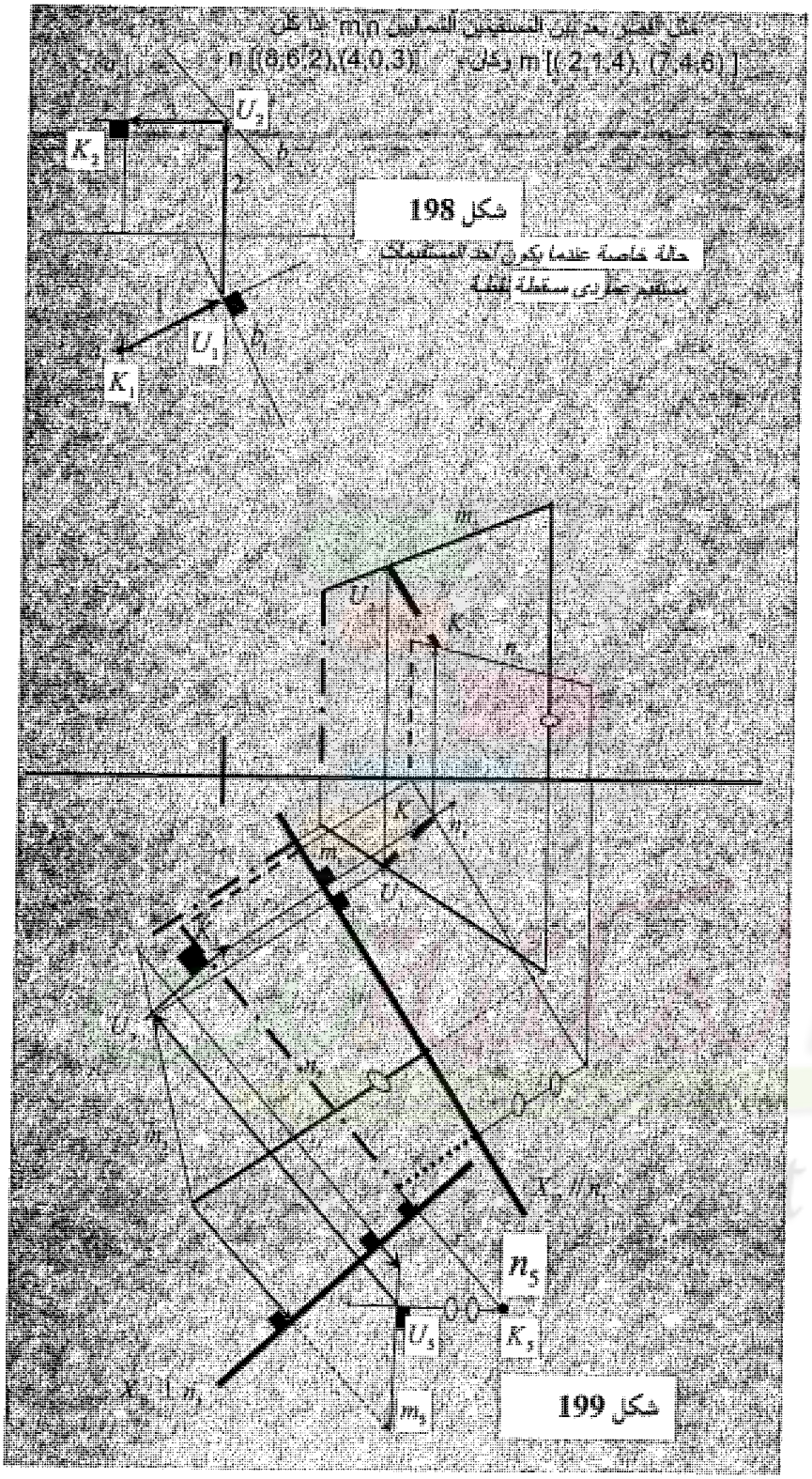
أسلوب نقل الأبعاد للنقـاط وعلاقتها لخطـوط الأرض ، ونلاحظ من شـكل 197 فى وضع خطـوط الأرض فـوق بعض، وليسهل التعامل معهـا فى نقل وقياس أبعاد المسـاقط للنقاط بالنسبة لخطوط الأرض تحت $X_{12}$ نطبق " إلى فوق يزل تحت" كما نرى فى إتجاه الأسهم من $X_{12}$ إلى $X_{13}$ ثم إلى $X_{35}$ .أما فى العودة بعد إجراء العمليات الهندسية وإستنتاج المطلوب فى $X_{35}$ نعود بعكس الطريق وهو "إلى تحت

يطلع فوق" حيث يكون ما تحت $X_{35}$ يصعد فوق $X_{13}$ وما تحت $X_{13}$ يصعد فوق $X_{12}$ . أما بالنسبة لخطوط الأرض فوق $X_{12}$ وهى $X_{24}$و $X_{46}$ فإننا نطبق عكس الإسلوب السابق تماما، حيث نطبق "إلى تحت يطلع فوق" عند الذهاب إلى خطوط الأرض الأعلى، أما عند العودة بعد إستنتاج المطلوب نطبق " إلى فوق ينزل تحت".

**الإستفادة من تحويل المستقيم إلى نقطة تتلخص فى :**

1. بعد نقطة عن مستقيم
2. إيجاد وتحديد الأبعاد بين المستقيمات المتوازية
3. تحديد موضع مستقيم يبعد عن الموازى له بمسافة محددة
4. البعد العمودى المشترك بين مستقيمين شماليين
5. رسم قاطع لمستقيمين شماليين ويوازى إتجاه محدد.
6. إيجاد الزاوية الزوجية بين مستويين متقاطعين

المكتبة نت
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

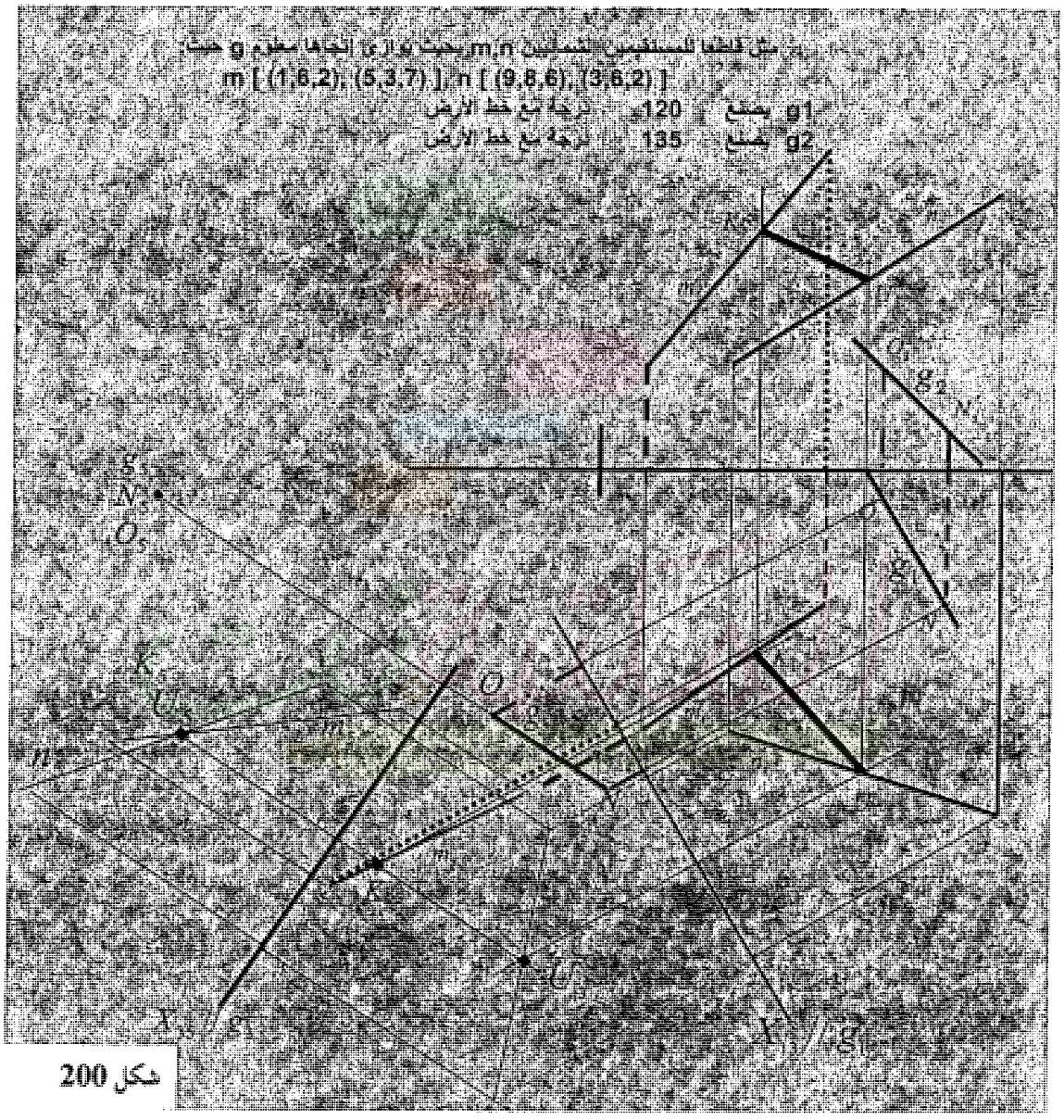

شكل 198
حالة خاصة عندما يكون أحد المستقيمات
مستقيم جانبي مستقيمة المسقط
شكل 199

من الحالة الخاصة شكل 198 نجد أنه لو كان المستقيم $a$ رأسى عمودى على $\pi_1$ فإن مسقطه الأفقى نقطة ومسقطه الرأسى **T.L.** وبالتالى العمودى علىهذا المستقيم الرأسى $a$ هو مستقيم أفقى يوازى $\pi_1$ وعلية فإن مسقطه الرأسى يوازى خط الأرض ويظهر فى الأفقى **T.L** وبذلك يمكن رسم عمودى بين المسقطين $a_1, b_1$ المستقيمين، هذه المرة يكون التعامل بين $\pi_1, \pi_2$ حيث يتم رسم من المسقط الأفقى $a_1$ عمودى على $b_1$ حيث $b_1$ ليس **T.L** ولكن العمودى الذى سيتم رسمة هذة المرة هو الذى يكون طولة **T.L** لأنة عمودى على $a_2$ وهو مستقيم أفقى **T.L** وبالتالى هذا العمودى سيقطع $b_1$ فى نقطة $U_1$ ويمكن أن نأتى بالتناظر بالمسقط $U_2$ ومنة نرسم موازى لخط الأرض الذى نعمل عليه أو نرسم عمودى على المسقط الرأسى $a_2$ فيقطع العمودى فى $K_2$ وبالتالى يصبح العمودى $U_2K_2$ ونوجد مساقطة $U_1K_1, U_2K_2$ شكل 198. وبذلك يكون ملخص الحل فى ثلاثة أعمدة من مسقط المستقيم الأول وهو نقطة نرسم عمودى على المسقط للمستقيم الأخر يقطعة فى نقطة منها نرسم عمودى على خط الأرض حتى يقطعه المسقط الأخر لنفس المستقيم نوجد مسقط نقطة التقاطع بالتناظر ومنها نرسم عمودى على المسقط الثانى للمستقيم الأول فنوجد نقطة على المستقيم الأخر ويكون المحصورة بين نقطتى التقاطع هو أحد مساقط العمودى ونعود به شكل 198. والسؤال الأن هو: هذا الحل المطروح تم تنفيذة عندما كان أحد المستقيمات مسقطه نقطة. إذا عندما يعطينا مستقيمين فى وضع عام شكل 199يتم تحويل أحدهما إلى نقطة وإسقاط الأعمدة كما تم فى الحالة الخاصة ولكن هذه المرة يكون التعامل بين $\pi_3, \pi_5$ وإستنتاج الأعمدة والعودة بها كما حدث فى الحالة الخاصة حتى نعرف كيفية العودة بالعمودى شكل 199 حيث أنه يكون موازى لخط الأرض الذى يعمل عليه.

www.Maktbah.Net

## مثال: قاطع لمستقيمين شماليين ويوازى إتجاه معلوم.

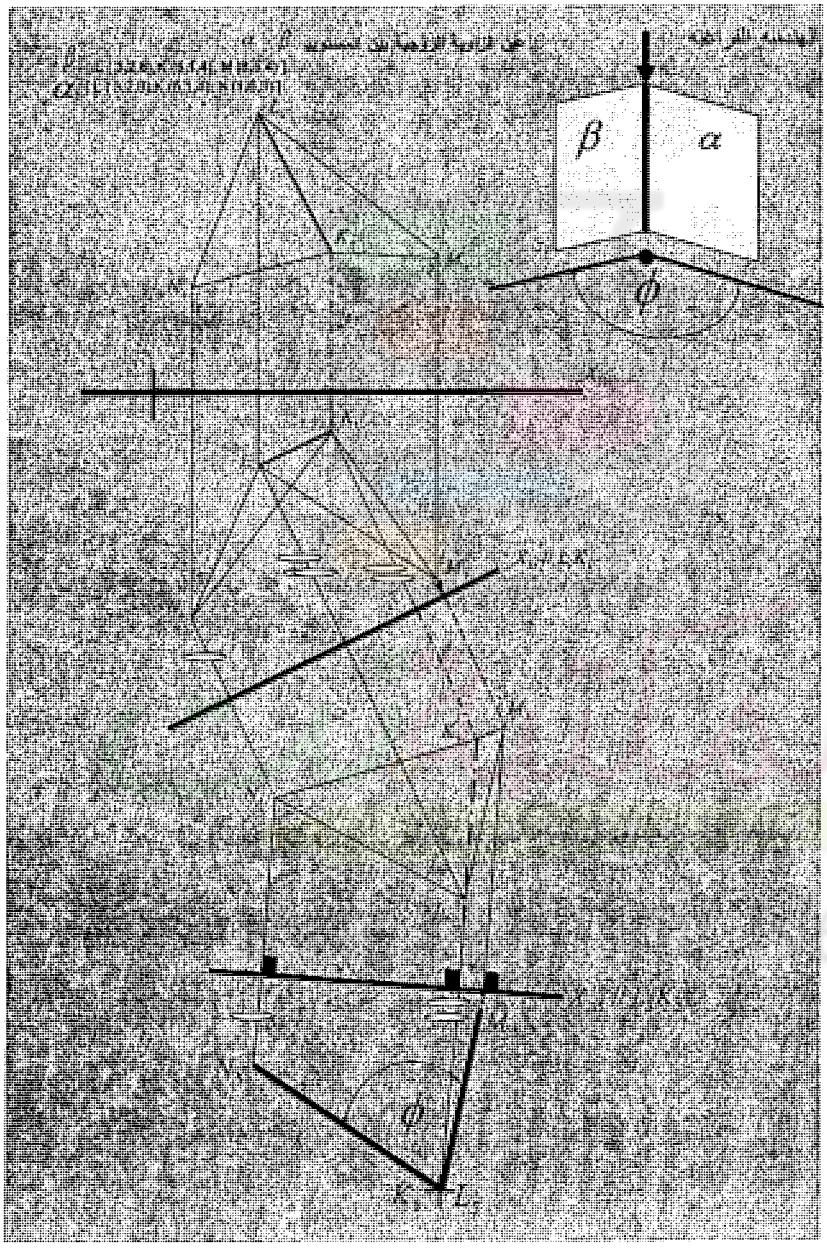
وفى مثل هذة الحالات شكل 200 يتم فيها تحويل الإتجاة إلى نقطة عندئذ يتقاطع مسقطى المستقيمين مع بعض فى نقطة، هذه النقطة هى مسقط القاطع وهى $K_5U_5$ الذى يوازى الإتجاة الذى يسقط هو الأخر نقطة فى نفس الإتجاه $N_5O_5=g_5$، نعود بهذة النقطة الناتجة على مساقط المستقيمين مباشرة فيكون $K_3,U_3$ هو القاطع حيث يظهر طولـــة الحقيقى فى الثلاثات.




شكل 200

## الزاوية الزوجية بين مستويين ( الطريقة الأولي )

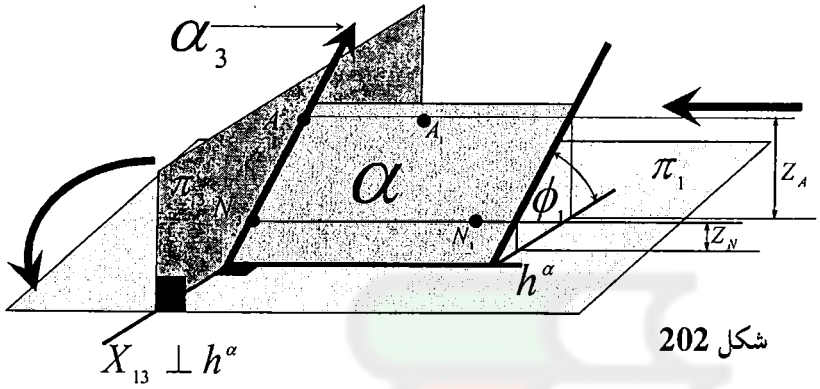
وكأحد التطبيقات لتحويل المستقيم إلى نقطة هو الزاوية الزوجية بين المستويين .ولفهم هذة الحالة يمكن النظر فى إتجاة السهم شكل **201** نجد أن الزاوية الزوجية بين مستويين عموديين على الأفقي هى الزاوية المحصورة بين المستويين وتظهر عندما يكون خط التقاطع للمستويين مسقطه عبارة عن مستقيم رأسى مسقطه الأفقي هى نقطة وهو رأس الزاوية (الشكل الفراغى).لذلك لتعين الزاوية المحصورة بين مستويين نحول خط تقاطع المستويين إلى الوضع العمودى على مستوى إضافي أى مسقطه يكون نقطة فيظهر كل من المستويين *خطى المسقط* متلاقين في نقطة . تكون الزاوية بين خطى المسقط هى الزاوية الزوجيه شكل**201**.




**شكل 201**

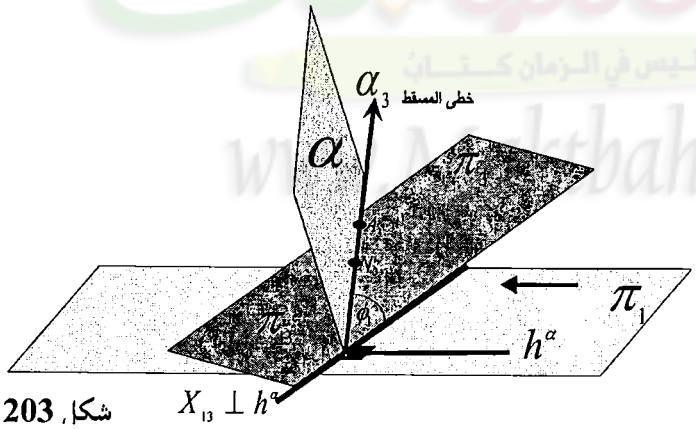
## تحويل المستوى إلى مستوى خطي المسقط / تحويل المستوى من وضع عام الي مستوى عمودى

شكل **202** يوضح المستوى $\alpha$ المتقاطع مع المستوى الأفقى $\pi_1$ فى $h^\alpha$ ، وكذلك المستوى $\pi_3$ العمودى علـى المستوى الأفقى وأيضا عمودى على المستوى $\alpha$ وبالتالى فهو عمـودى علـى خـط تقاطعهما $h^\alpha$ ، وكذلك يكون خط تقاطع المستوى $\pi_3$ مـع المستوى الأفقى $\pi_1$ هو خـط



شكل **202**

أرض جديد $X_{13}$ وعمودى على الأثر الأفقى $h^\alpha$ شكل **202** . ومن ذلك نكون علمنا أنه يمكن تمريـر خـط أرض جديد يسمى $X_{13}$ عمودى على $h^\alpha$ ويعبر حينئذ عن أنه تم إستخدام مستوى إضافى عمودى على المستوى الأفقـى. ومن شكل **202** نلاحظ أن المستوى $\pi_3$ يقوم بعد بالإلتصاق فى المستوى $\alpha$ عن طريق الأثر للمستوى $\alpha$ على المستوى $\pi_3$ وهو مايسمى $\alpha_3$ ونلاحظ أننا لو نظرنا فى إتجاه السهم من اليمين ← سيكون مسقط المستوى $\alpha$ على المستوى $\pi_3$ هو خطى وهو $\alpha_3$ ، وكذلك مسقط النقطة $\mathbf{A_1}$ و $\mathbf{N_1}$ يكونا على $\alpha_3$ وعلى نفس الإرتفاع $\mathbf{Z}$ عن المستوى $\pi_1$ وتتضح الزاويـة الأصـلية لميـل المستوى $\alpha$ على المستوى الأفقـى وهى $\phi_1$ بين كل مـن $X_{13}$ و $\alpha_3$ . وكل ذلك لتوضيحه يتم دوران المسـتوى $\pi_3$ عكـس عقـارب الساعة حتى ينطبق على المسـتوى



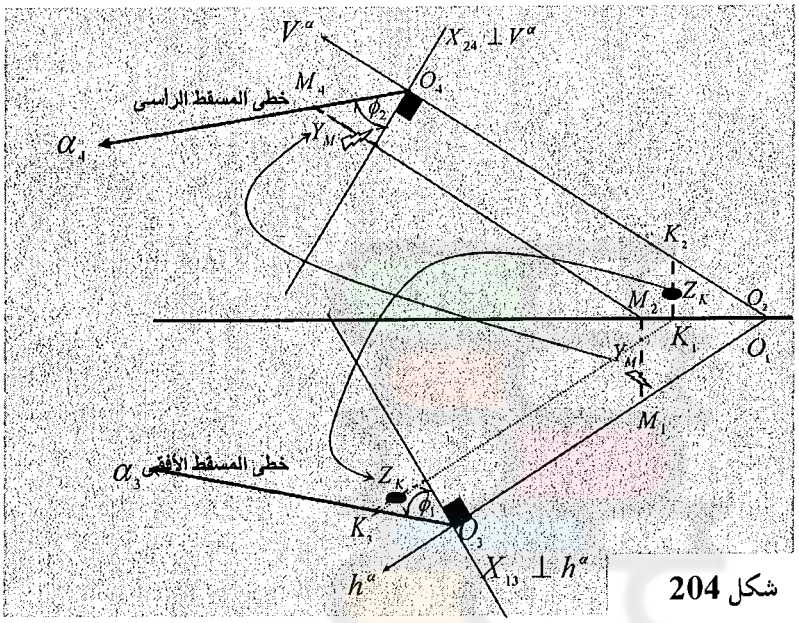
شكل **203**

الأفقى وهو ملتصق فى $\alpha$ . ومن ذلك يتنج شكل **203** الذى يوضح أن شمال خط الأرض الجديد $X_{13}$ أصبحالمستوى

$\pi_3$ وكأنه أفقيا وكذلك $\alpha_3$ موجودة فيه والمستوى $\alpha$ قائم وخطى المسقط على $\pi_3$ وتقع عليه كل المساقط للنقاط الموجودة فى $\alpha$ ولكنها تحمل رقم **3** .

**<u>ولتنفيذ ذلك وصفيا يتم الأتى:</u>**

تعين الأثر المساعد للمستوى: يتم إختيار أى نقطة واقعة على الأثر الرأسي مثل $\mathbf{N_2}$ وبالتالي مسقطها الأفقي $\mathbf{N_1}$ على خط الأرض ونرسم منه عمودى على $X_{13}$ الجديد وبعدة نقيس البعد $\mathbf{Z_N}$ فيتحدد $N_3$ شكل **203**و **202** حيث تقع على الأثر الجديد $\alpha_3$ للمستوى العمودى ونستنتجه بتوصيل نقطه $N_3$ مع نقطه تقاطع $h^\alpha$ مع $X_{13}$




شكل **204**

وهى $\mathbf{O_3}$ فنحصل على $\alpha_3$ وهو مسقط المستوى $\alpha$ فى $\pi_3$ ويصبح مستوى خطى المسقط. ويصبح هذا إسلوب تحويل مستوى $\alpha$ من وضع عام بالنسبه إلى $\pi_1$ إلى مستوى عمودى بالنسبة لمستوى إضافي $\pi_3$ *عمودى عليه*. وبذلك يكون دائما الأثر $h^\alpha$ عموديا على خط الأرض (المستوى $\pi_3$ مع $\pi_1$ ) وهو $x_{13}$ ويمكن تكرار كل ذلك بالنسبة $\pi_2$ حيث نختار مستوى عموديا على $\pi_2$ ، وبالتالي $V^\alpha \perp X_{24}$ ، ولنأتي بالأثر الباقي $\alpha_4$ نأخذ نقطة مثل $\mathbf{M_1}$ على الأثر الأفقى ومنها $\mathbf{M_2}$ على خط الأرض ومن خلال $Y_M$ نحصل على $M_4$ وعلية نوجد $\alpha_4$ بتوصيل نقطه تقاطع $V_\alpha$ و $X_{24}$ وهى $\mathbf{O_4}$ مع $M_4$ كما حدث في $\alpha_3$. ويمكن أن نحصل على كل من $\alpha_3$ من خلال إيجاد المسقط الثالث على المستوى الأفقى لمجموعة من النقاط تقع فى المستوى (على الأقل إثنين ونصلهم ببعض) ، أو $\alpha_4$ من خلال إيجاد المسقط الرابع على المستوى الرأسى لمجموعة من النقاط تقع فى المستوى (على الأقل إثنين ونصلهم ببعض). والان اصبح لدينا زواية ميل المستوى $\alpha$ على المستوى الأفقي وهي $\phi_1$ شكل **202**و **204** ، وكذلك زواية ميل المستوى $\alpha$ على

المستوى الرأسى وهي $\phi_2$ شكل **204** .( هذا للمستوى الممثل بأثرية وسيتم اجراء نفس الوضع عندما يكون المستوى ممثل بمستقيمين)

-تنبية – أى نقطة تقع في المستوى $\alpha$ عند نقلها إلى مستوى عمودى فإنها تقع دائما على الأثر الجديد للمستوى من خلال $Y_N , Z_N$ سواء كان $\alpha_3$ أو $\alpha_4$ .

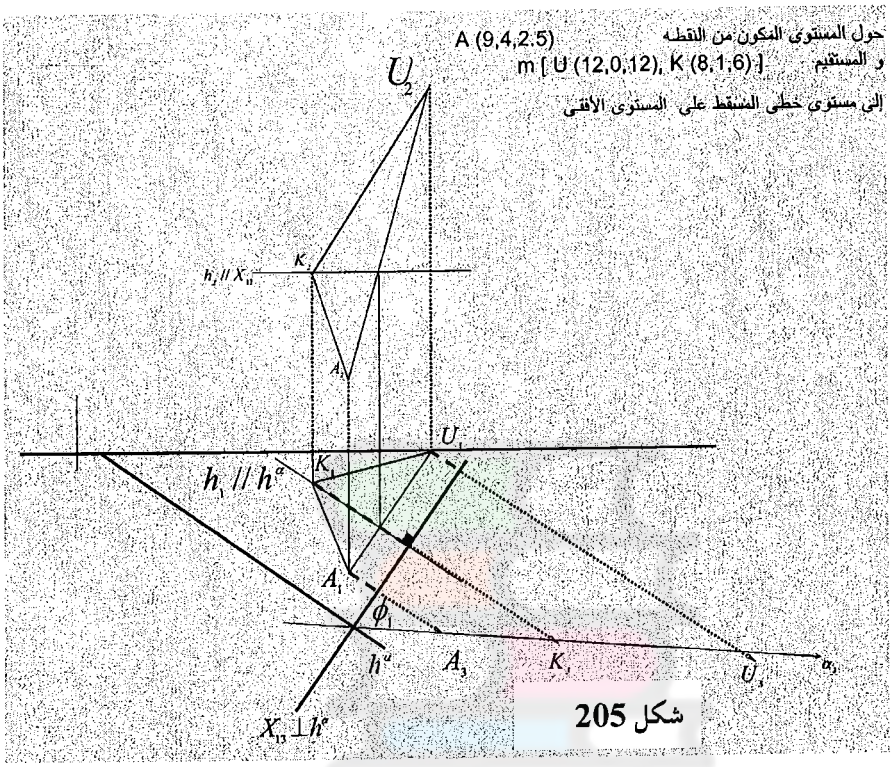
-عند تحويل المستوى إلى عمودى على الأفقي شكل **202**و **204** فان المستوى الجديد العمودى $(h^\alpha, \alpha_3)$ ما هو الا مستوى يشبه العمودى على الأفقي حيث $\alpha_3$ أثر المستوى على المستوى العمودى $\pi_3$ وعند تحويل المستوى إلي عمودى على الرأسي فإن المستوى الجديد يكون $(V^\alpha, \alpha_4)$ ماهو إلامستوى يشبه العمودى على الرأ سى كما في الإسقاط على $\pi_1$ ، $\pi_2$ .

**ماهى الاستفادة من تحويل المستوى إلى خطى المسقط**

1. معرفة زوايا ميل المستوى عل كل من المستوى الأفقى والرأسى، إستنتاج أثار المستوى على المستويين $\pi_1$ , $\pi_2$
2. إيجاد الإحداثيات الناقصة للنقاط
3. إيجاد نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى (مضلع تقاطع المستوى مع الكرة و كثيرات السطوح)
4. رسم مستوى يوازى مستوى على بعد ثابت
5. إمكانية رسم مستقيم يوازى مستوى من نقطة معلومة " تطبيق غير متاح فى أى باب أخر"

## مثال: الحصول على الأثار وزوايا الميل فى المستوى الأفقى

فى هذا المثال شكل 205 المستوى مكون من نقطة A ومستقيم m ، أى يمكن تكوين المستوى كاملا ، ولكى نحول المستوى لخطى المسقط الأفقى نستخدم $X_{13}$

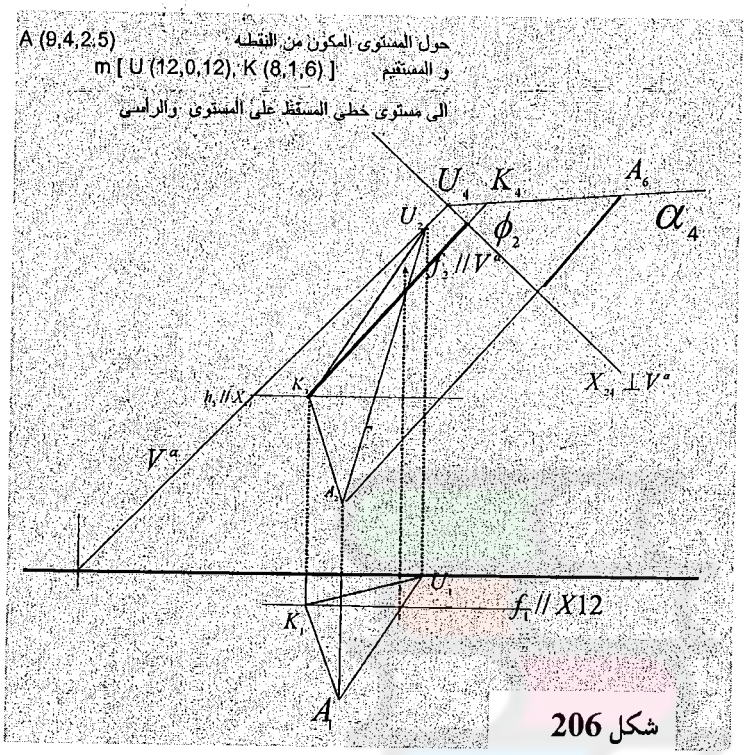


شكل 205

عمودى على الأثر الأفقى أو مايوازيه ونتيجة لأن الأثر غير موجود نبحث عن إتجاهه ويمكن بأن نمرر مستقيم أفقى $h_2$ كما فى الشكل 205 فنوجد مسقطه الأفقى $h_1$ وهو نفس إتجاه الأثر الأفقى وبالتالى يمكن رسم خط الأرض الجديد $X_{13}$ عمودى على $h_1$ ومن ثم نوجد المسقط الثالث لكل النقاط فى المستوى وهى $A_3, K_3, U_3$ ونجدها عند توصيلها تقع على خط واحد ويكون هو $\alpha_3$ ويتحول المستوى بذلك لخطى المسقط الأفقى.

بالإسلوب السابق نكون قد قطعنا خطوة نحو الإستفادة من الحصول على خطى المسقط فى مستوى ممثل بمستقيمين حيث يمكن الأن الحصول على أثار المستوى بأن نمد $\alpha_3$ حتى يقطع $X_{13}$ فى نقطة ستكون هى نقطة إنطلاق $h^\alpha$ الذى يُرسم عمودى على $X_{13}$ حتى يقطع خط الأرض ومنه نكمل رسم الأثر الرأسى للمستوى وكذلك نكون حصلنا على زاوية ميل المستوى $\alpha$ على المستوى الأفقى وهى $\phi_1$.

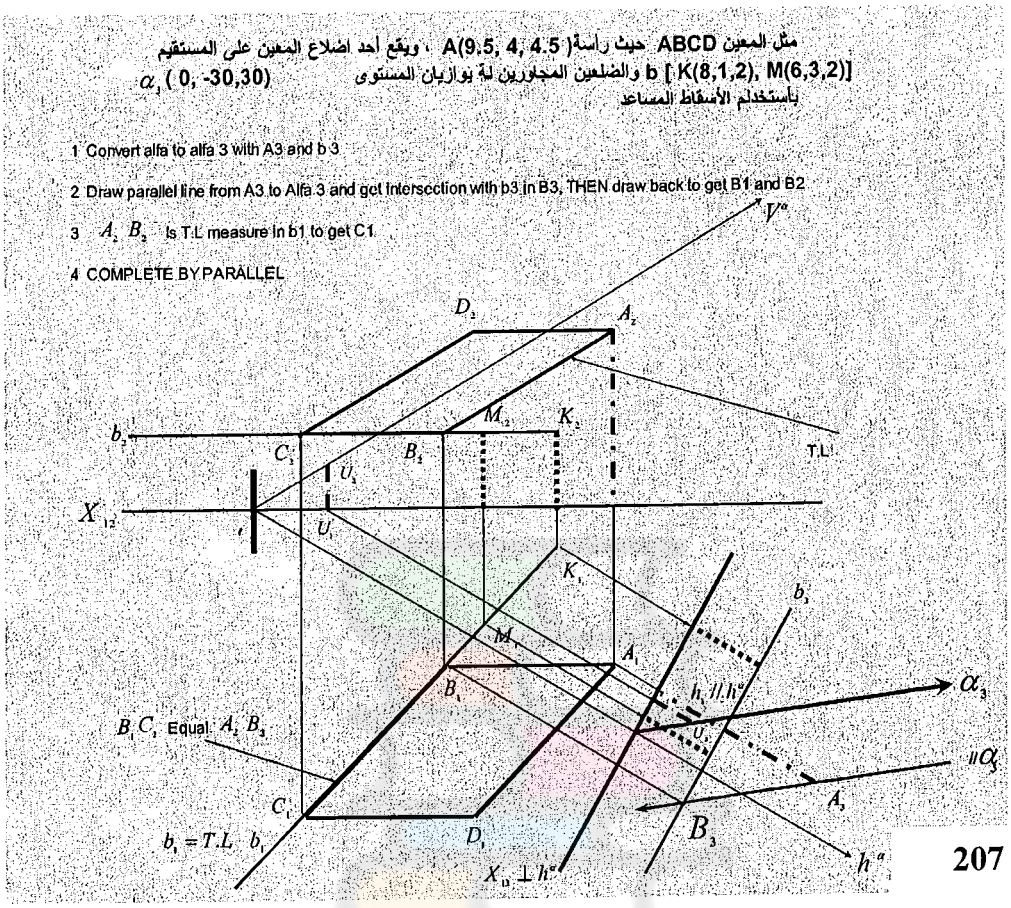
## الحصول على الأثار وزوايا الميل فى المستوى الرأسى




شكل 206

ولكى نحول المستوى لخطى المسقط الرأسى نستخدم $X_{24}$ عمودى على الأثر الرأسى أو مايوازيه ونتيجة لأن الأثر غير موجود نبحث عن إتجاهه ويمكن بأن نمرر مستقيم ,وجهى $f_1$ كما فى الشكل 206 فنوجد مسقطه الرأسى $f_2$ وهو نفس إتجاه الأثر الرأسى وبالتالى يمكن رسم خط الأرض الجديد $X_{24}$ عمودى على $f_2$ ومن ثم نوجد المسقط الرابع لكل النقاط فى المستوى وهى $U_4$, $K_4$, $A_4$ ونجدها عند توصيلها تقع على خط واحد ويكون هو $\alpha_4$ ويتحول المستوى بذلك لخطى المسقط الرأسى. بالإسلوب السابق نكون قد قطعنا خطوة نحو الإستفادة من الحصول على خطى المسقط فى مستوى ممثل بمستقيمين حيث يمكن الأن الحصول على أثار المستوى بأن نمد $\alpha_4$ حتى يقطع $X_{24}$ فى نقطة ستكون هى نقطة إنطلاق $V^a$ الذى يُرسم عمودى على $X_{24}$ حتى يقطع خط الأرض ومنه نكمل رسم الأثر الأفقى للمستوى.

www.Maktbah.Net




شكل 207

الحل:

1. نحول المستوى إلى خطى المسقط الأفقى باستخدام $X_{13}$ عمودى على $h^\alpha$ وأيضا يذهب معه كل من Aو b حيث نحصل على $A_3, b_3$ شكل 207
2. من $A_3$ نرسم مستقيم موازى للمستوى الخطى المسقط $\alpha_3$ فيقطع $b_3$ فى نقطة $B_3$ ونعود بها فنستنتج $B_1$و B
3. يتم قياس الطول الحقيقى للمستقيم AB على إتجاه الطول الحقيقى للمستقيم BC الواقع على المستقيم b إبتداء من نقطة B . كما تم فى حل نفس المثال فى الموضع. ونكمل الشكل 207

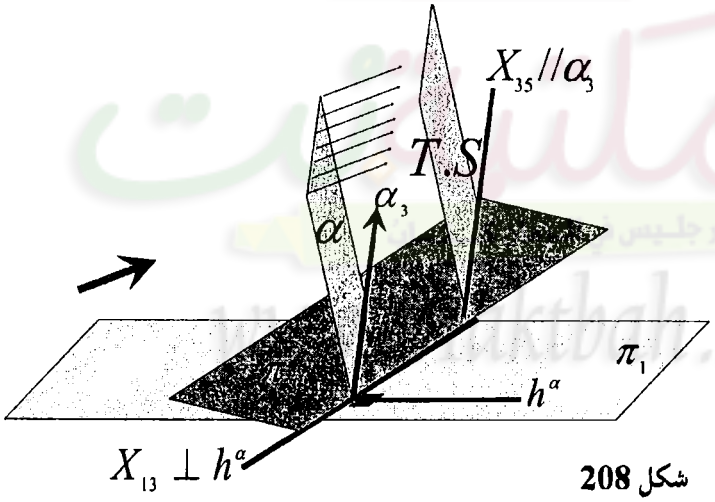
فى هذا المثال يتضح النتيجه الأتيه وهى:

الحاله الوحيده فى الهندسه الوصفيه التى يمكن فيها رسم مستقيم واحد يوازى مستوى ( ويوازى كل المستقيمات فيه) تتم بتحويل المستوى إلى خطى المسقط شكل 207. ونلاحظ أنه بتحويل المستوى إلى خطى المسقط تكون كل المستقيمات فى المستوى تقع على هذا الخط الموجود فى $\pi_3$ وهو $\alpha_3$ وعند هذا الوضع يتم رسم من أى نقطه فى الثلاثات مستقيم يوازى المستوى $\alpha_3$ لأنه سيوازى كل المستقيمات فى المستوى.

– يمكن إيجاد نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى أيضا بتحويل المستوى إلى خطى المسقطيم فتظهر نقطة التقاطع مباشرة فى الثلاثات ونرجعها على المستقيم مباشرة مثل نقطة تقاطع الموازى المرسوم فىشكل 207 مع $\alpha_3$ وهى $B_3$ ويظهر فى التطبيقات الخاصة بتقاطع المستوى مع أحرف كثيرات السطوح.

–لو عُلم مسقط نقطة في المستوى مثلا الأفقي وكان ناقص الأثر الرأسي للنقطة وكذلك الأثر الرأسي للمستوى غير المعلوم، وكانت زاوية ميل المستوى على الأفقي موجود فإنه باستخدام زاوية الميل $\Phi$ يمكن إيجاد البعد z في الإسقاط المساعد ونقله للمستوى الرأسي .

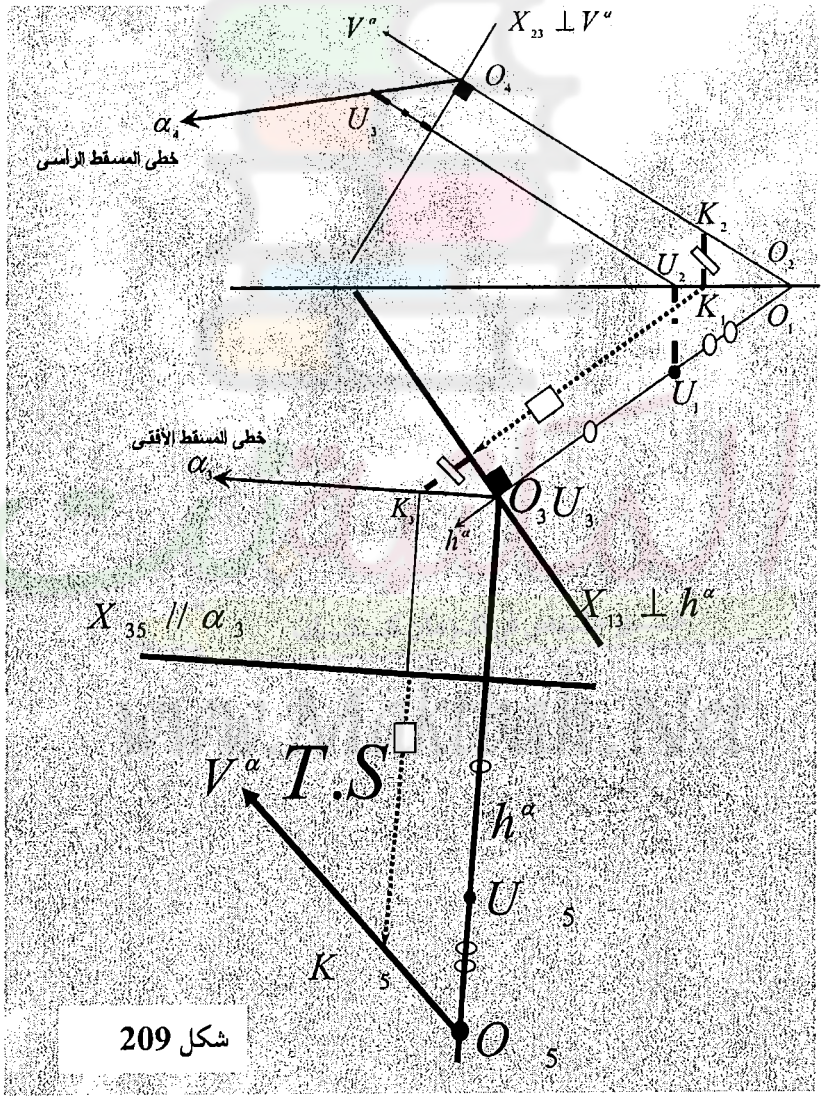
## جعل مستوى موازيا لمستوى المسقط ( لتعين الشكل الحقيقى للمستوى )




شكل 208

للحصول على الشكل الحقيقي للمثلث يتم أولا تحويل المستوى إلى مستوى عمودى بإستخدام $\pi_3$ عمودى على $\pi_1$ ونعين $O_3, U_3, K_3$ ونصلهم فيكون خط مستقيم $\alpha_3$ شكل 208و 209. نقوم بالإسقاط مرة أخرى بالإستعانة مستوى مساعد $\pi_5$ يعبر عنه بخط تقاطع هو $X_{35}$ يوازى $\alpha_3$ شكل 209و 208. ونعين المساقط المساعدة للنقاط $O_5K_5U_5$ بالأبعاد فوق خط الأض $X_{13}$

وعند الإسقاط فى $\pi_5$ نحصل نحصل على الشكل الحقيقي للمستوى شكل **209** حيث **OK** هو الأثر الرأسى و**OU** هو الأثر الأفقى شكل **209**. ومن ذلك نكون حصلنا على الشكل الحقيقى للمستوى بأثريه وكذلك الزاوية الحقيقة بين أثرى المستوى. ويمكن أن نوجد المنصف للزاوية بين أثرى المستوى من خلال التنصيف للزاوية فى "الخمســات) أى فى $\pi_5$ ونختار أى نقطة على المنصف ونرجعها فترجع على $\alpha_3$ ومن ثم لنأتى بالمسقط الأفقى لهذه النقطة ننقل الأبعاد تحت $X_{35}$ فوق $X_{13}$ ثم نصلها بالمسقط الأفقى لنقطة **O** فنحصل على مسقط المسقط الأفقى للمنصف للزاوية بين أثــرى المستوى. ويمكن احداث ذلك في المستوى الرأسي . كذلك اذا لم يكن المستوى $\alpha$ معلوم يتم الإستعانة بمستقيم أفقي أو وجهي كما سبق .




شكل 209

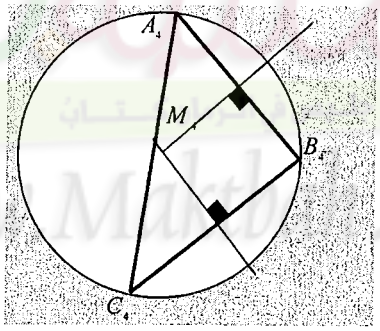
**مثال: المعلوم الثلاث نقاط الأتيـة: A,B,C أوجد الشكل الحقيقى للمثلث ABC ومركز الدائرة التى تمر بالرؤوس الثلاثة**

أولا : الشكل الحقيقى نأتى به بالإسلوب السابق حيث نمرر مستقيم أفقى h ونحول المستوى الممثل بالثلاث نقـــاط إلى خطى المسقط ومنه نحصل على الشكل الحقيقى $A_5B_5C_5$. شكل 210

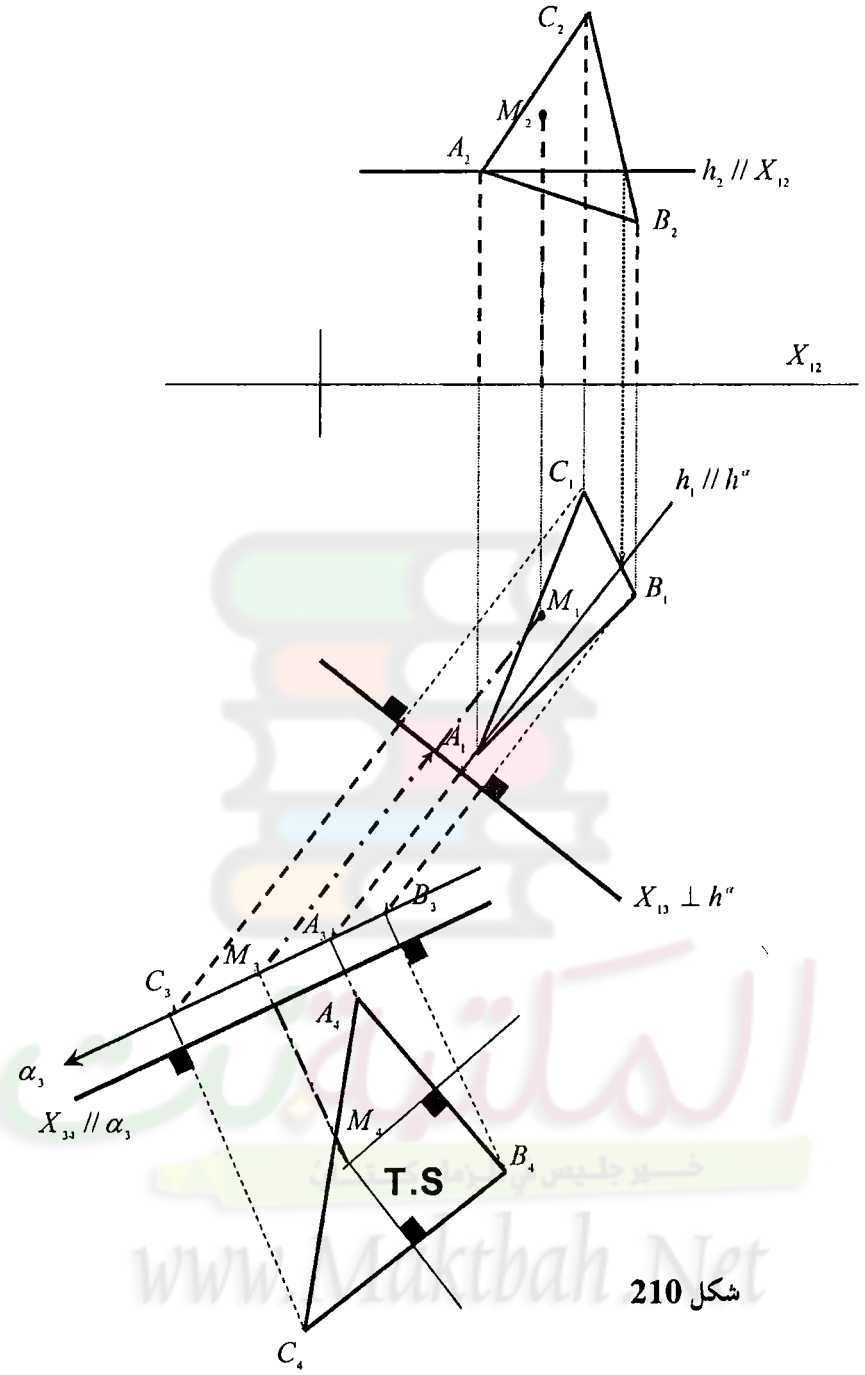
ثانيا: تأكيد الحل

الفكرة العامه أنة عند حل المسأله فى الهندسة المستوية ووجد أننا سنحتاج إلى رسم أكثر من عمود على أكثر من مستقيم للحصول على المحل الهندسى المطلوب " المركز " فإن هذا سيدفعنا إلى أن نبحث عن مكونات مستوى الشكل المطلوب ( الدائرة) والإعتماد عليها لتحويل المستوى إلى الشكل الحقيقى (T.S) وإيجاد المركز المطلوب على هذة الأعمدة فى ال T.S ثم الرجوع به إلى مستويات الإسقاط الأصلية 1و2. وذلك يتضح فى شكل الدائرة المرسوم فى الهندسة المستوية وكيفية الحصول عل المركز شكل 210و مثال شكل 211 .

قاعدة: مادام فى الحل بالهندسة المستوية سيتم عمل أكثر من عمود على أكثر من مستقيم تعرف على طول إنك لازم تروح بالمستوى فى الشكل الحقيقى لتحقيق المطلوب



المعلوم ثلاث نقاط C (5,2,7)  B (6,4,3)  A (3,7,4) والمطلوب تمثيل الدائرة التى يمر محيطها بالثلاث نقاط



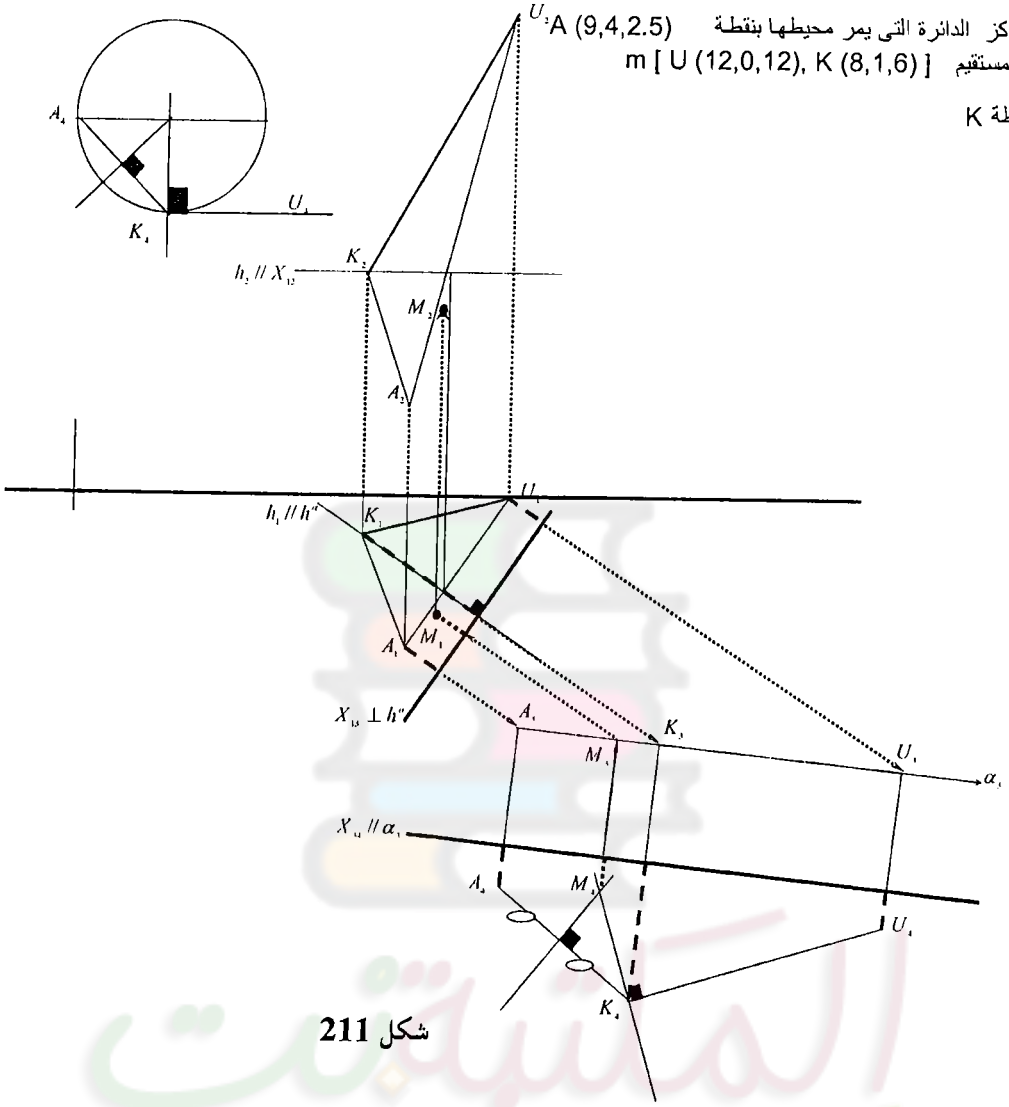

شكل 210

فى هذا المثال إستخدمنا $X_{34}$ فى المستوى الأفقى وهو يجوز لو أننا لن نستخدم الإسقاط فى المستوى الرأسى بنفس الرقم.

دكتور مهندس/ أحمد محمد القصاص

مثال:

أوجد مركز الدائرة التى يمر محيطها بنقطة A (9,4,2.5)
وتمس المستقيم m [ U (12,0,12), K (8,1,6) ]
عند النقطة K



شكل 211

## الزاوية بين مستقيمين شماليين

لإيجاد قيمة الزاوية بين مستقيمين شماليان لختار نقطة ما فى الفراغ ونرسم منها مستقيمين موازيان لهما وبذلك نتج الزاوية بين المستقيمين هي نفسها بين الشمالين ولكنها الأن بين مستقيمين يقعا فى نفس المستوى لذلك متجه للحصول على الشكل الحقيقى للمشتوى، فنمرر مستقيم أفقي مثلا **h** وبالتالي نسقط المستقيمين على مستوى عمودى ويتحول مستوى المستقيمين إلى خط $U_3$ , $N_3$ , $M_3$ ثم نسقط ثانيا على مستوى وبذلك تظهر الزاوية بشكلها الحقيقي . كما يحدث عند إستخراج الشكل الحقيقي لأى مسقط

# تمارين الإسقاط المساعد

1. المعلوم مستقيم B(2,6,3), a(A(5,2,1) عين بالإسقاط على مستويان إضافية الطول الحقيقي للمسافة AB وزاوية ميل المستقيم على $\pi_2,\pi_1$ .
2. مثل المربع ABCDمعلوم منه الضلع AB حيثا AB(5,5,6) اذا فرض ان $B_1C_1$ يميل30 مع $\alpha_{12}$ .

[من $\alpha_{13}$ نحصل على $A_3B_3$ نختار $N_1$نقطة على $B_1C_1$ونوجد لها $N_3$ونتقل $\Delta Z_N$ ونتقلها الي المستوى الرأسي .فنحصل على $N_2$ وخط عمل $B_2C_2$ وبالتالي نحصل على الطول الحقيقي ونقيس عليه فنحصل على $C_1$ وكذلك $C_2$ ونكمل المربع بالتوازى].

3. عين زاوية ميل المستوى (5,120,45) $\alpha$ على $\pi_2,\pi_1$ .
4. عين الشكل الحقيقي لمثلث رأسي C(2,9,5), B(1,4,1), A(4,1,3) ومثل دائرة تمس الاضلاع من الداخل
5. عين الشكل الحقيقي للمثلث C(18,4,3) , B(14,2,6) , A(11,7,2) ثم مركز الدائرة التى تمس رؤوسة
6. عين مقدار الزاوية بين أثرية المستوى $\alpha$ (4,120,45) ثم مثل منصفا هذه الزاوية .
7. المعلوم المستقيم[ B(2,9,5) ,( 5,2,1 )A] a عين بإسقاط على مستويات اضافية الطول الطول الحقيقي للمسافة AB وزاويتي ميل المستقيم a على $\pi_2,\pi_1$ .
8. المعلوم المثلث ABC فية A(0,0.5,5), B(3,3,1) , C(5,-1.5,3) عين الشكل الحقيقي للمثلث بإستخدام المستويات المساعدة .
9. بإستخدام مستوى اضافي عمودى على $\pi_2$ مثل مسقطى المثلث ABC الواقع في المستوى (-3,2,2) $\alpha$ إذا عملت ان : C(2,?,3) , B(-2.5,?,2) , A(0,y,l) .
10. عين زاوية ميل المستوى (5,120,45) $\beta$ على من $\pi_2,\pi_1$ .
11. المعلوم الأثر الأفقي h(1,135) لمستوى فاذا كانت زاوية ميل هذا المستوى على $\pi_1$ هي 60 و المطلوب تعيين الأثر الرأسي v لهذا المستوى وزاوية ميل المستوى على $\pi_2$ .
12. عين زاوية ميل المستوى $\alpha$ على كل من $\pi_2,\pi_1$ – اذا كان $\alpha$ معلوم بالمستقيمين المتقاطعين AB, CB حيث و B(4,2,6) ,A(8,4,3),C(1,7,1)
13. مثل مربعا مركزة M(8,7.5,5.5) واحد اضلاعة يقع المستقيم b حيث :( 3,11,5.5) b( 11,13,5.0)
14. مثل مربعا ABCD A(11,4.5,4) رأس فيه وأحد قطرية يقع على المستقيم (7,1,5) , a( 12,8,1) .
15. مثل المعين ABCD حيث رأسة A(9.5,4,4.5) – ويقع احد اضلاعة المعين على المستقيم b( L(8,1,2) M (6,3,2) ,و الضلعين المجاورين يوازيان المستوى $\alpha$ (30 , 30-,0) ذلك بإستخدام الإسقاط المساعدة .
16. إرسم المسقط على مستوى اضافي عمودي على $\pi_2$ ويميل 120 عل $\pi_1$ لهرم قائم رأسة V (4,4,5) وقاعدته في $\pi_1$ مربع احد قطرية يوازى خط الأرض X12 وطولة 5 سم .
17. مثل مثلث عموديا على $\pi_2$ متساوى الاضلاعة معلوم فيها الضلع b(6,2,5) A(3,3,7) مثل منشور قائما قاعدته هذا المثلث وطول حرفة 5 سم .

18. مثل مثلث متساوى الساقين قاعدته c(6,6,5) B(9,2,3) ورأسة A تقع على المستقيم ,d(7,1,1) (3,5,3) وعين طول الساق .

19. مثل مستقيم a يمر بنقطة N(3,2,1) ويقطع مستقيما (4,4,4) , b(8,2,2) ويتعامد على المستقيم c حيث (0,6,5) , c(5,1,1) .

20. مثل مربعا ABCD معلوم فيه B(6,4,5, A(3,2,2 و المسقط الأفقى $N_1$(1.2) لنقطة N يمر بها الضلع CD .

21. مثل مكعبا أحد أحرفة B(5,9.5,3) A(8,11,8) اذا فرض ان المسقط الأفقي لحرف ثان يمر بالرأس A يصنع زاوية 45 مع خط الأرض .

22. عين البعد بن مستقيمن متوازين n,m حيث C(5,8,6) n,m(B(9,3.5,2) يمر ينقسم A(8,2,4) اذكر الحل الفاغر مثل بالإسقاط .

المكتبة نت
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

# الباب الثامن

# القياس

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

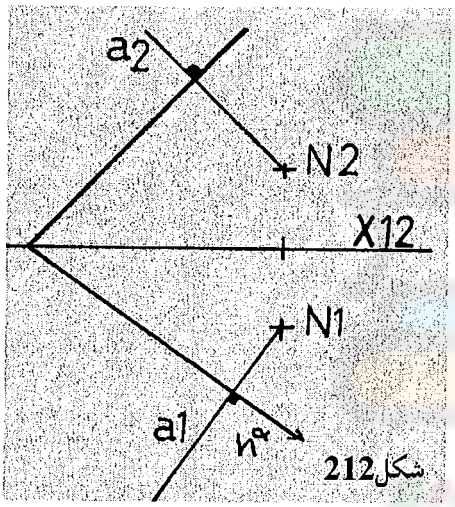
# القيـــــاس

يبحث موضوع القياس التعامد بين المستقيمات وبعضها ، والمستقيمات مع المستويات، وأيضا المستويات مـــع بعضها. وأيضا يبحث دوران نقطة ومستقيم ومستوى حول أحد المستقيمات الأفقية أو الوجهية أو مايناظرها من أثـــار المستوات ومايترتب على ذلك من إيجاد الأشكال الحقيقية للمستقيمات والمستويات والأشكال الهندسية الـــتى تقـــع فى مستوى وأحد، وأيضا التطبيقات المترتبة على ذلك.

## التعامد بين المستقيمات والمستويات

**a- تمثيل المستقيم العمودي من نقطة معلومة N على مستوى معلوم $\alpha$ ممثل:**

**أولا : المستوى معلوم بأثريه**

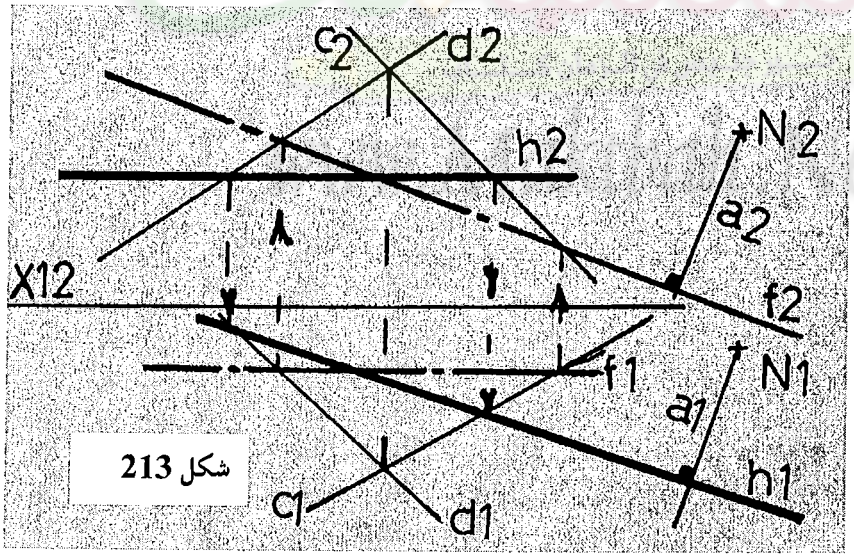


شكل212

**1-من $N_1$ نرسم خط $a_1$ عمـــودي علـــى الأثـــر الأفقـــى للمستوى $h^\alpha$ فيكون المسقط الأفقى للمستقيم العمودى a.**

**2-من $N_2$ نرسم خط $a_2$ عمودي على $V^\alpha$ فيكون المسقط الرأسى للمستقيم العمودى a . (يتم إسقاط أعمدة مباشرة لأن الأثار للمستوى أطـــوال حقيقيـــة والزاويـــة القائمـــة تُســـقط قائمة.....) شكل 212**

**ثانيا : المستوى ممثل بمستقيمين ( متوازين أو متقاطعين ) :**



شكل 213

(نكرر نفس البند السابق ولكن على إتجاه الأثـــار وذلك لأن العمودى على خـــط عمـــودى علـــى مايوازيه) شكل 213

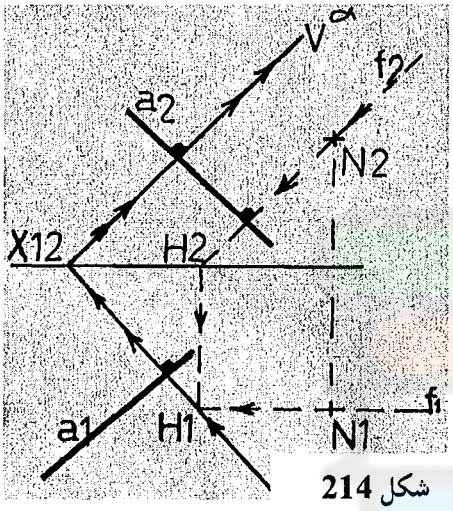
**1- مـــن $N_1$ نرســـم $a_1$ عمودي على $h_1$ وهو**

المسقط الأفقي للمستقيم الأفقى المُمرر فى مستوى المستقيمين وله نفس إتجاه الأثرالأفقى للمستوى (حيث $h^{\alpha} // h_1$).

2- من $N_2$ نرسم $a_2$ عمودي على $f_2$ وهو المسقط الرأسى للمستقيم الوجهي الممرر فى مستوى المستقيمين وله نفس إتجاه الأثر الرأسى للمستوى ( حيث $V^{\alpha} // f_2$ ) .

## b- تمثيل مستوى يمر بنقطة معلومة N وعمودي على مستقيم معلوم .

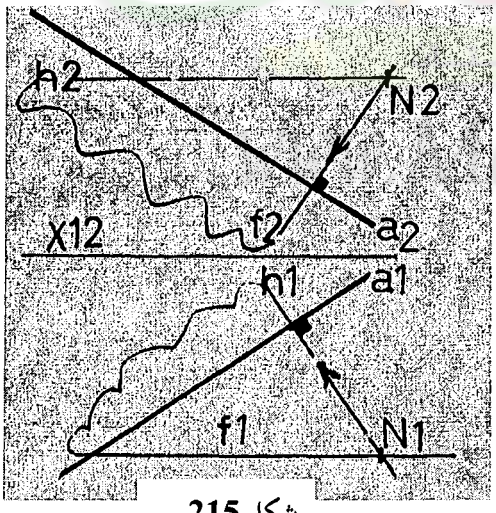
### 1- تمثيل المستوى العمودى بأثريه



شكل 214

يتم ذلك بإستخدام مستقيم أفقى عمودى أو وجهى عمودى ممرر من النقطه N فنحصل على الأثر للمستقيم العمودى الواقع فى المستوى شكل 214 وبالتالى نرسم من أثر المستقيم الأثر للمستوى عمودى على المسقط للمستقيم ومن نقطة تلاقى الأثر العمودى المرسوم مع خط الأرض نرسم الأثر الأخر للمستوى عمودى على المسقط الأخر للمستقيم . وكما بالرسم مثلا إستعنا بمستقيم وجهي عمودي $f$ وبالتالي أنه يمر ب N ومسقطه الرأسي $f_2$ عمودي على المسقط الرأسي للمستقيم $a_2$ وبالتالي نحصل على أثر المستقيم الوجهي $H_1$ ومنه نرسم أثر المستوى الأفقي $h^{\alpha} \perp a_1$ ومن تلاقية مع $X_{12}$ نرسم $\perp$ على $a_2$ فيكون $V^{\alpha}$.

### 2- تمثيل المستوى العمودى بمستقيمين متقاطعين .



شكل 215

-من نقطة N1 نستعين بمستقيم أفقي فيه $h_1$ عمودي على $a_1$

-وكذلك من $N_2$ نستعين مستقيم وجهي $f_2$ عمودي على $a_2$

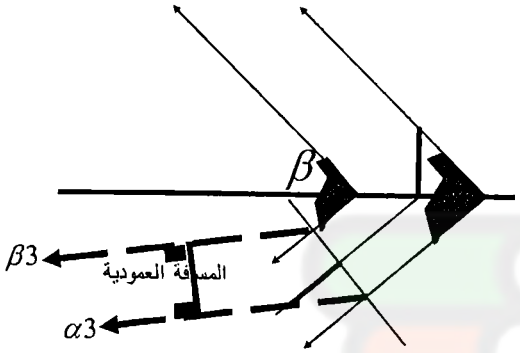
ويصبح المستوى العمودي مكون من مستقيمين أفقي و وجهي ويمران ب N . شكل 215

## تمثيل مستوى يمر بمستقيم معلوم وعمودى على مستوى معلوم

نختار أي نقطة على المستقيم ونعتبرها N ونسقط منها أعمدة على الأثر كالحالة الأولى . وبالتالي يكون المستوى المطلوب هو المكون من المستقيم و العمودي على المستوى .

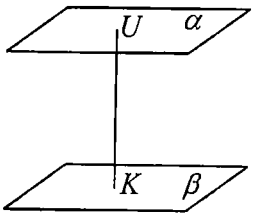
## أقصر بعد بين مستويين متوازين

*الحل الأول: بإستخدام الإسقاط المساعد نحول المستويين إلى مستويين خطى المسقط فتكـــون المســـافة العموديـــة واضحة وظاهرة بطولها الحقيقي. شكل 216




شكل216

* الحل الثانى: نختار فى المستوى $\alpha$ نقطة واقعة فيه هى U شكل 217 من خلال أي مستقيم أفقي أو وجهي في المستوى ونسقط منها عمودي على المستوى الأخر $\beta$ ونأتي بتقاطع العمودي مـــع هذا المستوى K ثم نأتي بالطول الحقيقي للجزء UK وهى بداية من نقطة الإسقاط وحتى نقطة التقاطع .



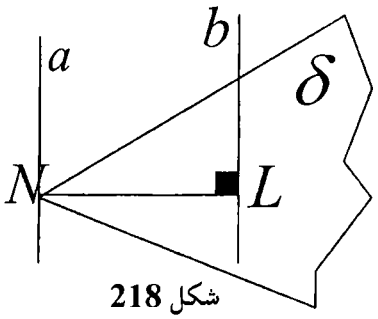

شكل 217

## رسم مستوى يوازى مستوى ويبعد عنه مسافة معينة:

يمكن إستخدام الإسقاط كما سبق فى البند السابق بتعين البعد بين مستويين متوازين بالإسقاط المساعد حيـــث نحصـــل على $\alpha_3$ ونقيس البعد العمودى المطلوب ثم نرسم من نهايته مستوى $\delta_3$ أثاره توازى أثار المستوى $\alpha$ –أو نختـــار أي نقطة على $\alpha$ ونقيم منها عمودي على المستوى نفسة ونختار أي نقطة على هذا العمودي وتأتي بطوله الحقيقي وعلية ( على خط الطول الحقيقي )نعين البعد المطلوب ومنه نرسم أثار المستوى الجديد توازى أثار المستوى القديم .

## أقصر بعد بين مستقيمين متوازيين

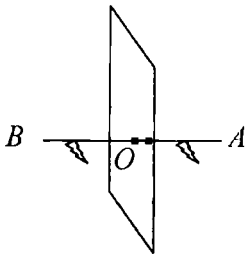
نختار أي نقطة N على أحد المستقيمين ولـيكن علـى a ونرسم منها مستوى $\delta$ عمودي على المستقيم الأخر b ونأتي بنقطة تقاطع b مع $\delta$ تكون L ثم نأتي بالطول الحقيقي لهذا المستقيم وهو NL . (تستخدم هذه النظرية للحصول على بعد نقطـة N عـن مستقيم b ) شكل 218



شكل 218

## المحل الهندسي للنقط متساوية البعد عن نقطتين A,B :

ننصف المسافة AB فى O ونرسم منها مستوى عمودي $\alpha$ على AB ويكون هو المحل الهندسي لجميع النقاط المتساوية البعد عن النقطتين . شكل 219

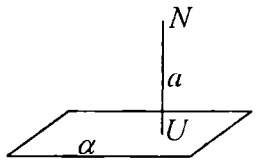


شكل 219

## بعد نقطة N عن مستوى $\alpha$

هو طول العمود الساقط من النقطة N إلى نقطة تقاطع العمود مع المستوى $\alpha$ .

1. نسقط عمود من النقطة N على المستوى a شكل 220
2. نوجد نقطة تقاطع العمودى a مع المستوى وهى U
3. نوجد الطول الحقيقى لهذا العمودى NU



شكل 220

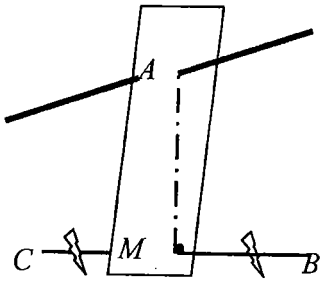
## نتائج

1. مستقيم عمودى على مستوى فى وضع خاص " عمودى على(المستوى الأفقى أو الوجهى أو الجانبى )" هـو مستقيم فى وضع خاص موازى (المستوى الأفقى أو الوجهى أو الجانبى) بالترتيب ويظهر بطولـه الحقيقـى فى المستوى الموازى

2. مستوى عمودى على مستقيم فى وضع خاص عمودى على(المستوى الأفقى أو الوجهى أو الجـانبى ) هـو مستقيم فى وضع خاص موازى (المستوى الأفقى أو الوجهى أو الجانبى) بالترتيب

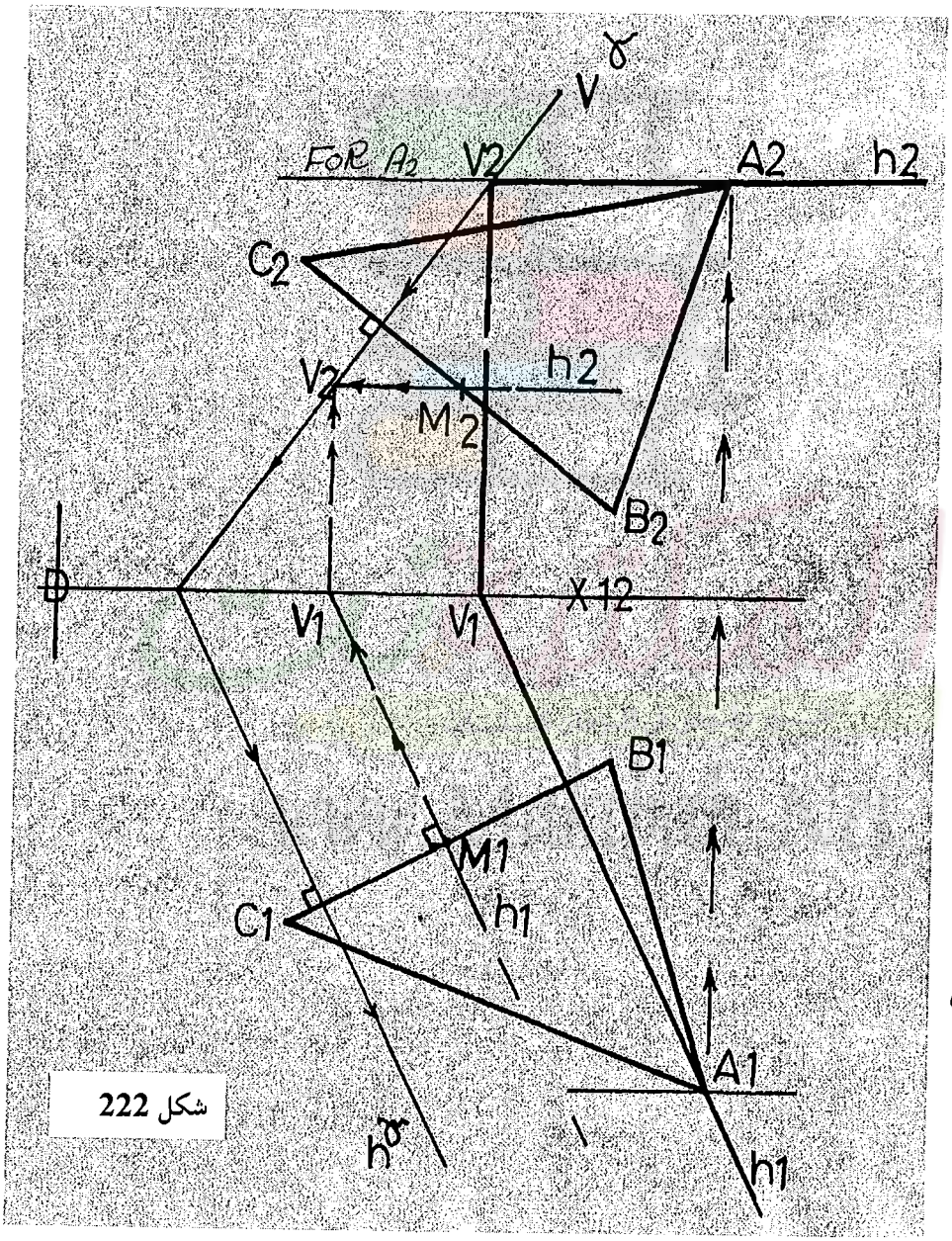
**مثل المثلث ABC المتساوى الساقين الذي فية A(X,6,5),B(7,2,1),C(3,4,4) حيث AB=AC**

الحل الفراغى:



شكل 222

من المعطيات الفراغيه شكل 221 يتضح وجود القاعده للمثلث المتساوى الساقين ولايوجد سوى الحل الهندسى للرأس، ومن خواص المثلث المتساوى الساقين فإن العمود القائم من منتصف القاعده يمر بالرأس، ونحن نعلم انه لا يمكن رسم مستقيم عمودى على مستقيم (لأن الإتجاه غير محدد) وإنما يتم رسم مستوى عمودى على مستقيم حيث يحتوى كل المستقيمات العموديه المطلوبه وبداخله ستكون نقطه A الواقعه على العمودى القائم من المنتصف كما بالشكل الموضح.



شكل 222

الحل الوصفى:

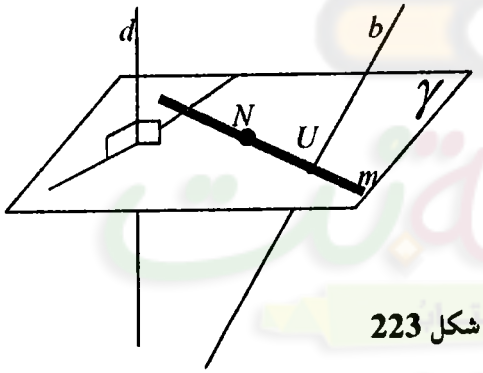
1- ننصف CB في M شكل 222

2--من نقطه M منتصف BC نرسم مستوى $\gamma$ عمودي على BC باستخدام مستقيم أفقى عمودى h يمر بـ M شكل 222

3- نقطه A تقع على المحل الهندسى لها وفى المستوى العمودى $\gamma$ . وبالتالى فهى تقـع فى المستوى وتحقق الأحداثيات Y,Z لنقطه A ، ولذلك يمكن الإعتماد على الأحداثى Z وغرر أفقى داخـل المسـتوى فيتحدد من ذلك $A_1$ ومنه نأتى بالمسقط $A_2$ شكل 222.

**المعلوم نقطة (N(3,2,1) ومستقيمان شماليان d, b والمطلوب تمثيل مستقيم m يمر بنقطة N ويقطع B ويتعامد على d. [b[(4,6,6), (8,1,2)] d[(0,6,5), (5,1,1)] . اذكر الحل الفراغي ثم مثل بالإسقاط**

أسلوب التفكير: هذا النوع من أنواع التمارين الكلاميه أى التى ترتبط بشروط موضحه فى المطلوب، وإذا أمعنا فى الشروط المطلوبه نجد أنها هى خطوات الحل. فنجد أن المطلوب مستقيم يمر بN ويقطع b ويتعامد على d .



شكل 223

بالتالى فإن الحل هو عكس إتجاه هذا الكلام المطلوب، أى نرسم عمودى من N ثم نأتى بنقطه التقاطع. ومن هذا الحوار نبحث ماهو العمودى هل مستقيم أم مستوى، نجد أنه هناك نتيجه تحدثنا عنها سابقا وهى ; أنه عندما نجد اننا سنرسم عمودى على مستقيم فإنه لن يكون إلا مستوى عمودى لأنه سيشمل كل المستقيمات العموديه على هذا المستقيم ويتوقف إختيار المستقيم العمودى المطلوب على طبيعه التمرين المطروح أو باقى الشروط المطلوبه. ومن المستوى العمودى المرسوم سنرى ماهى النقطه التى تقع على المستقيم الأخر $b$ وتقع فى هذا المستوى فنجد أنها نقطه تقاطع المستقيم $b$ مع المستوى العمودى $\gamma$ المرسوم من نقطه $N$ وهى النقطه $U$ شكل 223. وبالتالى القاطع المطلوب هو المستقيم الذى حقق الشروط المطلوبه وهو $NU$ حيث أنه عمودى على $d$

ويقطع $b$ فى $U$. ويجب أن تعلم أن شرط أن يكون مستقيم عمودى على مستقيم هو أن يقع فى مستوى عمودى عليه وليس أن يقطعه كما نلاحظ فى الشكل الفراغى حيث $NU$ عمودى على $d$ ولايقطعه شكل 223.

الحل الفراغى: (شكل 223 )

1- من نقطه N نرسم مستوى $\gamma$ عمودى على المستقيم $d$

2- نوجد نقطه تقاطع المستقيم $b$ مع المستوى $\gamma$ هى نقطه $U$

3- نصل نقطه $U$ بنقطه $N$ فيكون القاطع المطلوب

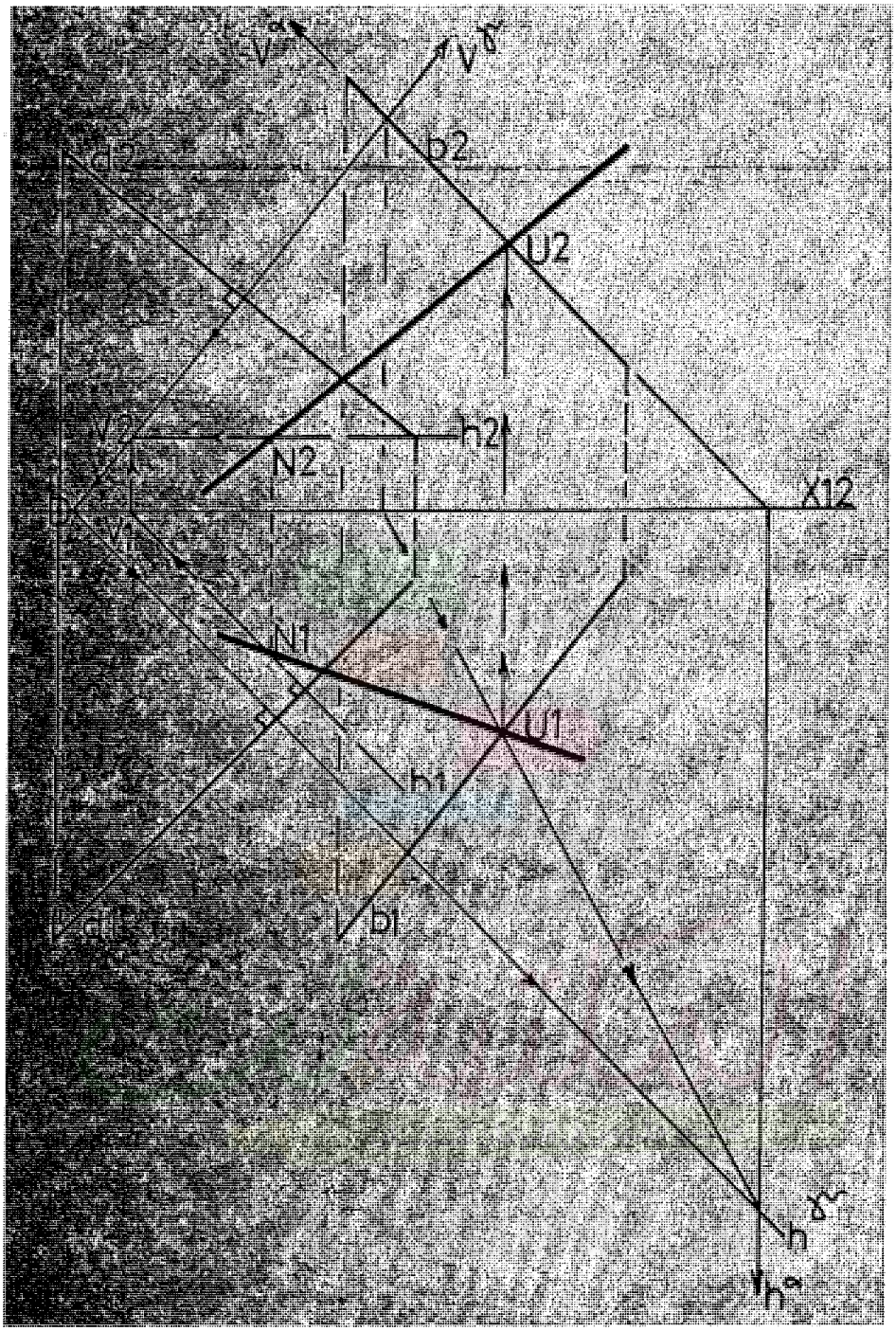
الحل الوصفى:

هو تنفيذ الخطوات الفراغيه بما يحققها من الخطوات التى تعلمناها فى الهندسه الوصفيه شكل 224 كالأتى:

1- من نقطه N نرسم مستوى عمودى على المستقيم d وذلك بإستخدام مستقيم أفقى عمودى أو وجهى عمودى نحصل على أثره ومنه نرسم أثار المستوى عموديه على مساقط المستقيم

2- نوجد نقطه تقاطع المستقيم b مع المستوى العمودى وذلك بتمرير مستوى فى وضع خاص بالمستقيم فتتحول الحاله لخط تقاطع مستويين ، خط التقاطع الناتج يقطع المستقيم فى نقطه U شكل 224

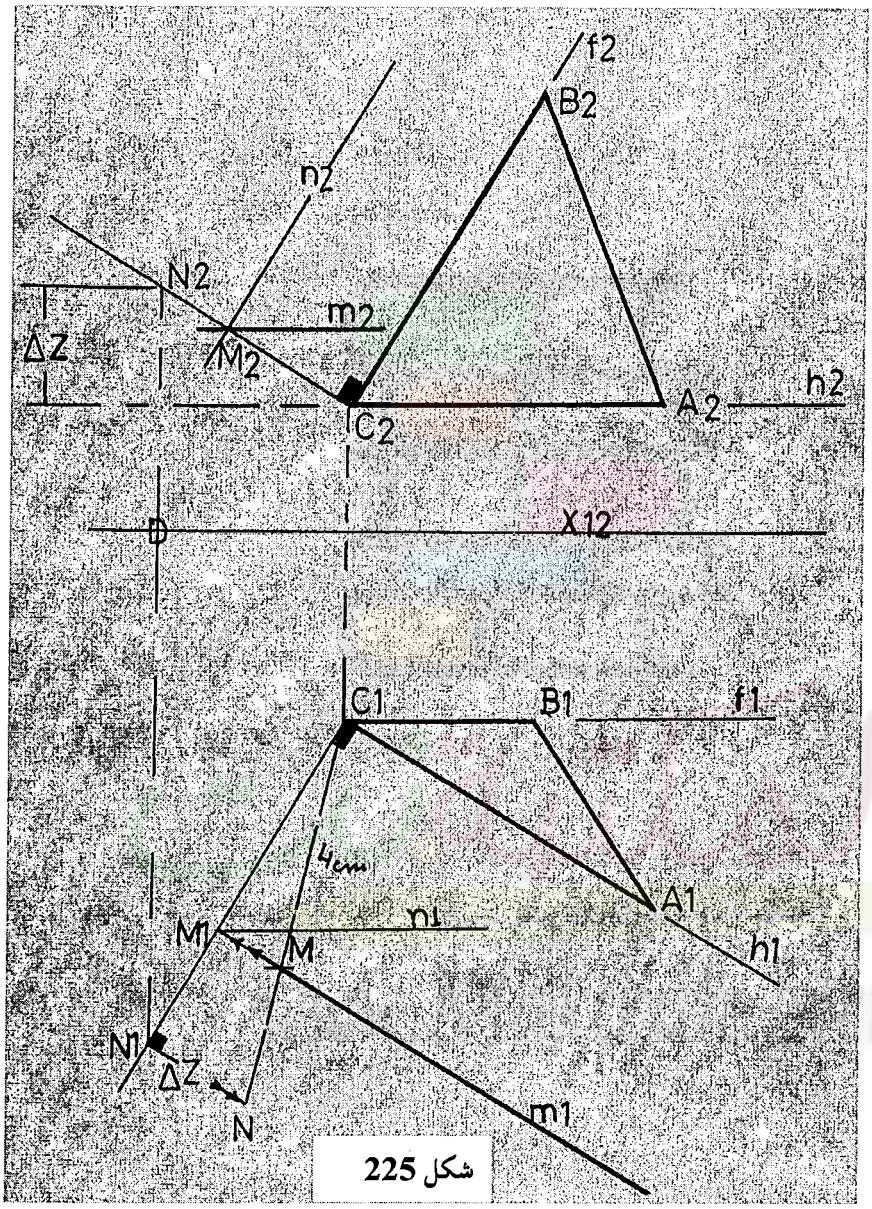
المكتبة نت
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net




شكل 224

**المعلوم المثلث A(8,6,2),B(6,3,7), C(3,3,2) ، المطلوب تمثيل المحل الهندسى للمستقيمات التى توازى مستوى المثلث وتبعد عنه 4 cm .**

الحل: المحل الهندسى للمستقيمات التى توازى مستوى المثلث هو المستوى الذى يوازى مستوى المثلث ويبعد عنه 4 سم ، وليتم ذلك يتم عمل الأتى :



شكل 225

1- نرسم مستقيم عمودى على مستوى المثلث من أى نقطه بالمستوى شكل 225. وليتم ذلك لابد من معرفه إتجاه أثار المستوى ونتيجه لأن المستوى ممثل بثلاث نقاط فإننا نلجأ إلى تمرير مستقيم أفقى لنعرف إتجاه $h^{\alpha}$ ومستقيم وجهى لنعرف إتجاه $V^{\alpha}$ لمستوى المثلث ( وكحاله خاصه فى هذا المثال فإن CA أفقى وCBوجهى ).

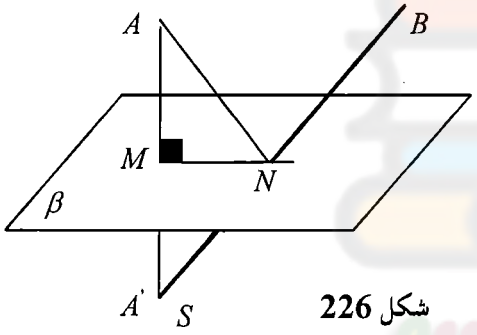
2- من أى نقطه أختياريه فى المستوى ولتكن C نقوم بإسقاط العمود المطلوب

3- نختار أى نقطه أختياريه على العمود ولتكن N لتحديد إتجاه الطول الحقيقى للعمود وقياس عليه طول 4 سم وتحديد مسقط النقطه وهى M.

4- من M نرسم مستوى يوازى مستوى المثلث ABC وذلك برسم مستقيم أفقى m موازى للأفقى الموجـــود بمستوى المثلث وكذلك مستقيم وجهى n موازى للوجهى الموجود بمستوى المثلث. كما بالشكل الموضح 225

**المعلوم نقطتان A(1,1,1) ,B(6,3,-1) ومستوى $\beta$ والمطلوب تمثيل نقطه فى $\beta$ ولتكن N بحيث يكون طول BN+AN أقل مايمكن فى الحالات الاتيه:**

**1-المستوى ($\beta$ (8, ∞,150$^0$)  2- ($\beta$ (10, 45$^0$, 150$^0$) . مثل الحل الفراغى**



شكل 226

فكره الحل:فى شكل 226 أقصر مسافه بين نقطتين فى إتجـــاهين مختلفين مثل A,A' متماثلتين بالنسبه لمستوى " بالنسبه لنقطه M اى على العمودى على هذا المستوى " هى الخط الواصل بينهما، ولو كانت النقطتين فى إتجاه وأحد لمستوى مثل A,B فإن أقصـــر مسافه بينهما هى مسافه الخط المستقيم الواصل بين B والنقطـــه المتماثله للنقطه A بالنسبه للمستوى وهى A' حتى تشكل نفس الخط المستقيم المباشر " كمـــا فى الشـــكل الفراغـــى الموضح" وهو الخط الذى يقطع المستوى فى نقطهN شكل 226.

الحل الفراغى والوصفى شكل 227 و228:

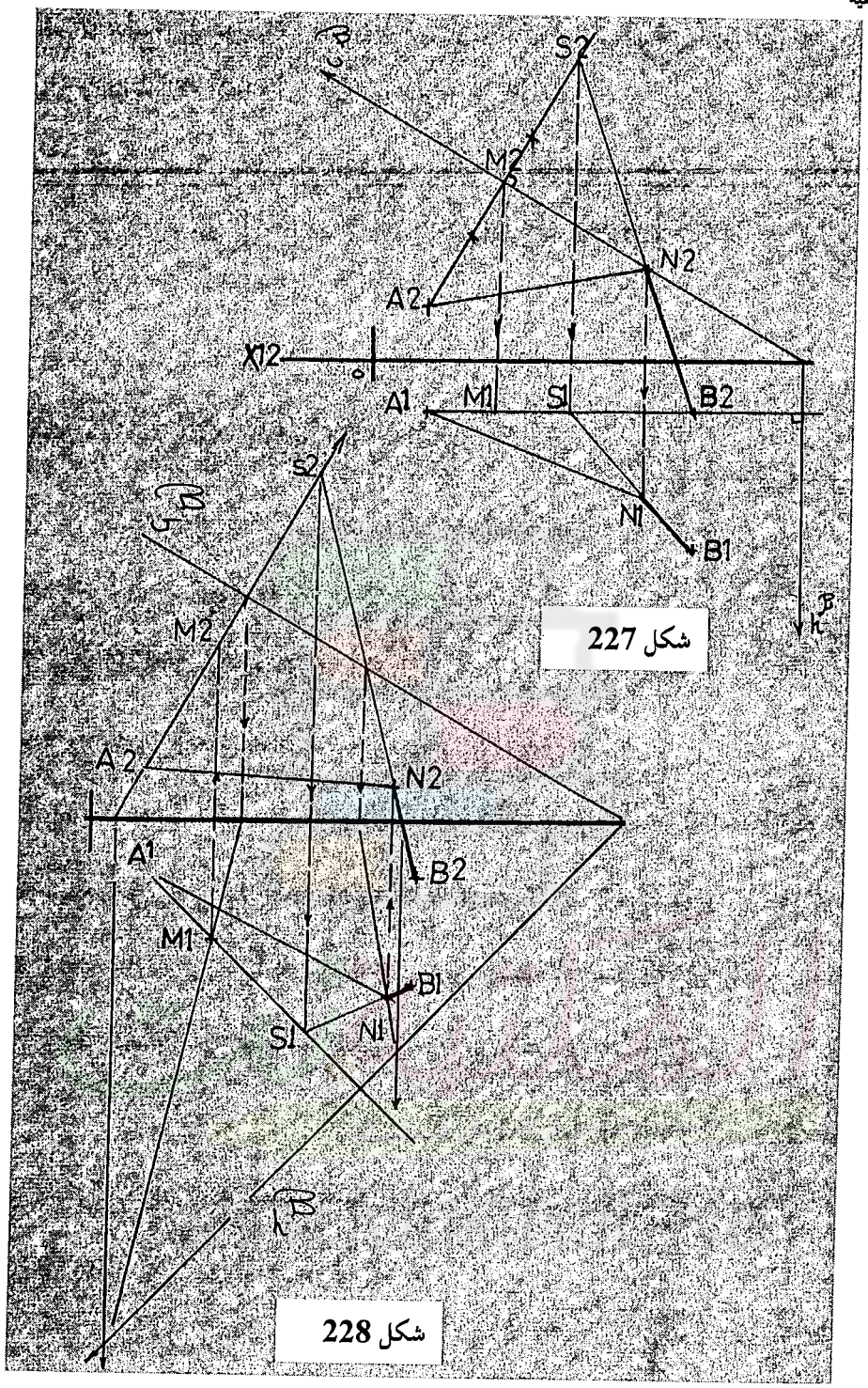
1- من نقطه A نسقط عمودى على المستوى $\beta$ .

2- نوجد نقطه تقاطع العمودى مع المستوى $\beta$ وهى نقطه M.

3- نوجد النقطه A' بالقياس المباشر من نقطه A على العمودى ونسميها مثلا S.

4- نصل نقطتى S,B فيكون هذا هو أقصر بعد بين S,B .

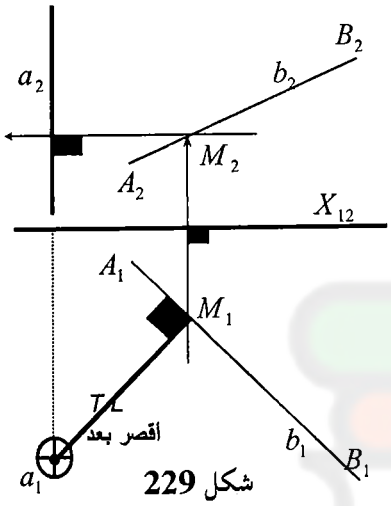
5- نوجد نقطه تقاطع SB مع المستوى $\beta$ فتكون نقطه N.




6- أقصر بعد هو AN+NB .

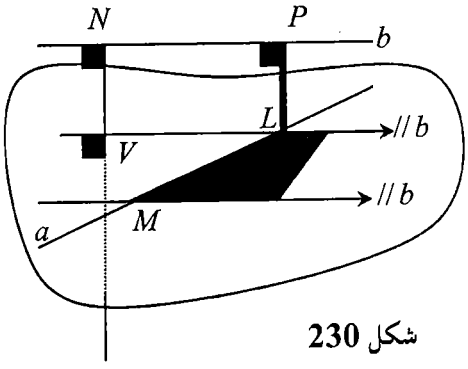
**عين بإستخدام القياس أقصر بعد العمودي المشترك بين المستقيمين الشماليان [b[(A(5,1,4) , )B(10,4,6 و الثاني اذا كان أولا : a رأسيا [a[(6,5) ، ثانيا : a[(11,6,2) ,(7,0,3)]**

الحل: أولا : هذه الحاله الأولى هى الحالة الخاصة



شكل 229

نجد أنه لو كان المستقيم $a$ رأسى عمودى على $\pi_1$ فإن مسقطة الأفقى نقطة كما بالشكل الموضح 229 ومسقطة الرأسى T.L. وبالتالى العمودى علىهذا المستقيم الرأسى $a$ هو مستقيم أفقى يوازى $\pi_1$ "العمودى على العمودى يكون موازى" وعلية فإن مسقطة الرأسى يوازى خط الأرض ويظهر فى الأفقى T.L وبالتالى يمكن رسم عمودى بين المستقيمين $a, b$ حيث يتم رسم من المسقط الأفقى $a_1$ عمودى على $b_1$ حيث $b_1$ ليس T.L ولكن العمودى الذى سيتم رسمة هذة المرة هو الذى يكون طولة T.L لأنة عمودى على $a_2$ وبالتالى يكون مستقيم أفقى T.L شكل 229.وبذلك يكون ملخص الحل فى ثلاثة أعمدة من مسقط المستقيم الأول $a_1$ وهو نقطة نرسم عمودى على المسقط للمستقيم الأخر $b_1$ يقطعة فى نقطة $M_1$ ومنها نرسم عمودى على خط الأرض حتى يقطع المسقط الأخر لنفس المستقيم $b_2$ فنحصل على مسقط نقطة التقاطع بالتناظر $M_2$ ومنها نرسم عمودى على المسقط الثانى $a_2$ للمستقيم الاول فنوجد نقطة على المستقيم الأخر ويكون المحصور بين نقطتىالتقاطع هو أحد مساقط العمودى. والسؤال الأن هو: الحل المطروح تم تنفيذة عندما كان أحد المستقيمات a مسقطة نقطة ويتم بإستخدام الإسقاط المساعد ويعتبر أسهل فى الإسلوب.



شكل 230

ثانيا :

الحل : المستوى ممثل بمستقيمين شماليين فى أوضاع عامه

1- من أي نقطة على المستقيم a وهي M نرسم

موازى للمستقيم b (فيُشكل الموازى لb مع a مستوى ) وهو $\alpha$

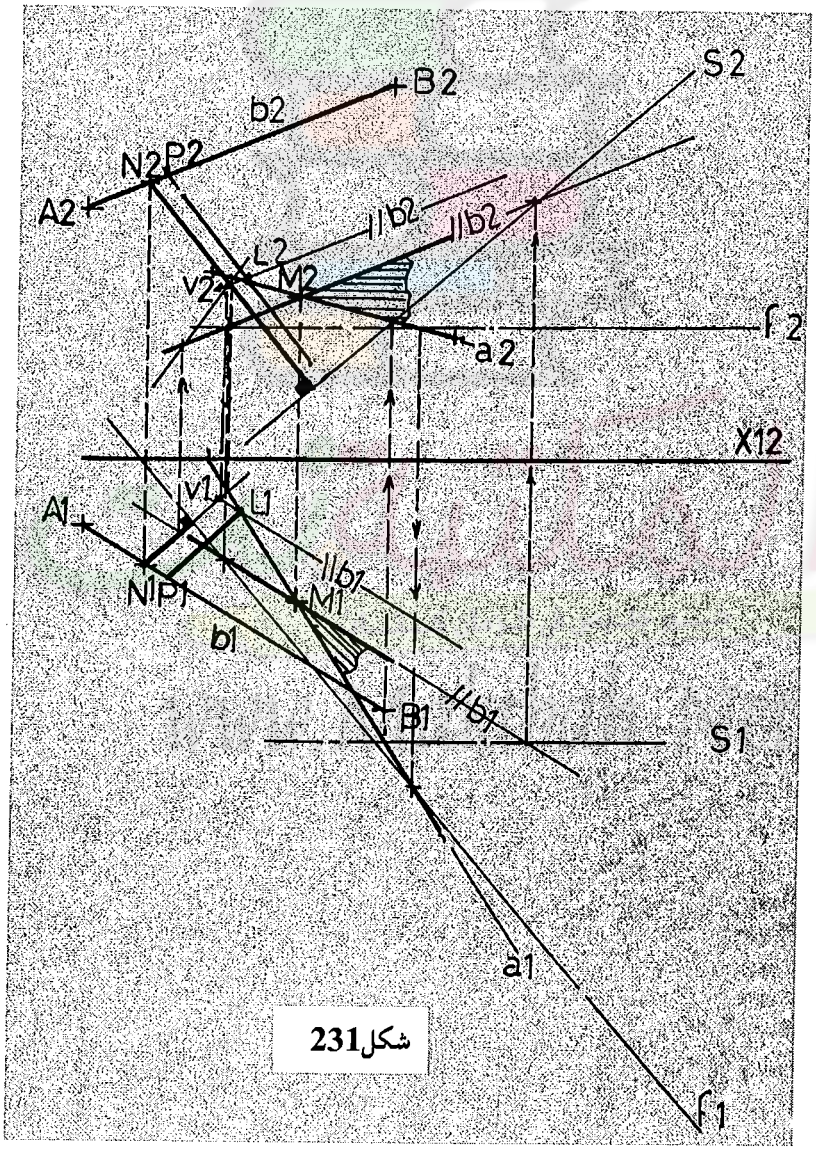
2- من أي نقطة على b وهي مثلا N نرسم مستقيم عمودي على المستوى الجديد $\alpha$ = (a+//b) بالإستعانة بمستقيم أفقي ووجهي(واقعين فى المستوى) ليحددا إتجاه الأثار شكل 230

3- نوجد نقطه تقاطع العمودى مع المستوى $\alpha$ فيتقاطع معه في V

4- من V نرسم موازى لـ b فيقطع a نقطة L .

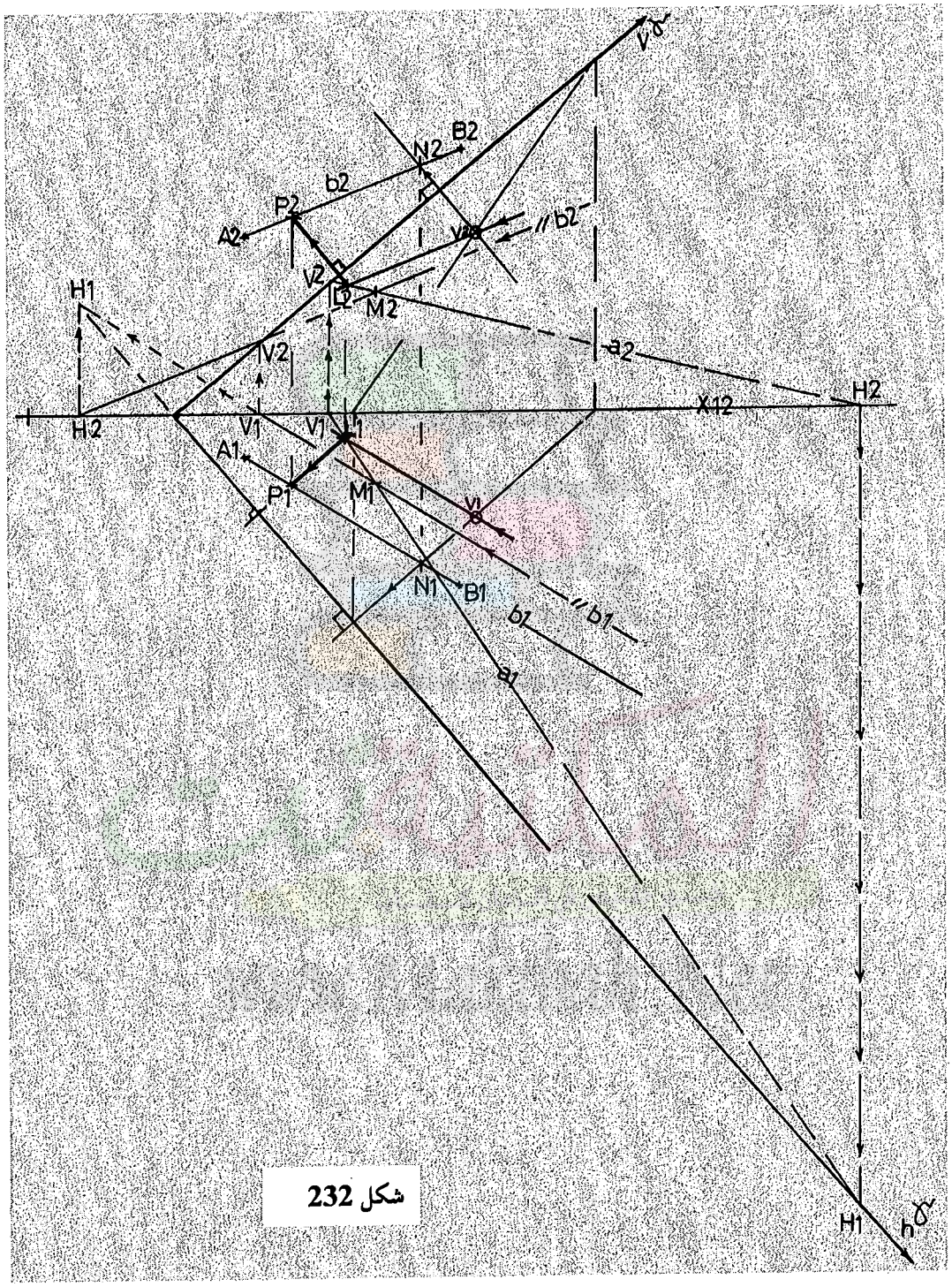
5- من L نرسم عمودي (موازى ل NV) على نفس المستوى فيقطع b في P

6- العمود المشترك (اقصر بعد ) هو *LP* . شكل 230و 231و 232




شكل231

## ثانيا حل أخر بإستخدام أثرى المستوى




شكل 232

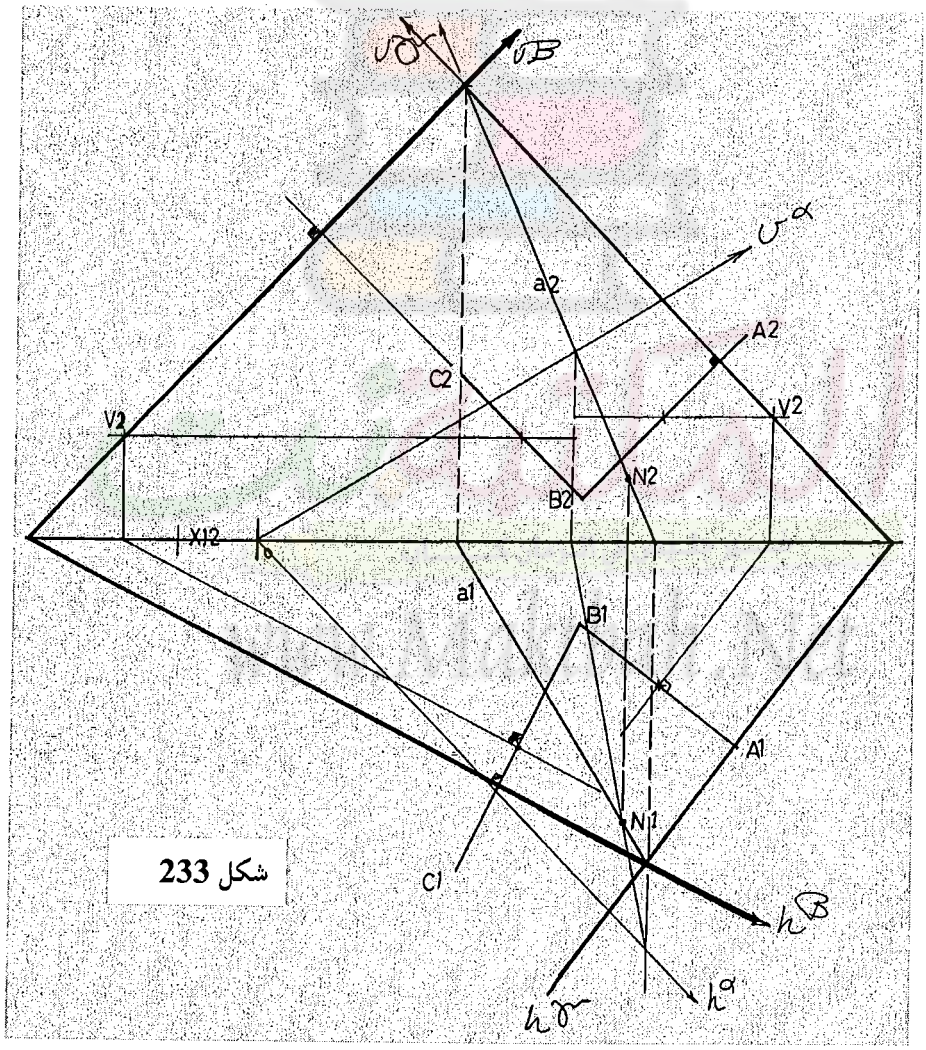
**المعلوم ثلاث نقاط A(12,5,5 , B(8,2,1), C(5,8,4) المطلوب اولا : تعيين المحل الهندسي – لنقطة في الفراغ متساوية البعد عن A,B,C ثانيا : تعيين نقطة N في المستوى $\alpha$ (0,135,30) بحيث تكون متساوية البعد عن A,B,C اذكر الحل الفراغي .**

الحل الفراغي والوصفي: **a**- ننصف **AB** ونقيم من المنتصف مستوى $\gamma$ عمودي على **AB**

**b**- ننصف**BC** ونقيم من المنتصف مستوى $\beta$ عمودي على **BC** شكل **233**

**c**- يتقاطع المستويات $\beta$ و $\gamma$ العموديان في خط **a** , هذا الخط هو المحل الهندسي لجميع النقط المتساوية البعد عن **A,B,C**

**d**- خط التقاطع **a** يتقاطع مع المستوى $\alpha$ في النقطة **N** شكل **233**. النقطة **N** هي النقطة المتساوية البعد عن ثلاث نقاط وهي التي تصلح أن تكون مركز كرة أو رأسي مخروط أو رأس هرم منتظم.

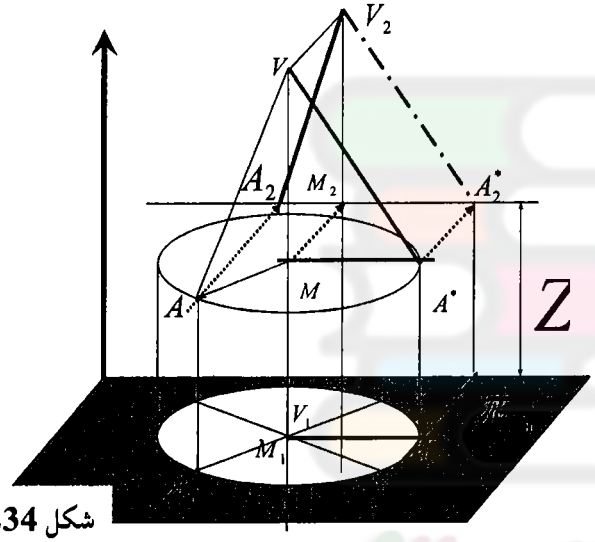



شكل 233

# الدوران

**تعريف الدوران:** الدوران إما أن يكون دوران نقطة حول محور وهى أيضا دوران مستقيم حول محور، أو يكون لأحد المكونات العامة سواء لنقطة أو مستقيم أو مستوى ، ويتم بالصورة التى تجعله موازيا لأحد مستويات المسقط، حتى يظهر بشكله الحقيقى وبخواصه الهندسية كاملة. ويتم الدوران عامة للمستويات إما حول أثار المستوى أو حول أحد المستقيمات الأفقية أو الوجهية الواقعة فى المستوى كمحور دوران " محور يوازى أحد مستويات الإسقاط" والمطلوب إيجاد شكله الحقيقى أو وضع الأشياء فيه والمكونات داخله .

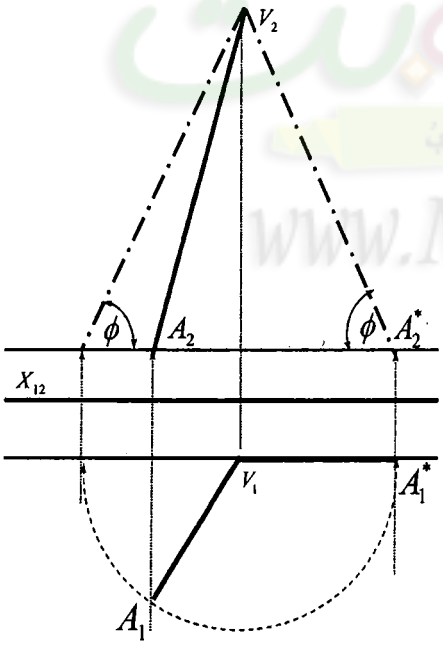
## دوران مستقيم حول محور (لإيجاد الطول الحقيقى وزاوية الميل)



شكل 234

**مثال: معلوم المستقيم VA أصنع دوران له حول المحور الرأسى شكل 234**

الحل: يجب أن نعلم أن الدوران يتم للمستقيم بدوران أحد نهايتيه حول المحور بحيث يصبح موازى لمستوى المسقط الذى يوازى محور الدوران كما يتضح فى الشكل الفراغى شكل 234 لنقطة A، وبناء عليه يظهر المستقيم بطوله الحقيقى على المستوى الموازى. ولكى يتم الدوران تقوم نقطة نهاية المستقيم A بالدوران حول المحور فى مستوى يوازى المستوى العمودى على محور الدوران لكى تظل على نفس الإرتفاع فتصل إلى $A^*$، وبالتالى فإن دائرة الدوران تظهر بشكلها الحقيقى فى هذا المستوى الموازى، وتُسقط نقطة $A^*$ على المستوى الرأسى فتكون $A_2^*$ . وبالتالى يكون $VA^*$ موازى للمستوى الوجهى ويظهر

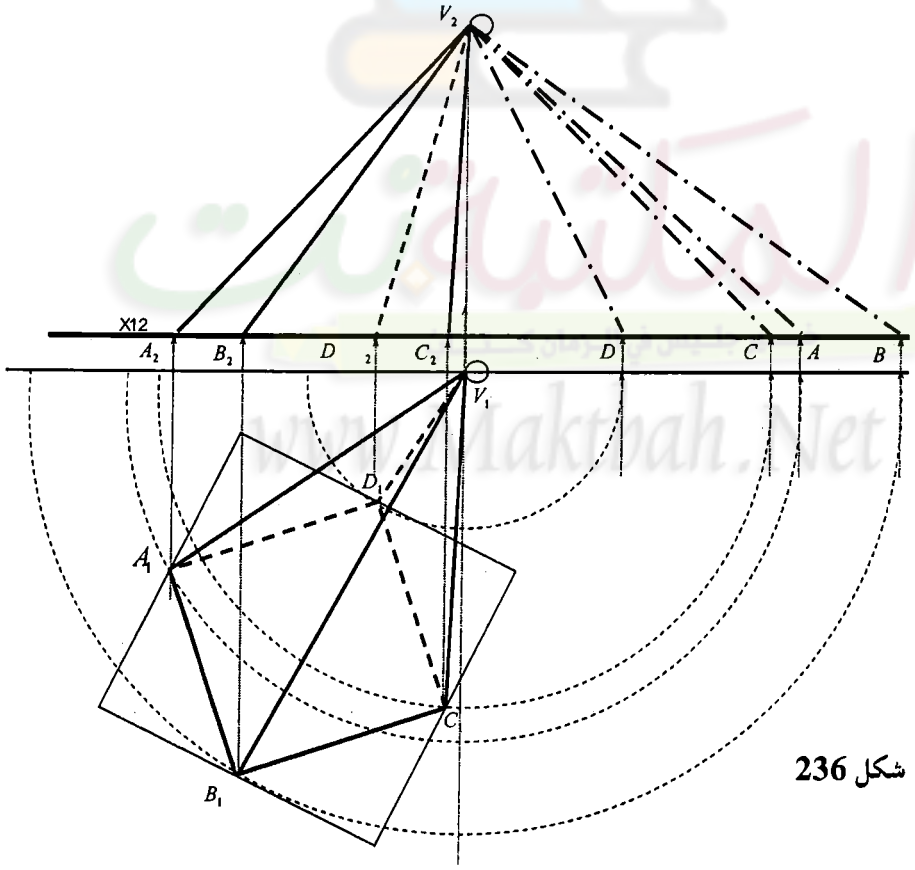


شكل 235

بطوله الحقيقى $V_2A_2^*$ فى المسقط الرأسى ومعه زاوية الميل . ويظهر ذلك فى التمثيل بالهندسة الوصفية فى شكل235 مباشرة لنقطة A حيث يتم دوران $A_1$ حتى تصبح موازية لخط الأرض عند الوضع $A_1^*$ ثم نوجد المناظر لها على خط الأرض ثم على الخط الموازى لخط الأرض والمرسوم من نهاية المسقط الرأسى للنقطة التى تدور وهى $A_2$ فنحصل على المناظر لها بالدوران $A_2^*$ ، نصلها بالرأسى $V_2$ التى تم الدوران بثبوتها فنحصل على الطول الحقيقى، وكذلك زاوية ميل المستقيم على المستوى الأفقى. ويمكن تكرار ذلك بالعكس على المستوى الرأسى فنحصل على زاوية ميل المستقيم على المستوى الرأسى.

**مثال: أوجد الطول الحقيقى لأحرف الهرم المبينة بالمثال الموضح وزوايا ميله على المستوى الأفقى.**

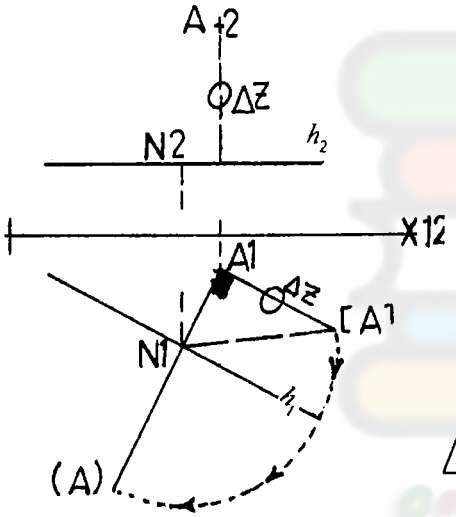
يتم دوران نهايات الأحرف $A_1,B_1,C_1,D_1$ حول الرأس $V_1$ حتى تصبح فى الوضع الموازي لخط الأرض فنصعد بها على الموازى لخط الأرض والمرسوم من نهايات مساقط النقط الرأسية $A_2,B_2,C_2,D_2$ (وهذه المرة الموازى منطبق على خط الأرض لأن النقاط تقع فى المستوى الأفقى) فنحصل على النقاط A,B,C,D ثم نصلها بالمسقط الرأسى لرأس الهرم $V_2$ فنحصل على أطوال الأحرف الحقيقية وزوايا ميلها على المستوى الأفقى كما يتضح بالرسم فى شكل 236



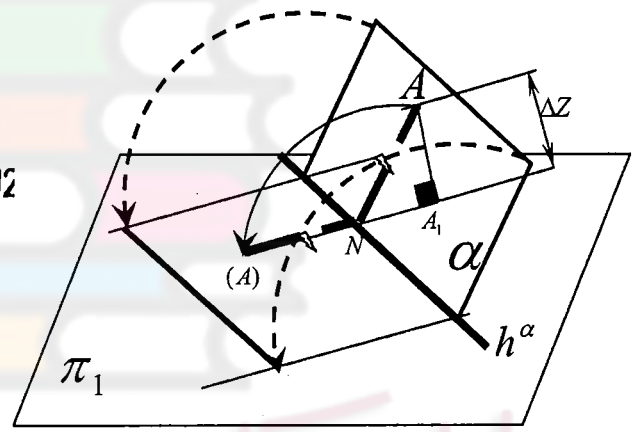

شكل 236

## دوران نقطة حول محور يوازي أحد مستويى الإسقاط (حول مستقيم أفقي إو وجهي)

الدوران كما سبق الذكر يكون لأحد المكونات العامة سواء لنقطة أو مستقيم أو مستوى ، ويتم بالصورة التى تجعله موازيا لأحد مستويات المسقط، حتى يظهر بشكله الحقيقى وبخواصه الهندسية كاملة. ويتم الدوران عامة للمستويات إما حول أثار المستوى أو حول أحد المستقيمات الأفقية أو الوجهية الواقعة فى المستوى كمحور دوران " محور يوازى أحد مستويات الإسقاط" والمطلوب إيجاد شكله الحقيقى أو وضع الأشياء فيه والمكونات داخله شكل 237و شكل 238.




شكل 238



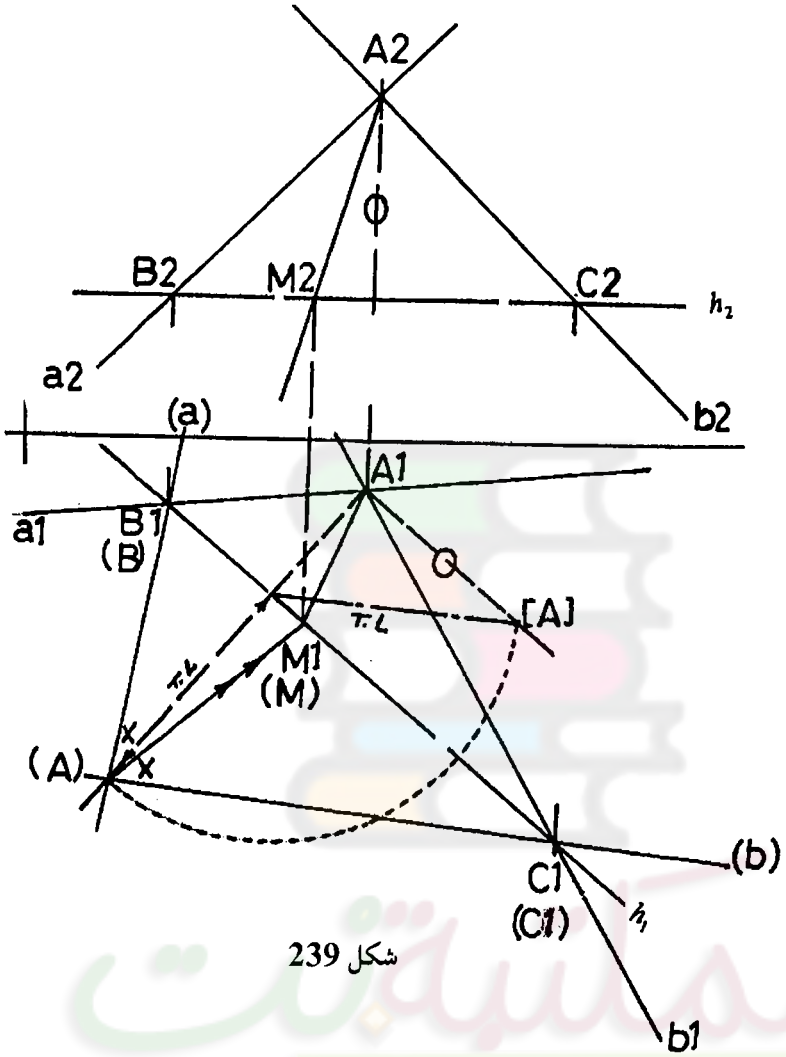

شكل 237

من شكل 238 دوران نقطة A حول مستقيم أفقى h يتم بأن نرسم من $A_1$ عمودي على محور الدوران $h_1$ وموازى له ونقيس على هذا الموازي المسافة $\Delta Z$ بين $A_2$, $h_2$ وبذلك نحصل على [A] وندور بالمسافة $N_1[A]$ من N1 وهو طول محور الدوران و الطول الحقيقي لبعد A عن محور الدوران $h_1$ ونركز في N1 وندور نقطع العمودي من نقطه A في نقطة هي (A) حيث يصبح $N1(A)= N_1[A]$.

**<u>تطبيقات</u> : تشمل التطبيقات لدوران نقطة حول مستقيم أفقي أوجهي، إيجاد القيمة الحقيقية للزاوية بين مستقيمين وكذلك إيجاد زاوية ميل مستقيم على مستوى وإيجاد الزاوية بين مستويين، إيجاد الشكل الحقيقى لأى شكل هندسى،... .**

دكتور مهندس/ أحمد محمد القصاص

**مثال (1) : مثل الزاوية بين المستقيمين : الأول a يمر بنقطة (2,1,2) ومساقطه تميل $5^0$ على $\pi_1$ ، 45 على $\pi_2$ ; والثاني b يمر بنقطة (8,6,2) ومساقطه تميل 120 على $\pi_1$ ، 135على $\pi_2$ . ثم مثل منصف الزاوية.**



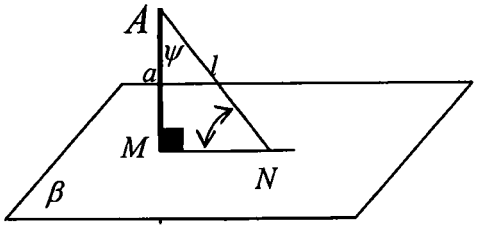

شكل 239

الحل: بعد توقيع المستقيمين a, b يتم بتوليد مستقيم أفقى $h_2$ وهو BC , حيث $h_2$ يوازى خط الارض وبالتالى نوجد $B_2C_2$ ثم $B_1C_1$ . نقوم بدوران a, b حول h1 بدوران نقطة $A_1$ حوله كما تم سابقا . نحصل على (A), إما النقطتين (B),(C) وهما يقعان على محور الدوران

شكل239 حيث موقعهم الأصلي يقع علية وليس لهم $\Delta Z$ ، ثم نصل النقطتين(A) (B), (A) (C) وبالتالى نحصل على الشكل الحقيقى لمستوى المستقيمين. وكذلك للحصول على الزاوية الحقيقية لنصف الزاوية بين المستقيمين ونوجد (M) تقاطع المنصف مع محور الدوران وهي نفسها $M_1$ لأنها تقع على محور على الدوران نعود بها $h_2$ فنوجد $M_2$ نصلها ب $A_2$ فيكون المسقط الرأسي للمنصف .

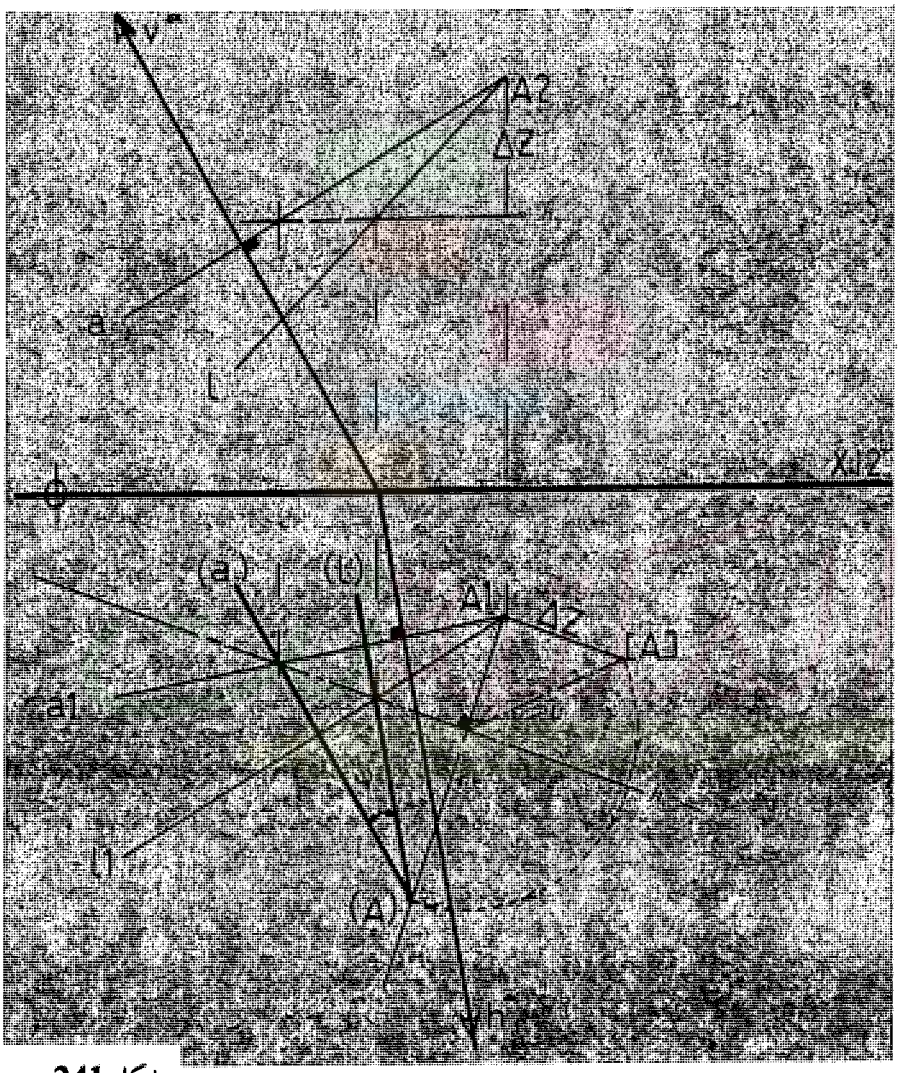
نتيجه: الخط الواصل بين مسقط اى نقطتين يقطع محور الدوران فى نقطه هى نفسها النقطه التى يقطع فيها الخط الواصل بين دوران النقطتين محور الدوران (مساقط النقطتين ودورانهما يكونوا شكل شبهه مخروطى حول محور الدوران).

**عين زاوية ميل المستقيم e الذى يمر بالنقطة (3,6,2) ومساقطه تميل 30 على $\pi_1$ ، 45 على $\pi_2$ مع المستوى (5,100,120) $\alpha$.**

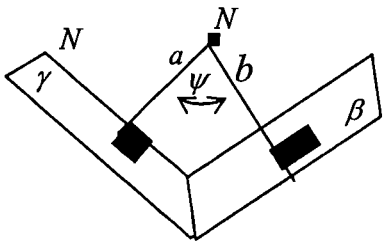



شكل 240

الحل: 1- نسقط من أى نقطة A على المستقيم l عمود على المستوى فيكون العمودى a . العمودى a مع المستقيم l يكونان مستوى ممثل بمستقيمين شكل 240 و 241 نستعين بمستقيم أفقي في مستوىالمستقيمين a, l وندور النقطة A حول هذا المستقيم فنحصل على الزاوية $\psi$ بين المستقيم و العمودى كزاوية حقيقية . الزاوية المطلوبة = $90-\psi$

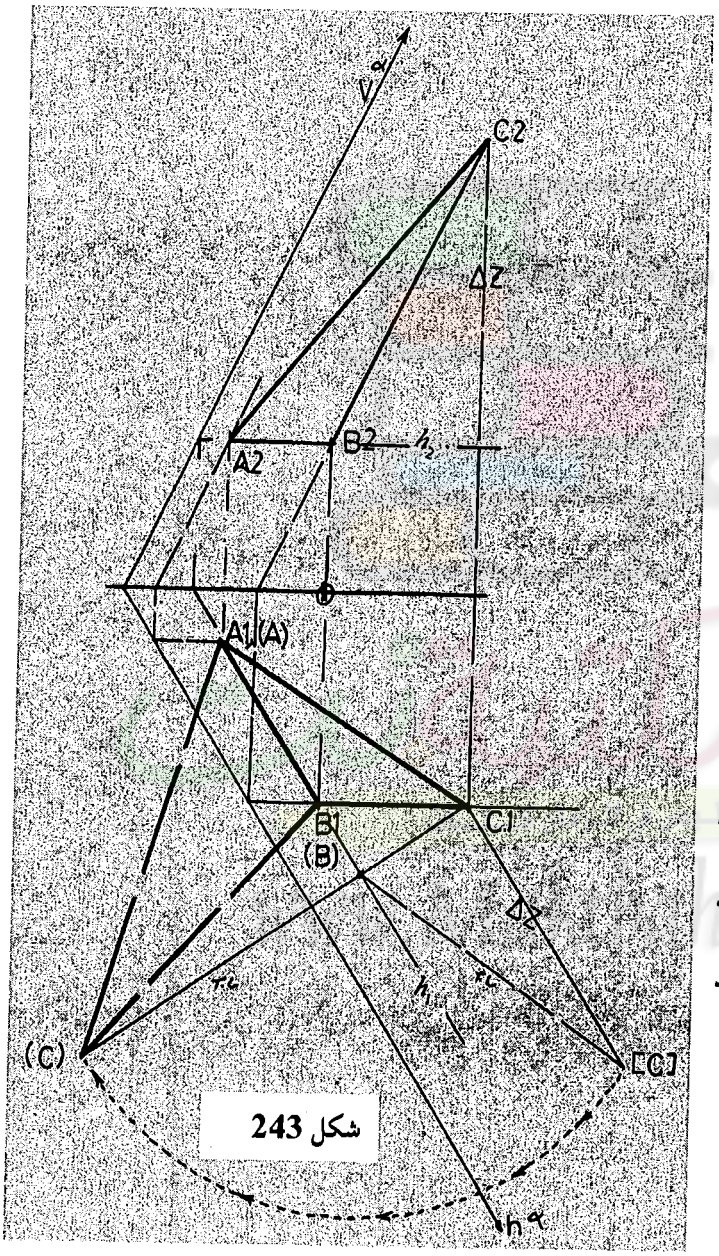



شكل 241




شكل 242

وبالمثل يمكن إيجاد الزاوية الزوجية بين أي مستويين شكل 242 وذلك باختيار أي نقطة في الفراغ وإسقاط منها عمودي على كل مستوى a,b وبالتالى العمودين بينهما زاوية $\psi$ ويكونوا مستوى، نختار في مستواهم مستقيم أفقي مثلا وتتم عملية الدوران ونوجد الزاوية بين العمودين $\psi$ و الزاوية بين المستويين تكون $180-\psi$. وهذا المثال وماسبقه يعتبر مثال لدوران مستوى ممثل بمستقيمين وإيجاد شكله الحقيقى شكل ....

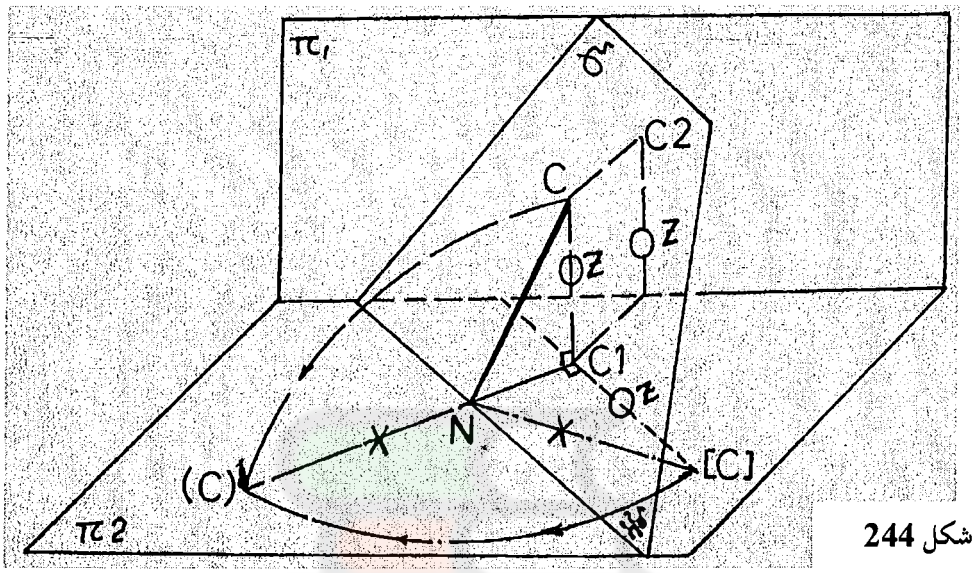



شكل 243

**مثال الشكل الحقيقي للمثلث A(-2,1,?), B(0,4,?), C(3,4,?) الواقع في المستوى $\alpha$ (4,6,8)**

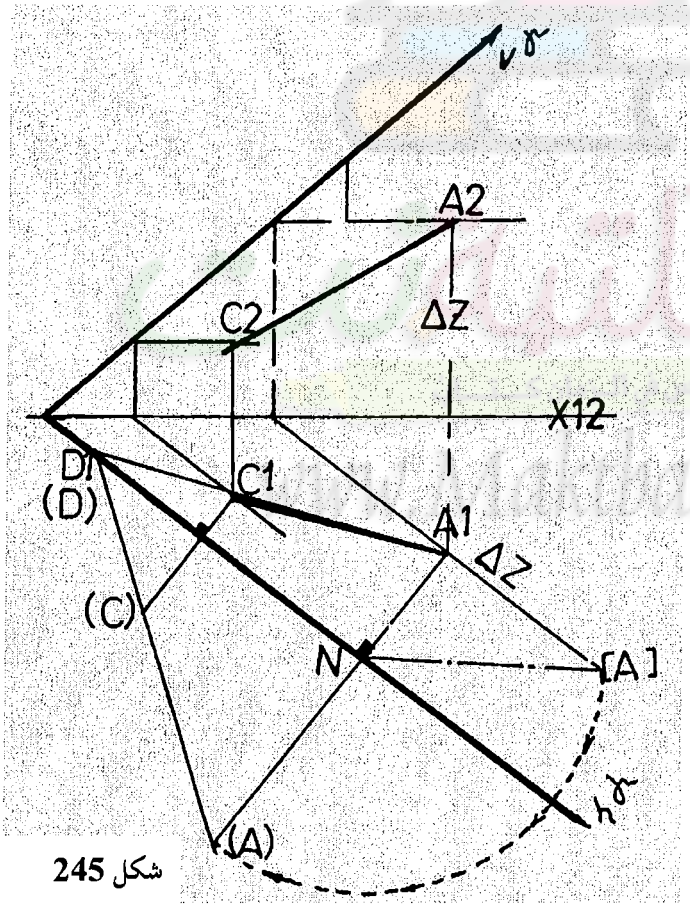
في الوضع العام نستعين بمستقيم أفقي ولكن حتي يسهل الحل فى هذه الحاله شكل 243 نمرر المستقيم بأحد رؤوس المثلث فتكون دوران أحد النقاط على مسقطها.

## دوران المستوى حول أحد أثريه (دوران نقط المستوى حول أثره الأفقي آو أثره الرأسي )




شكل 244

دوران المستوى حول أحد أثريه يعني إنطباق المستوى على مستوى الإسقاط (الأفقى أو الرأسى) الذى يقع فيه الأثر. فالدوران حول الأثر الأفقي يعني إنطباق المستوى الموجود على المستوى الأفقي شكل 244، وكذلك بالنسبة للمستوى الرأسي يعني إنطباق المستوى الموجود على المستوى الرأسي وفي ذلك الإنطباق يظهر كل شيء في المستوى بطولة الحقيقي وزوايا ميله الحقيقية وشكله الحقيقى.




شكل 245

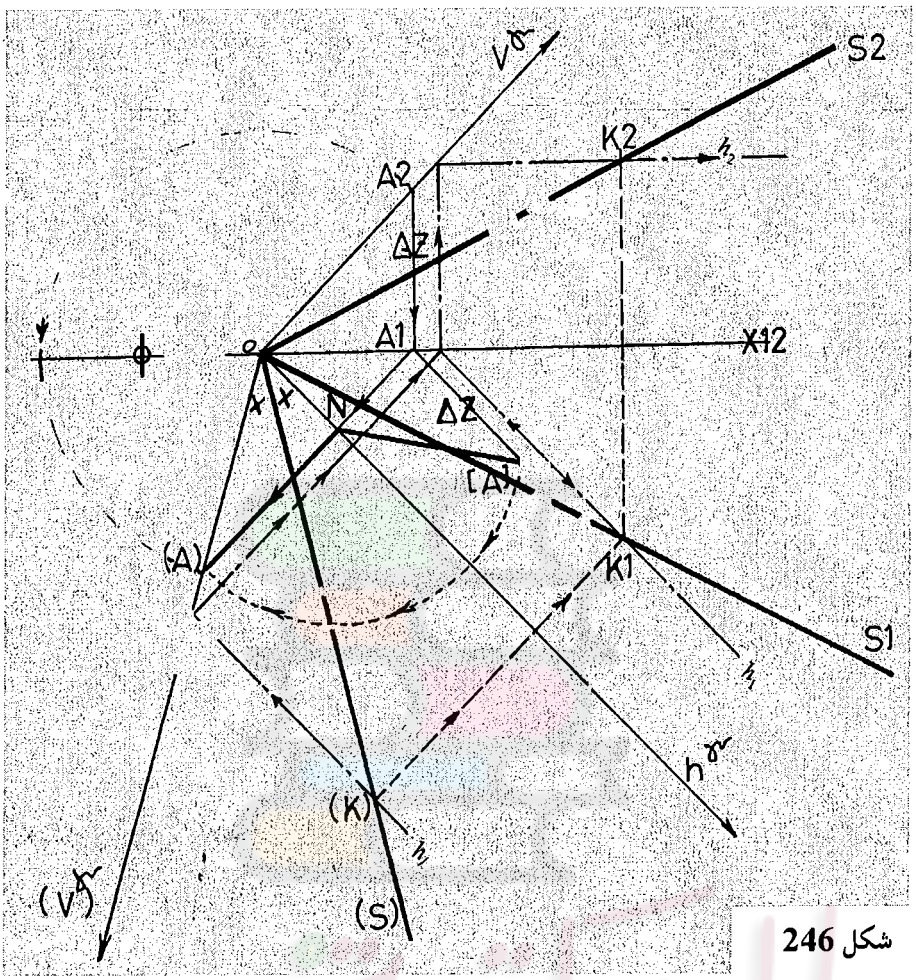
من شكل 244 للحصول على دوران نقطة C في الشكل الموضح حول الأثر $h^{\gamma}$ للمستوى نرسم من المسقط الأفقي للنقطة $C_1$ مثلا مستقيم عمودي على $h^{\gamma}$ (محور الدوران) يلاقية في نقطة N وكذلك موازى للأثر الأفقي ونقيس علية الأحداث $\Delta Z$ فنوجد [C] . نركز في النقطة N وبفتحه تساوى N [C] نقطع العمودي من $C_1$ في نقطة تكون هي (C) شكل244 وقد وضح ذلك شكل الدوران فى الفراغ ، ونفس الشيء فى الاسقاط كما فى شكل 244.

من شكل 245 فى التمثيل الوصفى للدوران، للحصول على دوران نقطة A فى الشكل الموضح حول الأثر $h^{\gamma}$ للمستوى نرسم من المسقط الأفقي للنقطة $A_1$ مستقيم عمودي على $h^{\gamma}$ (محور الدوران) يلاقية في نقطة N وكذلك موازى للأثر الأفقي ونقيس علية الإحداثى $\Delta Z$ فنوجد [ A ] . نركز في النقطة N وبفتحه تساوىN [ A ] نقطع العمودي من A1 في نقطة تكون هي (A) ونفس الشيء بالنسبة للنقطة C أو بالتألف . وتتضح الإستخدامات العديدة والأشكال المستنتجة بناء عليها من خلال باب كثيرات السطوح.

## دوران المستوى حول أحد أثريه : (يستخدم في إيجاد الزاوية بين أثري المستوى )

**مثال : اوجد المنصف والقيمة الحقيقية للزاوية بين أثري المستوى (2,135,45) $\gamma$**

الفكره العامه تكمن فى دوران المستوى حول أثره الأفقى لينطبق على المستوى الأفقى (ويتم ذلك بدوران أى نقطة على الأثر الرأسى ومعها رأس المستوى) وبالتالى يظهر بشكله الحقيقى على المستوى الأفقى ولكن بعد الدوران. فى شكل 246 يتم دوران أحدي النقاط مثل A واقعة على الأثر الرأسي نحصل لها على[ A] ثم على (A) وبالتالي نصل نقطه O بنقطه (A) يكون هو $(V^{\gamma})$ وتظهر الزاوية الحقيقيه بين أثرى المستوى بين $h^{\gamma}$ و $(V^{\gamma})$ و المنصف لها هو الخط (S) ولإيجاد مساقطه $S_2,S_1$ نستعين بمستقيم أفقي (h) حيث مسقطه فى الدوران موازى للأثر الأفقي في الدوران وكذلك عندما نعود به نجدة يوازى الأثر الأفقي في الموضع العام بالتالي (h) و $h_1$ موازيين $h^{\gamma}$ وعلية نأخذ أي نقطة (k) على (S) ونرسم منها (h) ونعود به فنوجد به $h_1$ حسب الأسهم المشار إليها على (h) . ونعود من (k) عمودى على $h^{\gamma}$ فيتقاطع مع $h_1$ في $k_1$ وتنقلها رأسيا نحصل على k2 . نصل $Ok_1$ ، $Ok_2$ فيكون هما $s_2$،$s_1$ المسقطين للمنصف للزواية شكل 246.



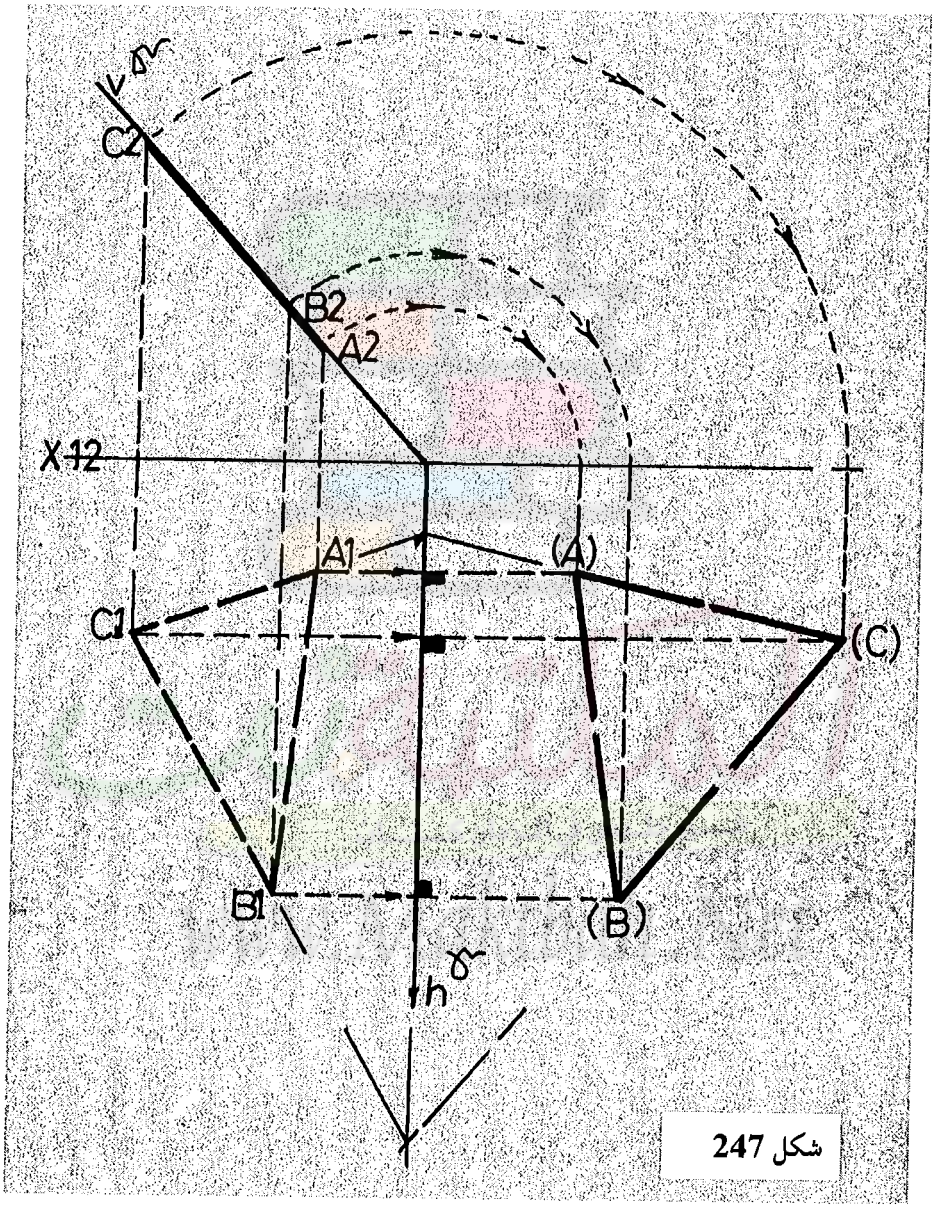

شكل 246

## التألف بين مسقط شكل وإنطباقه :

بين شكل أي مستوى وإنطباقه على مستوى الإسقاط علاقة تناظر تسمي التألف المتوازى العمودي وأهم خواصها :

1. كل نقطة فى المسقط مثل $A_1$ يناظرها في الإنطباق (A) وبالعكس شكل 247
2. كل مستقيم في المسقط مثل $A_1C_1$ يناظره مستقيم في الإنطباق هو (A)(C) والعكس شكل 247 .
3. الخطوط التى تصل كل نقطة ودورانها مثل $c_1,(c_1)$ عمودية على محور الدوران وكذلك بالنسبه لكل النقاط التى يتم الدوران لها فى المستوى شكل247

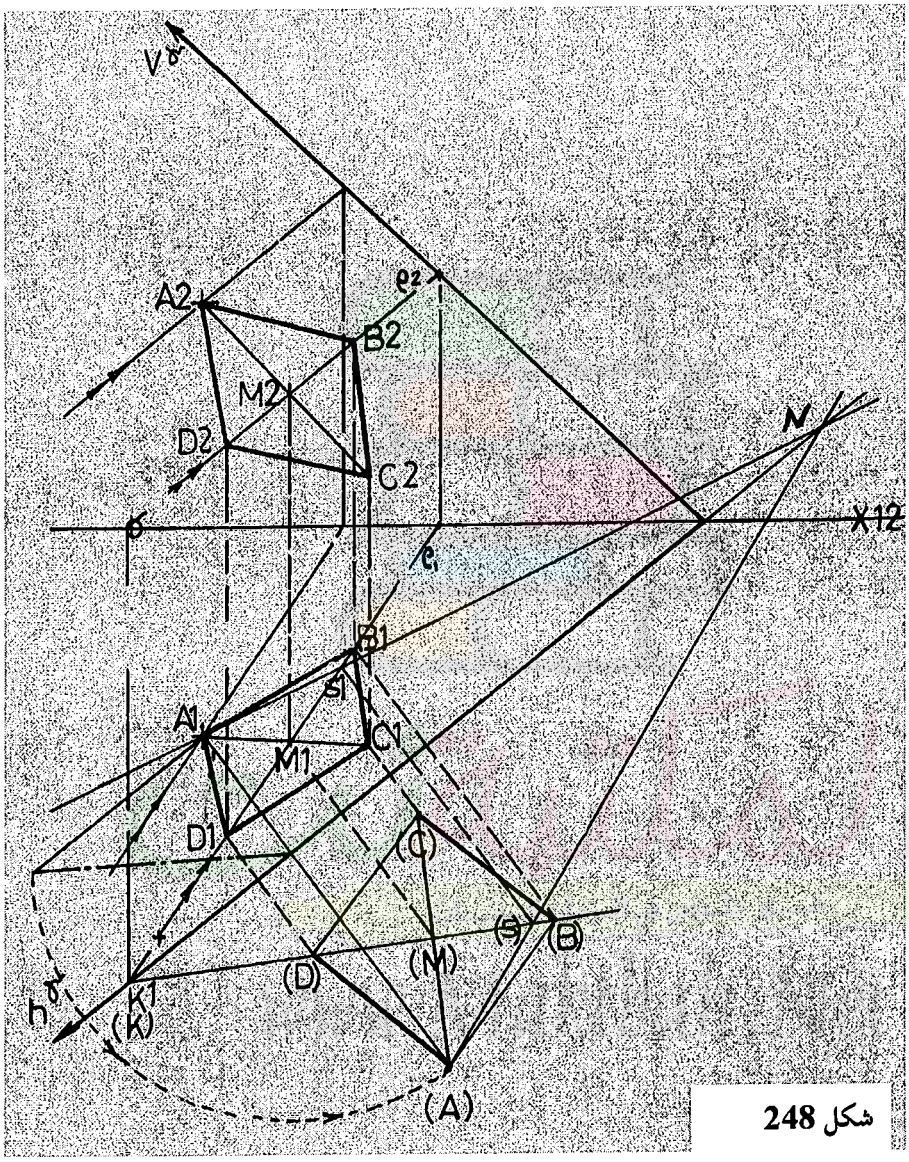
4. كل مستقيمين متناظرين يتقابلان في نقطة مشتركة على محور الدوران مثل $A_1C_1$, (A)(C). وعلى ذلك نجد ان المستقيمات المتوازية التى لا تتقاطع مع محورالدوران تكون ايضا متوازية في الإنطباق كما انه اذا وازى مستقيم محور دوران أى كان وضع محور الدوران ( محور التالف ) فان إنطباقه يكون أيضا موازيا لهذا المحـور كما ذكرنا في الشرح في المثال السابق شكل247




شكل 247

**مثال :- مثل مسقطي المربع ABCD الذى رأسه (A(1,2,3.5 و القطر BD يقع على المستقيم [ (0.5,6.5,0.5),(5.0,4)] e .**

الحل: يتم اولا رسم موازى للمستقيم $e$ من النقطة A الذى رأسه A(1,2,3.5) و القطر BD يقع على المستقيم [ (5.0,4) , (0.5,6.5,0.5) ] e . شكل 248




شكل 248

1. يتم رسم موازي للمستقيم $e$ من النقطة A ومن النقطه والمستقيم نوجد أثار المستوى الذى يحويهم .

2. يتم عمل دوران للنقطة $A_1$ فنأتي بـ (A) نذهب للمستوى الأفقي حيث نختار نقطة مثل S1 على المستقيم $e_1$ ونوصلها بـ A1 فيتقاطع مع الأثر الأفقي"محور الدوران" للمستوى في نقطةN. شكل 248

3. نصل N بـــ (A) وعلى هذا الخط الناتج خط التالف فنسقط عمودى من S1 فنحصل على (S) نقطة علـــى المستقيم $e_1$ المحل الهندسى للقطر نصلها بنقطة K الواقعة هى الأخرى على القطر فيكون (S) (K) هو المحل الهندسي للقطر الحقيقي

4. نسقط عمودى من (A) على (S), (K) فينتج (A) (M) كنصف قطر ونمده نحصل على (C) وكذلك بالقياس نحصل على (B), (D) نعود بـــ (M) نحصل على M1 وكذلك B1,D1 ونصل M1A1 فنحصل على C1 و بالرجوع للمستوى الرأسي نحصل على جميع النقاط .

عامة: يستخدم الدوران للمستويات إذا كان الحل يعتمد على الخصائص الهندسية للشكل المطلوب ولتحقيق ذلك يتم الحصول على الشكل الحقيقى بالدوران.

المكتبة نت
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

# تمارين القـياس

1- مثل العمود m الساقط من نقطة N(2,2,3) على المستوى $\alpha$ إذا كان :

أولا : $\alpha$ رأسي $\alpha$(6 ،60)

ثانيا : $\alpha$ (7 ،45 ،120)

2- في المسألة رقم (1) عين بعد النقطة N عن المستوى $\alpha$ .

3- مثل المستوى $\beta$ العمودي على المستقيم b من نقطة N(6,1,2) حيث :

b [ A(2,2,2) , B($6\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$4 ، $6\frac{1}{2}$)]

4- في المسألة رقم (3) عين بعد النقطة N عن المستقيم b .

5- عين الزاوية الزوجية بين المستويين $\alpha$ ( N(8,5,4 , B(5,1,4) ,A(3,2,8))

$\beta$ ( A, B, L(1,6,3 )

6-عين بعد نقطة N(3,2,2) عن مستقيم m ، إذا كان :

أولا : m مستقيما وجهيا يمر بنقطة (4,4,4) ويميل 135 على $\pi_1$ .

ثانيا : (2,5,6 , m(7,1,2)) .

7- المعلوم ABC حيث . A(3,1,1) , B(6,4,5) , C(0,1,0) ونقطة N(4,5,3) خارجة عنه و المطلـوب تعيين الطول الحقيقي و المسقطين للعمود m من نقطة N على مستوى سطح المثلث .

8-المعلوم المستوى $\alpha$ (0,30,120) و الطلوب تعيين مستوى $\beta$ عمودي على المستوى ويميل 45 على $\pi_1$ .

9- المعلوم مستقيم أفقي h يمر بنقطة B(7,1,3) ويميل 45 على $\pi_2$ و المطلوب تمثيل نقطة N تبعد 3 سم عن h إذا علمت : أولا : N1 (4,1,?) ثانيا : N2 (5,4.5,?)

10- عين أقصر بعد والعمود المشترك بين مستقيمين شماليين أحدهما a(A5,1,4) , B(10,4,6)

و الثاني b إذا كان : أولا : b رأسيا b(6,5)، . ثانيا : b [(11,6,2) ,(7,0,3)]

ثالثا : b وجهيا يمر بنقطة N(11,6,2) ويميل 150 على $\pi_1$ .

11- مثل المثلث ABC المتساوي الساقين الذى فية AC = AB ، C(3,4,4) , A(x,6,5), B(7,2,1) .

12- مثل المعين ABCD معلوم منه A(8,3,4), B(5,5,7) إذا فرض أن $B_1C_1$, $B_2C_2$ يصنعان على الترتيب 60 ،135 مع X12 .

13- المعلوم ثلاثة نقاط A(12,5,5) , B(8,2,1), C(5,8,4) و المطلوب

أولا : تعيين المحل الهندسي لنقط الفراغ المتساوية البعد عن A,B,C .

ثانيا : تعيين نقطة N في المستوى ($\alpha$ 30، 0,135) بحيث تكون متساوية البعد عن C,B,A ، أذكر الحل الفراغي ثم مثل بالإسقاط .

المكتبة نت
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

# الباب التاسع

# الدائرة

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

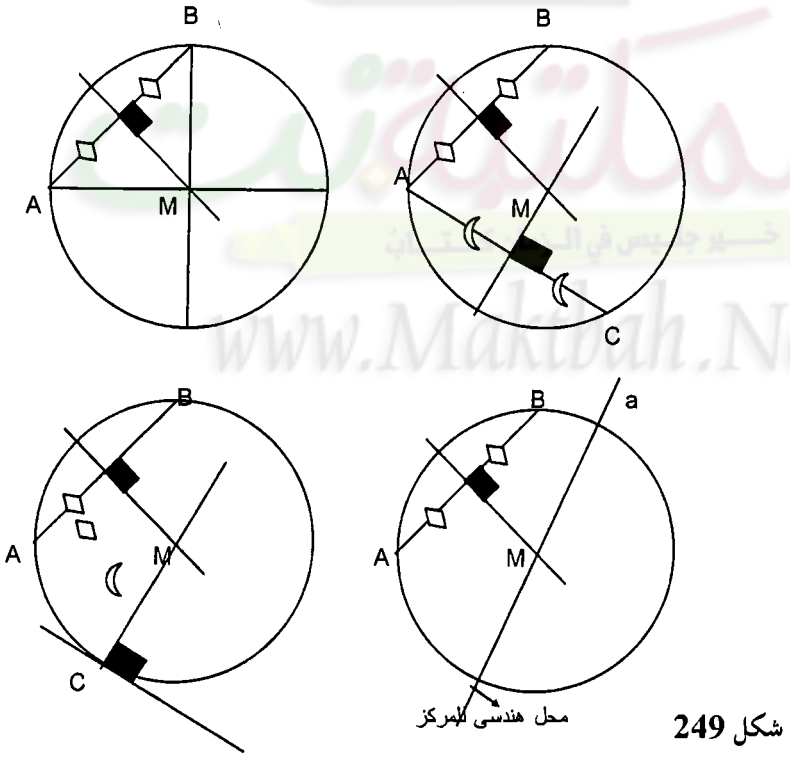
المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

# الدائـرة

رجاء عند قراءة هذا الباب أن تستمر فى القراءة حتى تصل لأول تمرينين محلولين حتى تستطيع إســتيعاب الموضــوع بسهوله حيث أن هذا الباب مشروح بإسلوب وضحت فيه الخلاصه جلية وفيه تتعلم إسلوب الــتفكير فى الموضــوع جيدا.

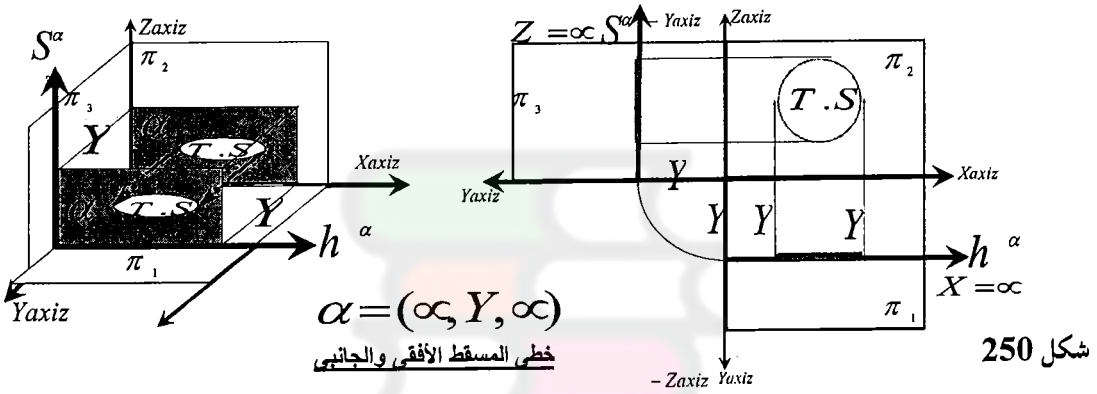
## تعريف الدائرة فى الهندسة المستويه

الدائرة هى المحل الهندسى لجميع النقاط التى تبعد مسافه ثابته r عن نقطه وأحده وهى مركز الدائرة M وتمتاز الدائرة بخواص عديدة فى الهندسة المستويه شكل 249. أى نقطتين على الدائرة الخط الواصل بينهما يسمى الــوتر مــالم يمــر بالمركز، الذى إذا ماأقمنا من منتصفه عمود يكون المحل الهندسى للمركز. أى مستقيم يمر بالمركز فهو قطــر ينصــف الدائرة لنصفين متماثلين وأى مثلث يقام فى منتصف الدائرة وتره القطر يكون قائم الزاوية فى النقطة الموجــودة علــى سطح الدائرة " وعليه فإن القطر محل هندسى للمركز". أى ثلاث نقاط على سطح الدائرة تشكل مثلث، بمجــرد تنصيف أى وترين وإقامة أعمدة من منتصفهم، تكون الأعمدة محل هندسى للمركز، وكذلك أى مماس للدائرة لــو تم إقامة عمودى عليه من نقطة التمــاس يكون محل هندسى للمركز، ووجود أى محلين للمركــز سيتقاطعا معــا فى حل وحيــد هــو المركز.

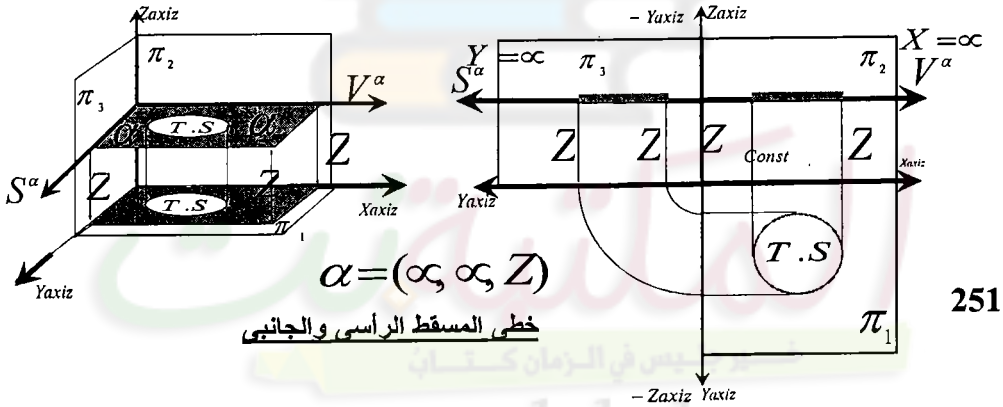



شكل 249

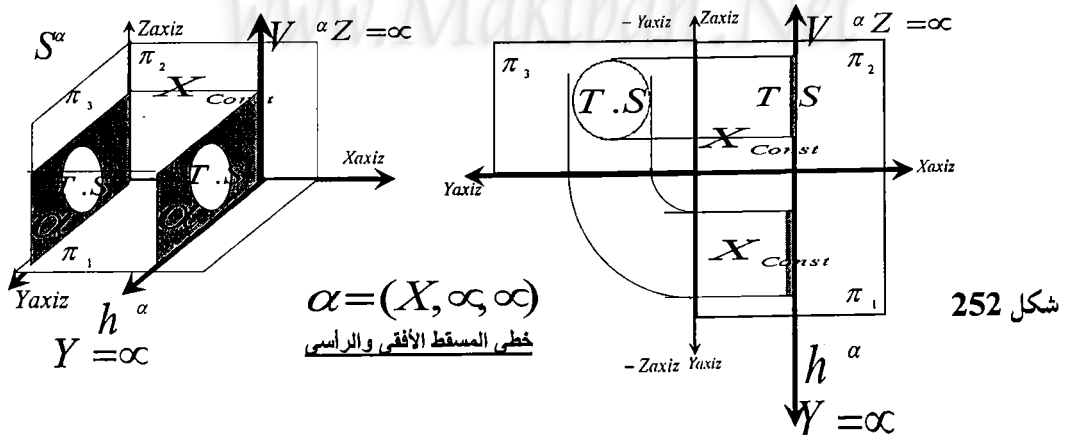
إسقاط الدائرة مثل كل الاجسام يظهر مسقطها بشكله الحقيقى فى أحد مستويات الإسقاط وذلك إذا كانت تقـــع فى مستوى يوازى مستوى الإسقاط كما فى الثلاثة أشكال الموضحة 250و 251و 252 وفى هذه الحاله فإنها تظهر خط فى المستويين الأخرين لأن المستوى الذى يوازى أحد مستويات الإسقاط يكون عمودى على الأخرين أى خطى المسقط عليهما كما هو واضح فى هذه الاشكال.




شكل 250

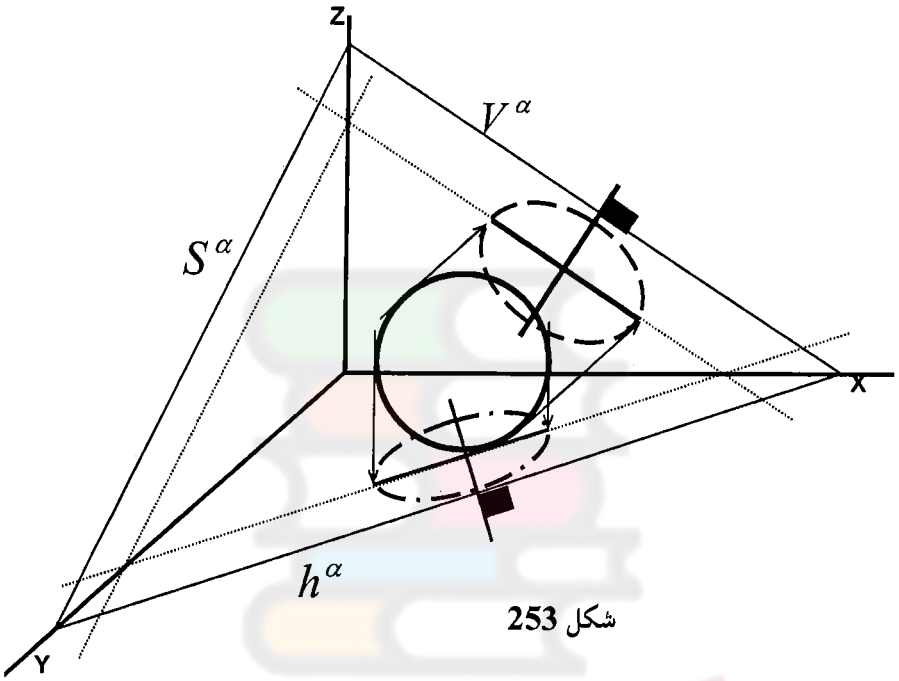



شكل 251




شكل 252

أما إذا كانت الدائرة واقعة فى مستوى عام فإن لها مسقط على المستويات يختلف عن شكلها الحقيقى وهـو مايسـمى بالقطع الناقص "محور أكبر ومحور أصغر" كما يتضح فى الشكل 253 فى إسقاط الدائرة الواقعه فى المستوى $\alpha$ كقطع ناقص فى كل من المسقط الأفقى والرأسى.




شكل 253

## كيف تفكر فى التعامل مع طبيعة الدائرة

ولقد رأيت أن أبدأ شرح هذا الباب بملخص عام والذى يمكن أن يؤهل المدرس والطالب مباشرة بـالتفكير بطريقـة واضحة تبين ماهو المطلوب لرسم الدائرة فى فى الهندسة الوصفية. وكما إستفدنا من خبرات السابقين فإنه يمكن تلخيص مشكلة الدائرة فى الأتى: الدائرة هى ثلاثة اشياء $M$ –و $r$ –و أثا ر . والمواصفات العامة لهذه الثلاثة هى كالأتى:

- $M$ هو مركز الدائرة ولإيجاد المركز يتم التعامل مع المشكله على إنها مشكلة هندسة مستوية أو هندسـة فراغية كحل جانبى لرؤية ماهى العمليات الهندسية المطلوبة لإستنتاج المركز. فإذا كان الحل فى الهندسة المستوية لإستكمال رسم الدائرة يستلزم عمل عمود وأحد على مستقيم "سواء كان هذا المستقيم وتر معطى سـنقيم عمود من منتصفه ، أو مماس سنقيم عليه عمود من نقطة التماس" هذا يعنى أن نستخدم الإسـقاط المسـاعد للمستقيم لإيجاد الطول الحقيقى لهذا المستقيم وإقامة الأعمدة عليه وإستنتاج المركز. وإذا كان الحل فى الهندسة

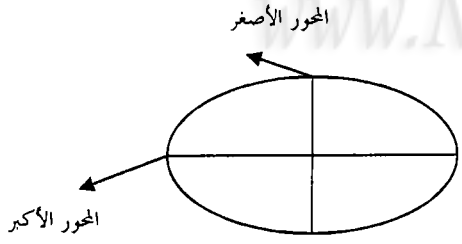
المستوية يتطلب عمل أكثر من عمود فإن هذا يعنى أن نلجأ إلى ال T.S الشكل الحقيقى لمكونات مستوى الدائرة لإيجاد المركز (المستوى الذى يحتوى الدائرة –سواء كان معلوم بأثاره– أو بنقطة ومستقيم– أو بثلاث نقاط) ومعه فى بعض الأحيان نصف القطر. وفى الغالب طالما المركز مجهول فى التمرين تعرف أنه لابد أن تذهب للشكل الحقيقى للمستوى لإستغلال الخواص الهندسيه للدائرة فى إقامة الأعمدة وقياس الأطوال.

- $r$ يستنتج نصف القطر من الخصائص الناتجه فى الحل بالهندسة المستوية ومواصفات المعطيات وفى الغالب يستنتج فى الشكل الحقيقى T.S.
- الأثار: عند التعامل مع التمارين لايد أن يتوافر أولا مستوى الدائرة بالمكونات المعطاة التى تتلخص فى أن يكون المستوى مكون من ثلاث نقاط، أو نقطة ومستقيم، أو مستقيمين متوازيين أو متقاطعين، أو بالأثار. فإذا كانت مكونات المستوى غير موجودة فإنه يتم تحليل المشكلة من خلال معطياتها لإيجاد العمليه المطلوبه لإتمام إيجاد مكونات المستوى حتى يمكن معالجته بعد ذلك لإيجاد شكلها الحقيقى أو مساقطها.

لكى ترسم دائرة فى مساقطها الأفقية والرأسية لابد أن تتوافر هذه الثلاثه $M$ – و $r$ –و أثا ر ، وإذا ما توفرت هذه الثلاثة بإستخدام أدوات الحل بالهندسة المستوية ثم أدوات الهندسة الوصفية سواء كان مستوى أو موضع أو إسقاط مساعد يبقى التمثيل الوصفى للدائرة فى المسقط الرأسى والأفقي وبالتالى لابد من معرفة خواص الإسقاط للدائرة فى المسقط الرأسى والأفقى حتى يمكن تمثيلها.

## التمثيل الوصفى للدائرة فى المسقط الرأسى والأفقى

نلاحظ أن الدائرة يتم إسقاطها فى كل من المستويين كقطع ناقص، والقطع الناقص له محور أكبر ومحور أصغر شكل 254. وبالتالى يجب أن نعلم مواصفات المحور الأكبر وكذلك المحور الأصغر داخل مستوى الدائرة وكيفية إستنتاجهما ثم فى النهاية كيفيه رسم القطع الناقص لإستكمال الشكل العام للإسقاط. لذلك سيتم عرض الأن مباشرة ملخص المتطلبات العامه لرسم الدائرة كشكل مسقط



شكل 254

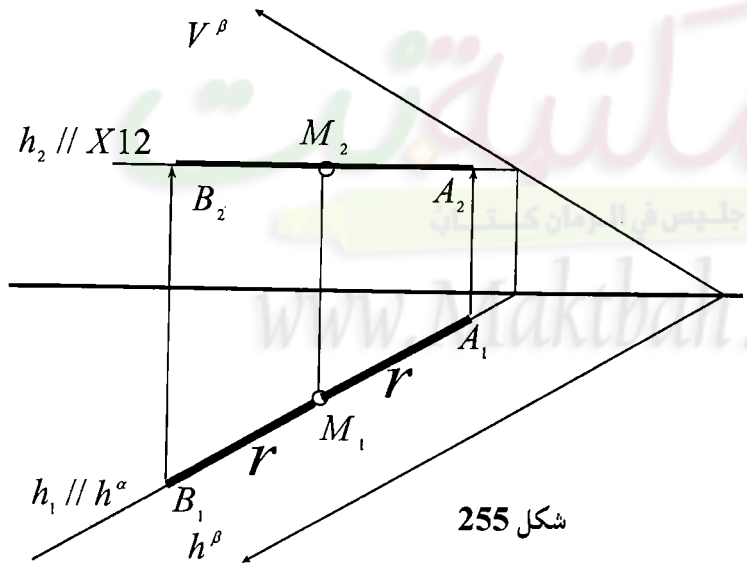
دائرة وخواصها والتى يمكن لأى طالب الإعتماد عليها مباشرة لحل جميع التمارين سواء كان فى إسلوب التفكير أو فى الرسم العام وتحقيق خواص الهندسة الوصفية فى إسقاط الدائرة. وعليه فإنه بمجرد توافر الثلاثه أشياء اللازمة لرسم الدائرة $M$ -و $r$ - و أثا ر فإن المتطلبات والمواصفات العامة المطلوبه لرسم الدائرة هى كالأتى:

1. **المحور الأكبر** : مواصفاته هى ; يوازى الأثار ويساوى $2r$ . والمحور الأكبر فى المستوى الأفقى ليس له علاقة بالمحور الأكبر فى المستوى الرأسى .( المحور الأكبر فوق ليس له علاقة بالمحور الأكبر تحت).
2. **المحور الأصغر** : مواصفاته هى; عمودى على الأثار وطوله يستنتج بأحدى الطرق التى سيتم ذكرها لاحقا ( وإن كنت أفضل إستنتاجه بطريقة خطى المسقط لسهولة إستخدامها فى التطبيقات اللاحقة وخاصة مع الكرة ).

## التفسير الوصفى لإسقاط المحور الأكبر فى الدائرة

### فى المسقط الأفقى

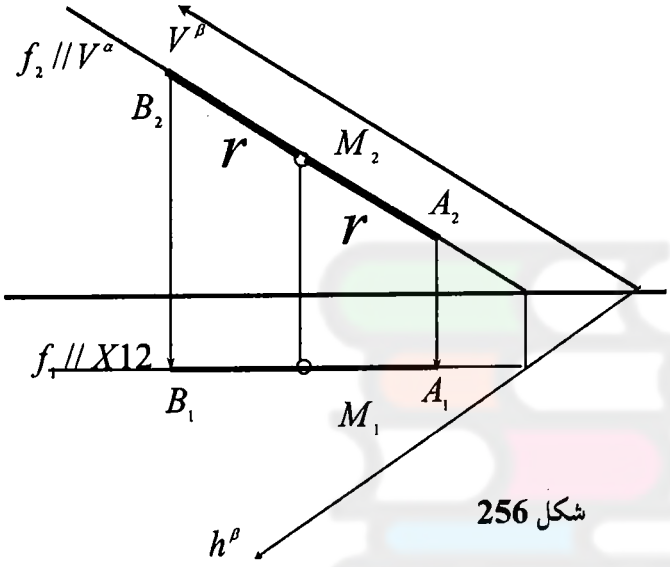
نحن نعلم أن الإسقاط يتم للأجسام من نهايات أبعادها أو أقصى أبعاد لها ولذلك عندما نُسقط دائرة كما هو معتاد سنبحث عن كيفية إسقاط القطرين المتعامدين داخل الدائرة.



شكل 255

نلاحظ أن أقصى طول يمكن أن يكون فى المسقط الأفقى هى لمستقيم أفقى بطولة الحقيقى وبالتالى داخل أى دائرة سيكون أحد الأقطار هو مستقيم أفقى لأنه يحقق أقصى بعد فى إتجاة الإسقاط على المستوى الأفقى وعلية سيكون مسقط هذا المستقيم الأفقى هو المحور الأكبر

والمركز فى منتصفه لأنه يسأوى قطر الدائرة الحقيقى 2r شكل 255 أما هذا المحور الأكبر فإن مسقطه الرأســى هــو نقطتان عاديتان واقعتان علىمسقط محيط الدائرة الرأسى وهو مسقط رأسى لمستقيم أفقى يوازى خط الأرض وأقصــى طول لة هو مايوازى *إسقاط أقصى نقاط للمحور الأكبر التى ظهرت فى المستوى الأفقى* شكل 255




شكل 256

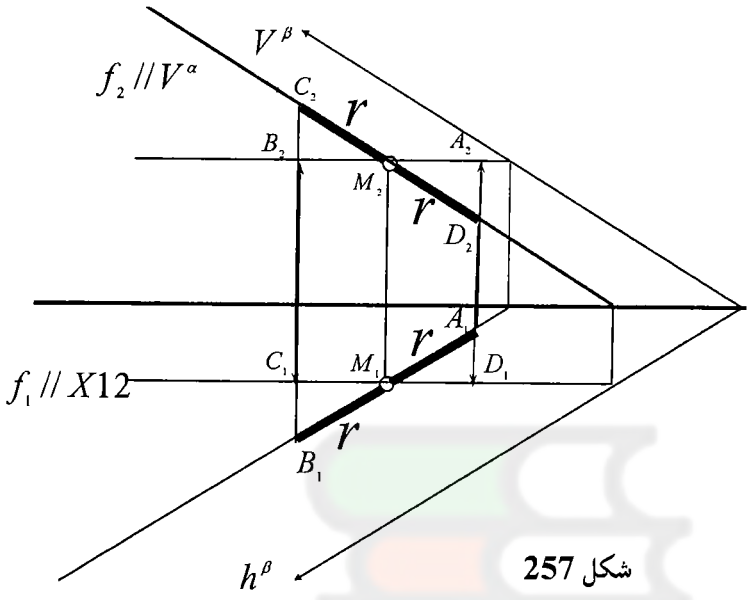
**فى المسقط الرأسى**

. نلاحظ أن أقصى طول يمكن أن يكون فى المسقط الرأسى هى لمستقيم وجهى ويظهر بطولة الحقيقى وبالتالى داخــل أى دائــرة سيكون أحد الأقطار هى مستقيم وجهــى لأنه يحقق أقصى بعد فى إتجاة الإسقاط على المستوى الرأسى وعلية سيكون مسقط هذا المستقيم الوجهى هو المحور الأكبر والمركز فى منتصفه لأنه يسأوى قطر الدائرة الحقيقى 2r شكل 256 أما مسقط هذا المحور فى المستوى الأفقى هــو نقطتــان عاديتان واقعتان على مسقط محيط الدائرة الأفقى وهو مسقط يوازى خط الأرض وأقصى طول لة هو *مايوازى إســقاط أقصى نقاط للمحور الأكبر الذى ظهر فى المستوى الرأسى* شكل 256

**المسقطين الأفقى والرأسى معا**

في الشكل الموضح شكل 257 يتم رسم من مركز الدائرة $M_2$ مستقيم وجهي و نوقع علية $C_2$, $D_2$ يبعدان عــن $M_2$ نصف القطر يكون هو المحور الأكبر فى المستوى الرأسى ومن هذا المستقيم الوجهي والنقاط $C_2$, $D_2$ نأتى بها فى المستوى الأفقى وهى C1, D1 حيث يعتبران نقطتان عاديتان على القطع في المسقط الأفقى في حين أنها عناصر المحور الأكبر في المستوى الرأسى. فى المسقط الأفقي يتم رسم من $M_1$ مستقيم أفقى نوقع عليه النقطتين $B_1$, $A_1$ يبعــدان عن$M_1$ نصف القطر ويكون هو المحور الأكبر فى المستوى الأفقى و النقاط $B_1$, $A_1$ نأتي بالمساقط الرأسية المناظره لها

في المستوى الرأسى وهى $A_2$ , $B_2$ فتكون نقاط عادية على القطع في المسقط الرأسى للقطع . وبذلك أصبح موجود فى كل مسقط كل من المحور الأكبر ومعه نقطتان عاديتان تقعان على محيط القطع




شكل 257

الناقص "على الدائرة" واللتان سيتم الإعتماد عليهما بعد ذلك. أى أنه بمجرد الحصول على نقطتى المحور الأكبر فى مسقط تكون حصلت على نقطتين عاديتان على الدائرة فى المسقط الأخر. يجب أن نلاحظ أن المحور الأكبر فى المسقط الأفقى ليس له علاقة بالمحور الأكبر فى المسقط الرأسى والعكس صحيح.

## التفسير الوصفى لإسقاط المحورالأصغر للدائرة

كما سبق الذكر من خواص الدائرة أن محورى الدائرة متعامدين. وفى الإسقاط قد أسقطنا المحور الأكبر بحالاته حيث يكون مستقيم أفقى فى $\pi_1$ ومستقيم وجهى فى $\pi_2$ وكلاهما بطوله الحقيقى فى مسقطة ، ومن إستنتاجات الإسقاط المساعد أن الزاوية القائمة تسقط قائمة مادام أحد اضلاعها بطولة الحقيقى. ومادام القطرين متعامدين وأحدهما بطوله الحقيقى، فإن إسقاط المحور الأصغر سيكون عمودى على المحور الأكبر ( أى عمودى على الأثار) كل فى مسقطة فى $\pi_1$ و $\pi_2$ . وبناء على ذلك : المحور الأصغر للقطع الناقص هو في الواقع مستقيم ذو ميل اعظم في مستوى الدائرة وبذلك يتم رسمه عمودى على الأثار أو مايوازيها (مستقيمات أفقية أو وجهية) من مركز الدائرة فى كل مسقط. ودائما طول المحور الأصغر يُستنتج بأحدى الطرق التى سيتم ذكرها بعد ذلك " إما بمعلومية نقطة على الدائرة والمحور الأكبر أو بالإسقاط المباشر من الدائرة خطى المسقط". والطريق المباشر للتطبيق السريع هو كالأتى:

الخلاصه: أنه بمجرد حل التمرين هندسيا أو وصفيا وتوفر $M$ – و $r$ –و أثار أى توفر المركز ونصف القطـــر ومستوى الدائرة أى إتجاه الأثار فإننا مباشرة نصنع الأتى :

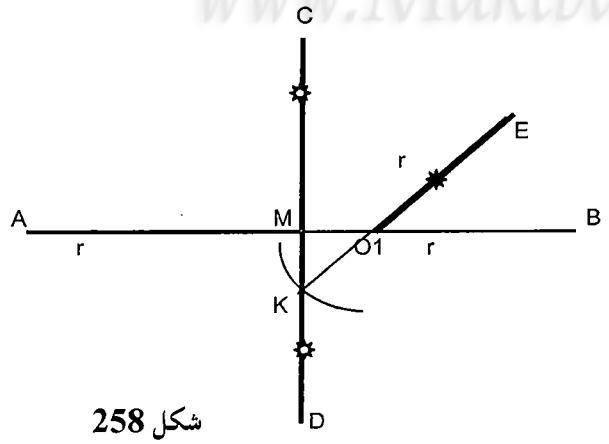
1. من المركز **M** نرسم خط موازى للأثار" إتجاه المحور الأكبر" وعمودى عليها "إتجاه المحور الأصغر"
2. على الموازى نوقع نصف القطر **r** يمين ويسار المركز فنحدد طول المحور الأكبر ونقاط نهايته فى كل مسقط ثم نوجد مساقط نقاط نهايات المحور الأكبر فى المسقط الأخر وهى نقاط عادية على الدائرة
3. العمودى من المركز على الأثار يقع عليه المحور الأصغر ويجب تحديد طوله وبالتالى يجب أن نتعلم أساليب تحديد طول المحور الأصغر وهذا ماسيتم عرضه فى البند القادم.

## تعيين قيمة المحور الأصغر

### 1. بمعلومية المحور الأكبر ونقطة على القطع

فى شكل 258 معلوم نقطة **E** نقطة على القطع ومعلوم القطر الأكبر **AB** ومركزه **M** نقيم منه عمود على **AB** هو المحل الهندسى للمحور الأصغر نركز في نقطة **E** بفتحة تساوى نصف القطر للدائرة أو نصف قطـــر المحـــور الأكـــبر **r=MB** وتقطع محل عمل المحور الأصغر فيقطع فى **K** نصل **KE** فيقطع المحور الأكبر فى $O_1$ فيكون $O_1E$ هو طول نصف المحور الأصغر نوقعه على المحور من **M** اعلى واسفل فنحصل على النقاط **C, D** هما اركان القطع النـــاقص.

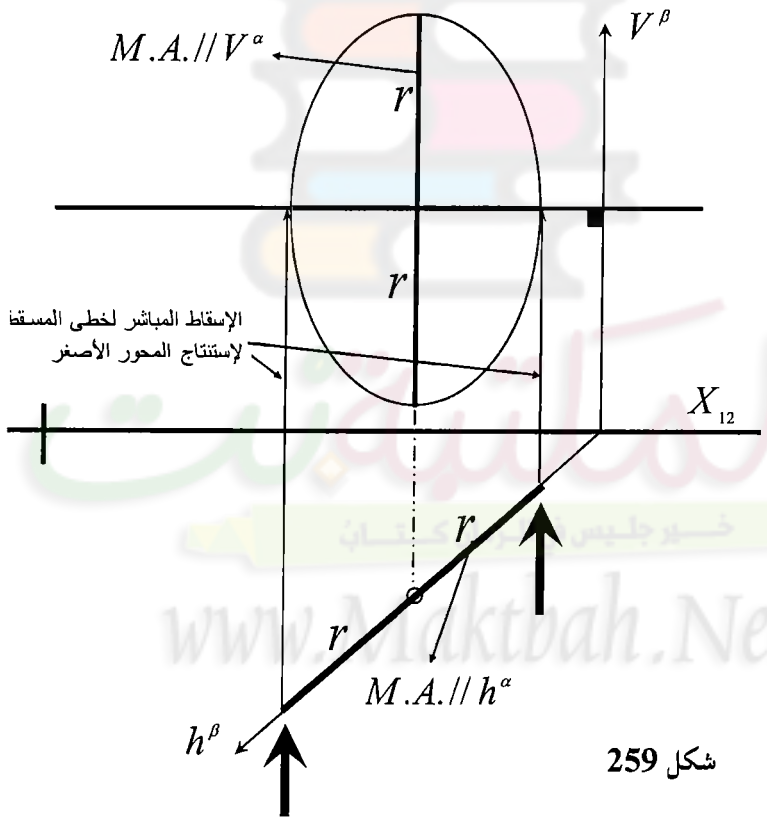
يجب أن نعلم أن الدائرة عموما المسقط العمودى لها على مستويات الإسقاط عبارة عن قطع ناقص مركزة $M_1$, $M_2$ وهى مسقط مركز الدائرة الاصـــلي **M** . قطر الدائرة الموازى لمســـتوى الإسقاط يســـقط بطولـــة الحقيقـــي ويسمى المحور الأكبر للقطع النـــاقص ويساوى ضعف نصف القطر




شكل 258

## 2. بمعلومية خطى المسقط

من شكل 259 نجد أن الدائرة إذا كانت فى مستوى عمودى خطى المسقط الأفقى لذلك الدائرة كلها يكون مسقطها الأفقى خط "خطى المسقط" وأقصى حدود لها كما هو واضح بالرسم. وطالما ظهرت الدائرة خط فإن الحدود عند أخر نقطتين على خطى المسقط هى الحدود الخارجية القصوى للدائرة وعند النظر فى إتجاه السهم على خطى المسقط فإنه يمكن الإسقاط على المسقط الرأسى بالإسقاط المباشر لهاتين النقطتين فيكون هو طول المحور الأصغر "أخر حدود الدائرة من اليمين والشمال أى أقصى حدود للمحور الأصغر". بالتالى لو أن المستوى ليس خطى المسقط وكان مستوى عام فإنه يتم تحويله لخطى المسقط لإستنتاج المحور الأصغر كما سيتم الشرح فى الأمثلة القادمة.



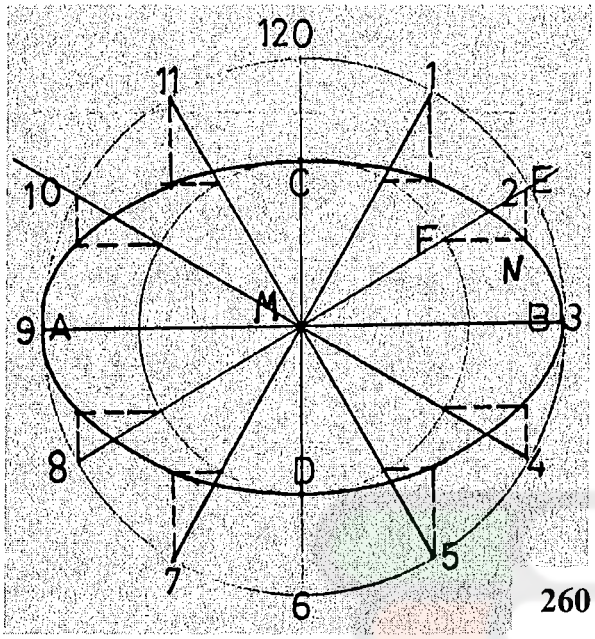

شكل 259

## طرق رسم القطع الناقص

**1.** رسم القطع الناقص بمعلومية المحـــور الأكبر و المحور الأصغر

طريقة التألف (الدائرتين المساعدتين )

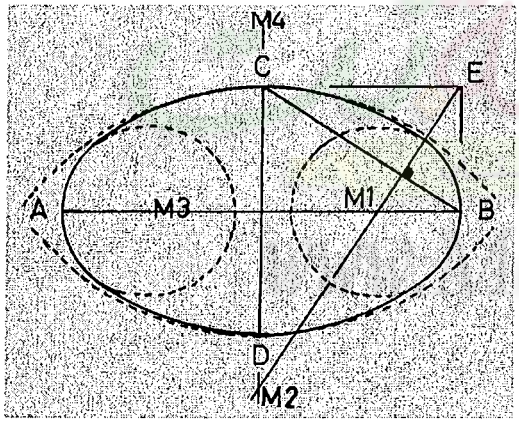
المعلوم من قطع ناقط محوره الأكـــبر **AB** ومحور الأصغر **CD** المتعامدان شكل **260** و المتقاطعان في مركز القطع ولتعيين نقـــط على القطع الناقص مـــن المركـــز نرســـم دائرتين، إحداهما ب نصف قطرها المحـــور الأكبر والأخرى نصف قطرها المحور الأصغر مركزهما **M** . نُقسم الدائرة الكبرى الى **12** قسم أو أى عـــدد زوجـــى. للحصول على نقاط على القطع – نصل إحدى نقاط التقسيم ولتكن **E=2** بالمركز **M** فتقتطع الدائرة الصـــغرى في نقطة **F** نرسم منها موازى للمحور الأصغر ومن **E** نرسم موازى للمحور الأكبر يتقاطعان في نقطة **N** أحدى النقـــاط على القطع نكرر العمل فنحصل على **12** نقطة حسب نقاط التقسيم ، نصلها فنحصل على الشكل النهائى للقطع شـــكل **260**.




شكل **260**

### 1-2. طريقة دائرة التكور ( البرجل أو الاقواس )

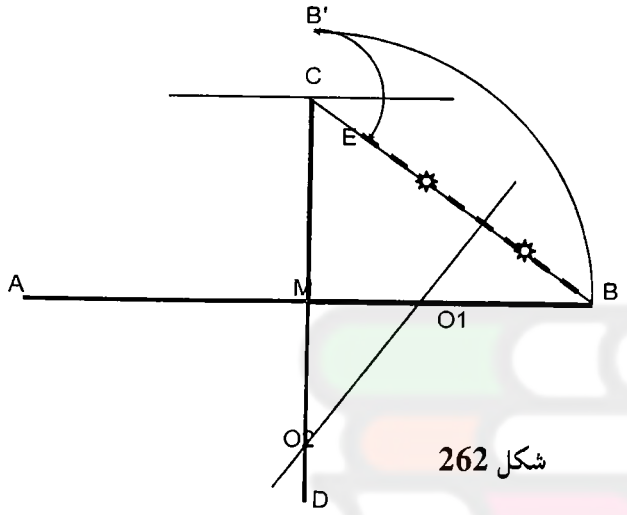
بمعلومية المحور الأكبر **AB** و الأصغر **CD** يتم رسم القطع الناقص بأن نقيم من **B** موازى **CD** ومن **C** مـــوازى **AB** يتقاطعان في نقطة **E**، نرسم من **E** عمودى على المستقيم الواصل بين **CB** يتقاطع مع **AR** في $M_1$ ومـــع **CD** في $M_2$ . $M_1$ هو مركز القوس الذى يمر بنقطة **B** ويُنقل للناحية الأخرى فنحصل على $M_3$ نرسم منها قوسين بنصف




شكل **261**

قطر $M_1B$ ، $M_3A$، ومن $M_2$ نرسم قوس نصف$M_2C$ وتنقلة من D فنحصل على $M_4$ نرسم منه قوس $M_4D$ نصف قطر الاقواس المرسومة يتم أحداثي التقارب بينهم برسم المنحنيات .

## 3-1. الطريقة الدقيقه



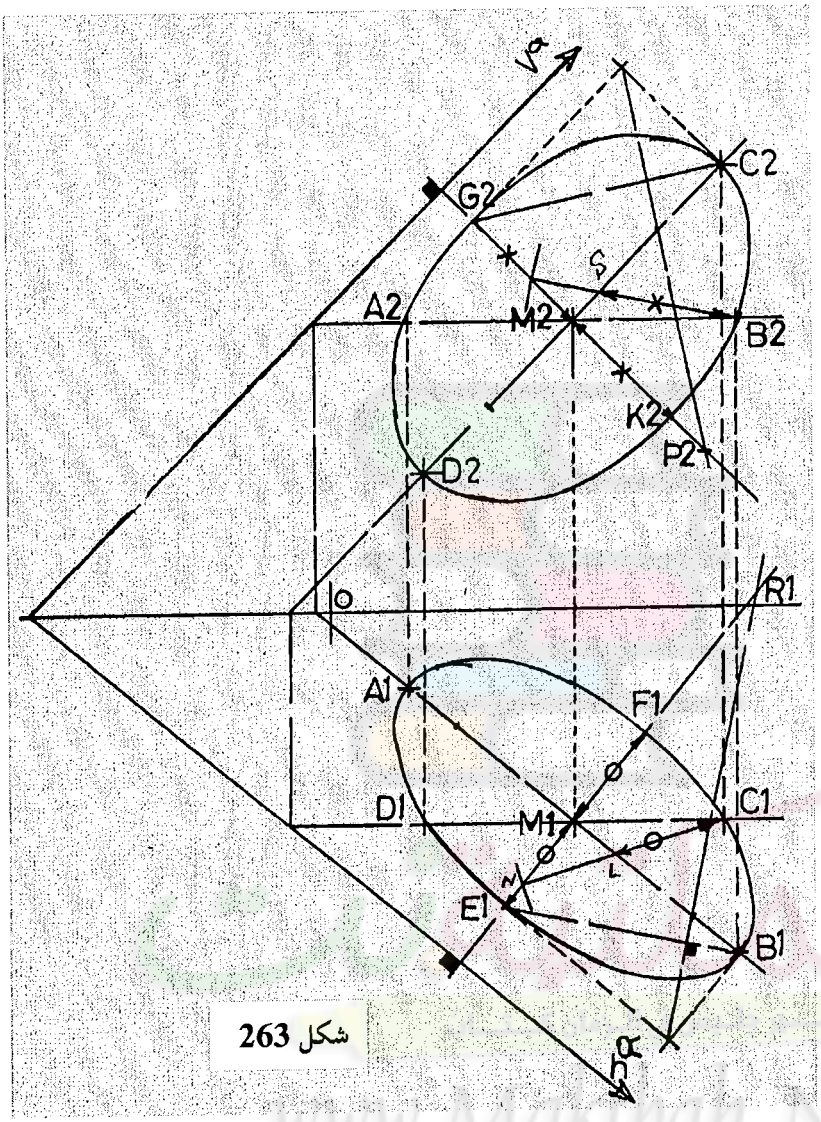
شكل 262

من شكل 262 نصل بداية المحـــور الأصغر ببداية المحور الأكـــبر وهمـــا نقطتى $C_1B$ ثم نطرح بالرسم فرق نصفى القطر (CB-MC)ويـــتم ذلك بأن نركز فى M وندور بنصف القطر MB حتى ينطبق علـــىخط عمل MC ونحصل على $B'$ فيظهر الفرق بين نصفى القطر الأكبر والأصغر وهو $CB'$ نعود ونركز فى C ونطرح بالرسم هذا الفرق مـــن المســـافه CB بالدوران مع عقارب الساعه حتى يقطع CB فيتبقى الجزء EB ننصفه ونقيم عمودى عليه فيطـــع المحـــور الأكبر فى نقطه O1 والأصغر فى أخرى O2 هما نقطتى الإرتكاز لنصف القطع حيث نرسم جزء من دائرة نصـــف قطرها O1B من المركز O1 ومن نظيره من ناحيه الطرف الأخر A وكذلك من O2 نركـــز بنصـــف القطـــر O2C ونرسم جزء الدائرة العلوى ثم ننقل المركز المناظر O2 أعلى C ونرسم نفس القوس فنوجـــد الجـــزء الأخير.

www.Maktbah.Net

**مثل الدائرة الواقعة فى المستوى $\alpha(-5,4,5)$ ومركزها $M(4,3.5,??)$ ونصف قطرها 3.5cm**
**التفكير: لابد أن نتعلم الإسلوب العلمى للتفكير كما نبهنا سابقا وهو كالاتى:**

نقول أن الدائرة هى $M$ – أثا ر $r$ – وبالتالى نبحث فى المعطيات ما هو المجود، فنجد أولا الأثار معروف إتجاهها لأن المستوى معروف، ثانيا المركز معروف ومعطى مباشرة، ثالثا نصف القطر معروف أيضـــا . من ذلك يتضح أنه ليس هناك مشكله تتطلب الحل ســـوى توقيع ورسم الدائرة . وبالفعل هذا هو الهدف من هذا التمرين ، أن تتعلم كيف ترسم دائرة كامله بعد الحصول على الثلاثه بنود شكل 263.



شكل 263

الحل:

1. نوقع المعطيات وهى المستوى والمركز
2. من المسقط الأفقى للمركز $M_1$ نرسم مسقط لمستقيم أفقى موازى للأثر الأفقى ونوقع عليه الطول لنصف القطـــر يمين ويسار فنحصل على المحور الأكبر فى المسقط الأفقى وهما $A_1B_1$ ونوجد مساقطهما الرأسية كنقـــاط علـــى مستقيم أفقى بالمستوى وهما $A_2B_2$ " وتصبح نقاط عاديه على الدائرة فى المسقط الرأسى ".

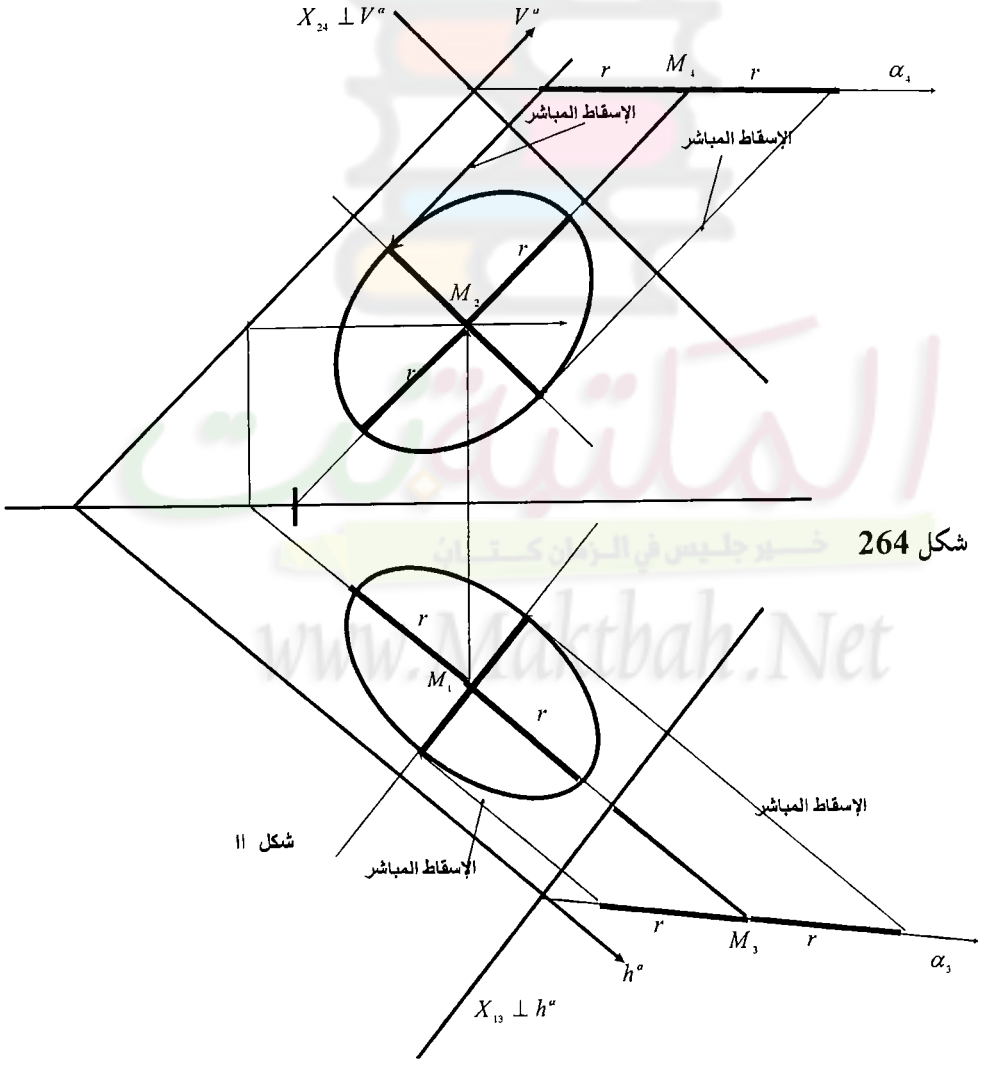
3. من المسقط الرأسى للمركز $M_2$ نرسم مسقط لمستقيم وجهى موازى للأثر الرأسى ونوقع عليه الطول لنصف القطر يمين ويسار فنحصل على المحور الأكبر فى المسقط الرأسى وهما $C_2D_2$ ونوجد مساقطهم الأفقية كنقاط على مستقيم وجهى بالمستوى وهما $C_1D_1$" وتصبح نقاط عاديه على الدائرة فى المسقط الأفقى "
4. من مساقط المركز $M_1,M_2$ نرسم أعمدة على الأثار فتكون هى المحل الهندسى للمحور الأصغر، ويبقى إذا تحديد طول المحور الأصغر فى كل من المسقط الأفقى والرأسى شكل 263
5. فى المسقط الأفقى نعتمد على $C_1$ على إنها نقطة عادية على الدائرة ونستنتج طول المحور الأصغر فى المسقط الأفقى بإستخدام طريقه معلوميه المحور الأكبر ونقطة على الدائرة، فنركز فى $C_1$ بطول نصف قطر الدائرة ونقطع إتجاه المحور الأصغر فى نقطة N وهى فى الجانب الأخر من النقطه $C_1$ فيقطع المحور الأكبر فى L فيكون $LC_1$ هو طول نصف المحور الأصغر فى المستوى الأفقى. يتم توقيع هذا الطول على العمودى إبتداء من المركز فتتحدد نهايات المحور الأصغر فى المستوى الأفقى. نستخدم أحد اساليب رسم القطع الناقص ونرسمه
6. فى المسقط الرأسى نعتمد على $B_2$ على إنها نقطة عاديه على الدائرة ونستنتج طول المحور الأصغر فى المسقط الرأسى بإستخدام طريقه معلوميه المحور الأكبر ونقطة على الدائرة، فنركز فى $B_2$ بطول نصف قطر الدائرة ونقطع إتجاه المحور الأصغر فى نقطة وهى فى الجانب الأخر من النقطه $B_2$ فيقطع المحور الأكبر فى S فيكون $B_2S$ هو طول نصف المحور الأصغر فى المستوى الرأسى. يتم توقيع هذا الطول على العمودى إبتداء من المركز فتتحدد نهايات المحور الأصغر فى المستوى الرأسى. نستخدم أحد اساليب رسم القطع الناقص ونرسمه – شكل 263.

فى هذا المثال تم إستنتاج المحور الأصغر بمعلوميه المحور الأكبر ونقطة عادية على الدائرة. وسوف نشرح المثال القادم الذى يوضح إسلوب إستنتاج المحور الأصغر بتحويل المستوى إلى خطى المسقط.

**مثال : المعلوم المستوى والمركز ونصف القطر للدائرة: إرسم الدائرة فى المستوى الأفقى والرأسى**

الحل:بنفس الإسلوب السابق يتم الحل ولكن الإختلاف فى إسلوب إيجاد المحور الأصغر شكل 264 ويتم كالاتى.

1. فى المستوى الأفقى يتم تحويل المستوى لخطى المسقط وبالتالى الدائرة تظهر كخط طوله 2r يمن وشمـــال $M_3$ فتتحدد نهايات حدود الدائرة. وبالتالى يتم تحديد المحور الأصغر فى المستوى الأفقى بالإسقاط المباشر من خطى المسقط من الثلاثات كما هو موضح فى الشكل 264
2. فى المستوى الرأسى يتم تحويل المستوى لخطى المسقط وبالتالى الدائرة تظهر كخط طوله 2r يمن وشمـــال $M_4$ فتتحدد نهايات حدود الدائرة. وبالتالى يتم تحديد المحور الأصغر فى المستوى الرأسى بالإسقاط المباشر من خطى المسقط من الاربعات كما هو موضح فى الشكل264

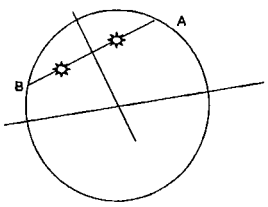



شكل 264

شكل 11

**مثال: مثل الدائرة التى يمر محيطها بالنقطتين B(11,7,3.5) ,A(8,4,2.5) ويقع مركزها على المستقيم m[(12,7.5,4), (8,1.5,6)]**

الحل :من المعطيات ومن إسلوب التفكير فإنه غير موجود الثلاثة متطلبات لرسم الدائرة لذلك نتجه للخواص الهندسيه للدائرة بناء على المعطيات ونرى تحقق الحل فى الهندسة المستوية. من شكل 265 المعلوم نقطتين على الدائرة " هما وتر" ومحل هندسى للمركز "على m " وبالتالى ننصف الوتر ونقيم عمود عليه يقطع المستقيم m فى المركز ويصبح المركز والنقطتين على الدائرة هما الثلاثة نقاط المكونة لمستوى الدائرة وكذلك نصف القطر يصبح معروف.



شكل 265

2. ولعمل ذلك يتم فى شكل 266 كما سبق الذكر مادام سيتم عمل عمود واحد على مستقيم "الوتر AB" فى الهندسة المستويه فإنه يتم إستخدام الإسقاط المساعد لهذا المستقيم لتحويله لطول حقيقى ثم نقيم عمودى عليه نستنتج المركز ونعود به.


شكل 266

3. نكون من المركز M والنقطتين A,B مستوى .نوجد الطول الحقيقى لنصف قطر الدائرة بفرق البعد.

4. نبدأ فى رسم الدائرة برسم المحور الأكبر موازى لأى مستقيم أفقى وكذلك وجهى واقعين فى المستوى ولاداعى لإيجاد الأثار ونكتفى فقط بإتجاهها.

5. نحول المستوى لخطى المسقط لإستنتاج المحور الأصغر فى كلا المسقطين

6. يصبح محدد المحور الاكبر والأصغر وهم مظللين وقد أكتفينا بذلك حتى يكون الحل واضح ، ولـــك أن تُكمـــل الشكل

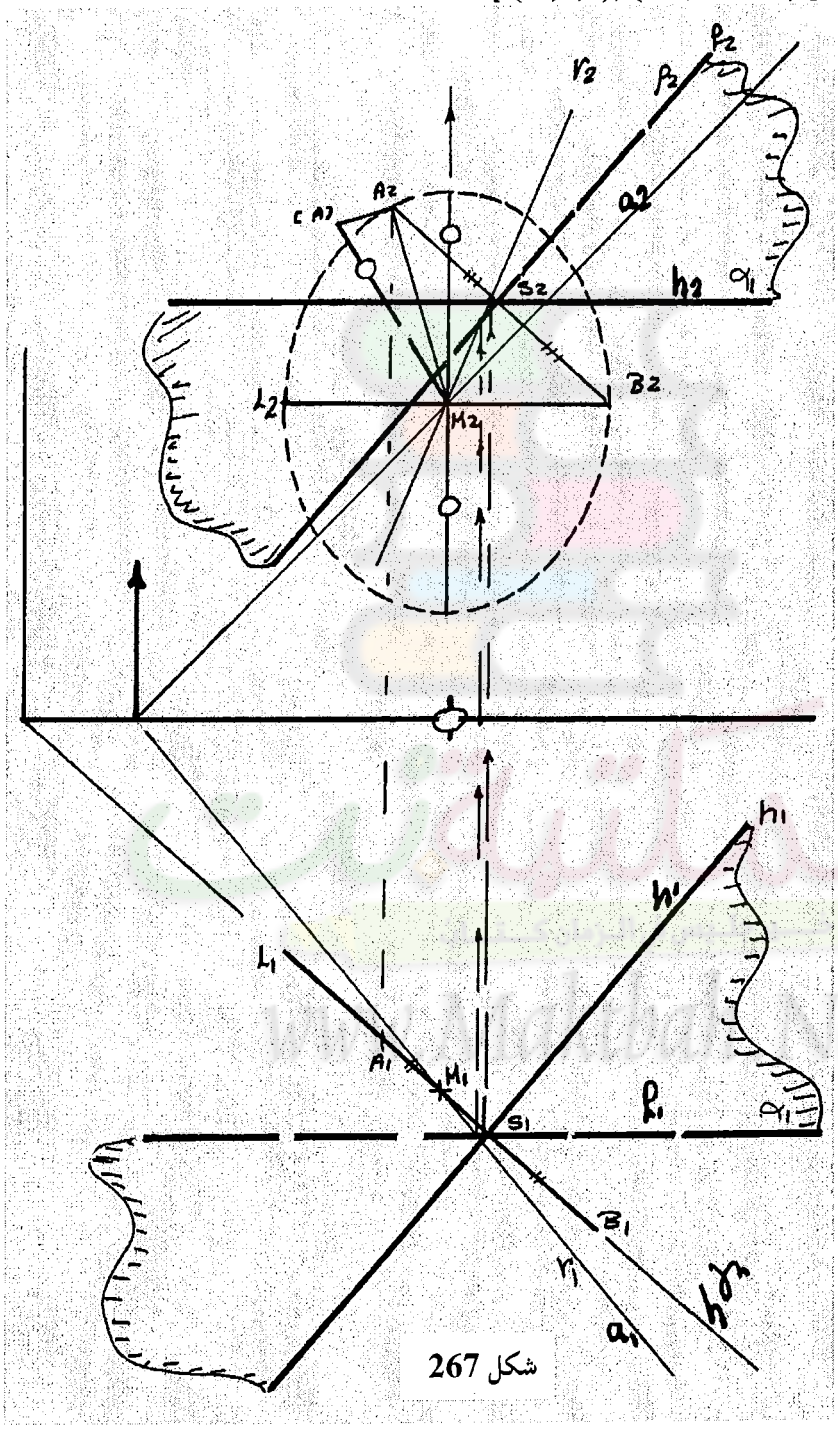
**مثل الدائرة التى يقع مركزها على المستقيم a وتمر بالنقطتين A(-1,5,8), B(2.5,8,5)، حيث المستقيم a ممثل كالأتى: [ (-5,0,0), (0.5,6.5,5.5) ] a**

الحل:

1. ننصف الوتر ونقـيم عمود عليه يقطع المستقيم a فى المركز ويصـبح المركـز والنقطتين على الدائرة هـما الثلاثة نقاط المكونه لمستوى الدائرة وكذلك نصف القطر يصبح معروف. ويتم رسـم المستوى العمودى بإستخدام القياس حيث نرسم مستوى عمودى ممثـل بمسـتقيمين أحدهما أفقى عمودى والأخر وجهـى عمـودى $f$ , $h$ .

نوجد نقطة تقاطع المستقيم a مـع المسـتوى بإسـتخدام إسلوب الموضع الخاص بنقطة تقاطع مستقيم مع مسـتوى ممثل بمستقيمين فتكون M.

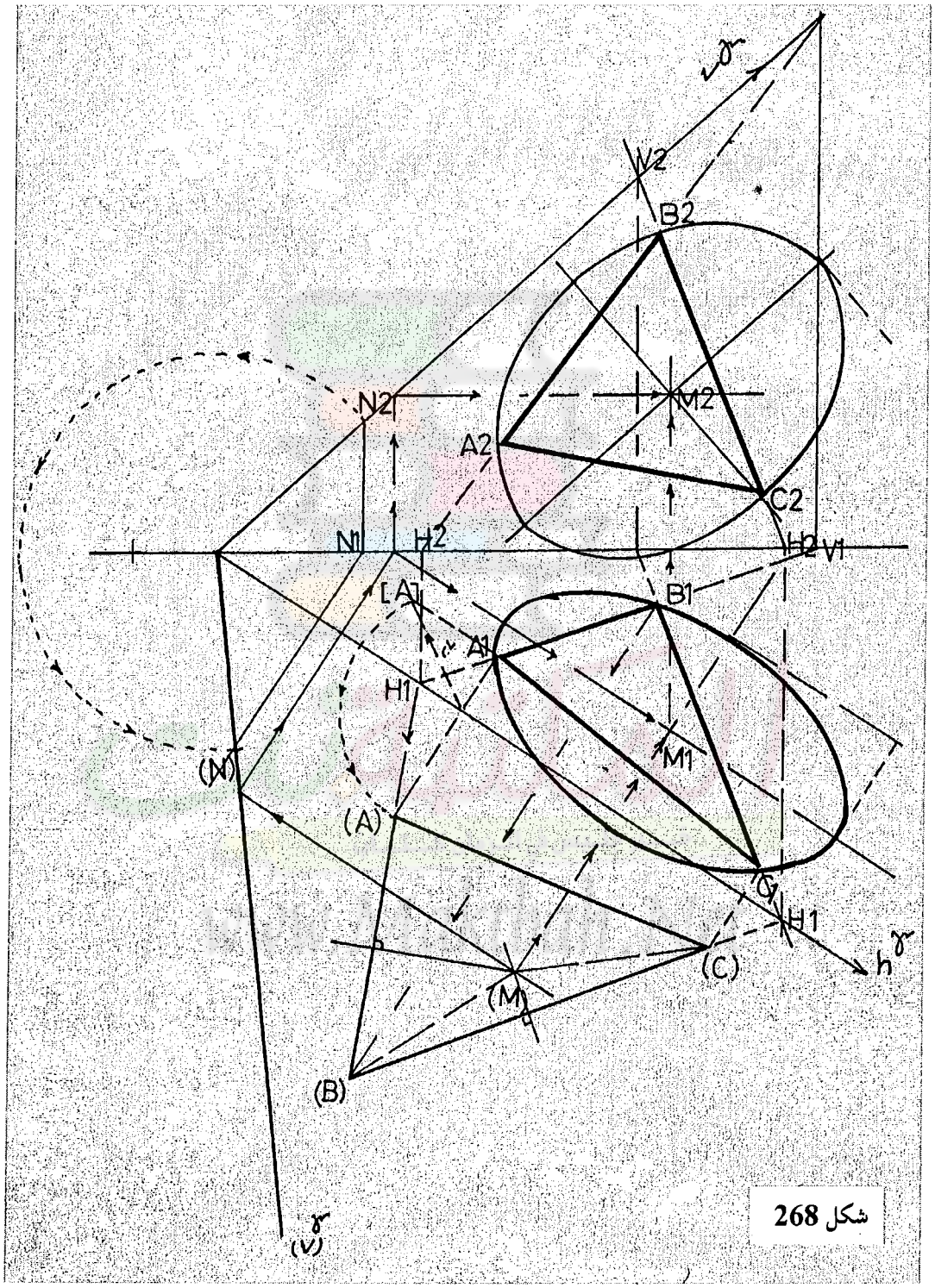
2. $M_1$ والنقطتين $A_1$و$B_1$ وقعا علـى خـط واحد أى أن مستوى الدائرة خطى أى عمـودى علـى المستوى الأفقى وبالتالى يمكن تحديد المحور الأكبر والأصغر فى المسـتوى الرأسـى وإستكمال الشكل كمـا فى الشكل 267 .




شكل 267

**معلوم ثلاثة نقاط A(6,2,2), B(9,1,6), C(11,6,1) مثل الدائرة التى تمر بهذه النقاط**

الحل: من المعطيات ومن إسلوب التفكير فإنه غير موجود المركز أو نصف القطر وإنما الموجود ثلاث نقاط مكونة لمستوى الدائرة. وبالتالى نلجأ للهندسة المستوية لنبحث فكره الحل. ومن الهندسة المستوية يتم تنصيف أى ضلعين وإقامة أعمدة



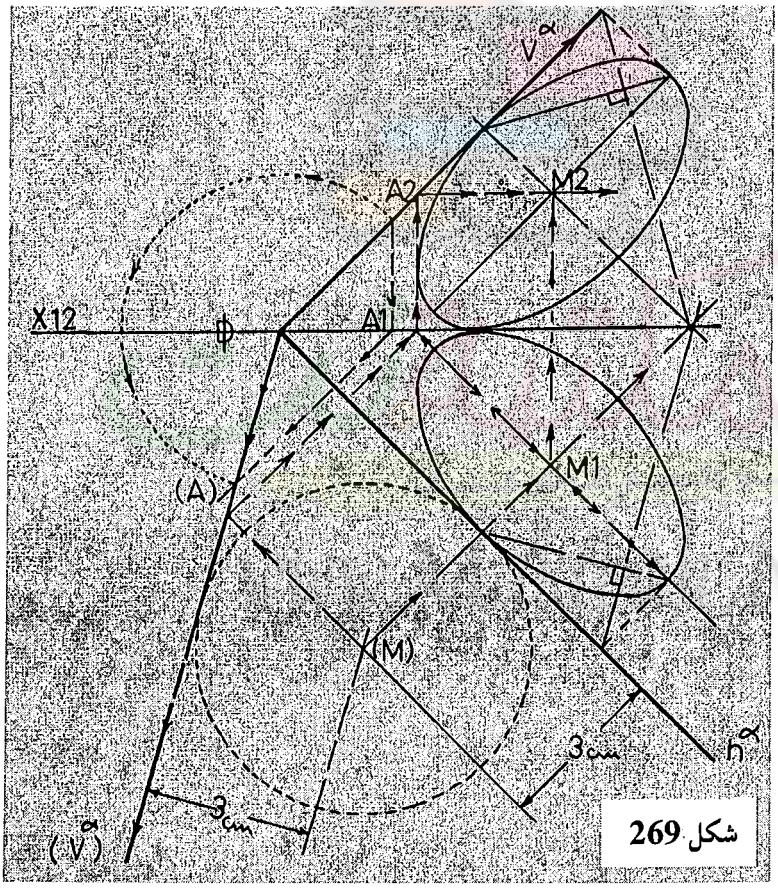

شكل 268

عليها فنوجد المركز. وليتم ذلك فى الهندسة الوصفية لابد أن نحصل على الشكل الحقيقى للمستوى وهذا ماأكدناه سابقا أنه يجب أن نعلم أننا طالما وجدنا أن الحل فى الهندسة المستويه يستلزم رسم أكثر من عمود فإننا نتجه مباشـــرة لإيجـــاد الشكل الحقيقى للمستوى.

لذلك من شكل 268 أول خطوه هى إيجاد الشكل الحقيقى للمستوى " إما بالإسقاط المساعد أو بالدوران" ونحن قـــد استخدمنا الدوران فى هذا المثال وبالتالى إستخدمنا خواص الهندسة المستويه فى إيجاد المركز وكذلك نصف القطر فى ال T.S . ومن ثم نعود بهم وأصبح لدينا كل المتطلبات لرسم الدائرة.

**مثل دائرة تمس كل من $h^{\alpha},V^{\alpha}$ للمستوى $\alpha(1,135^0,45^0)$ ونصف قطرها 3cm.**

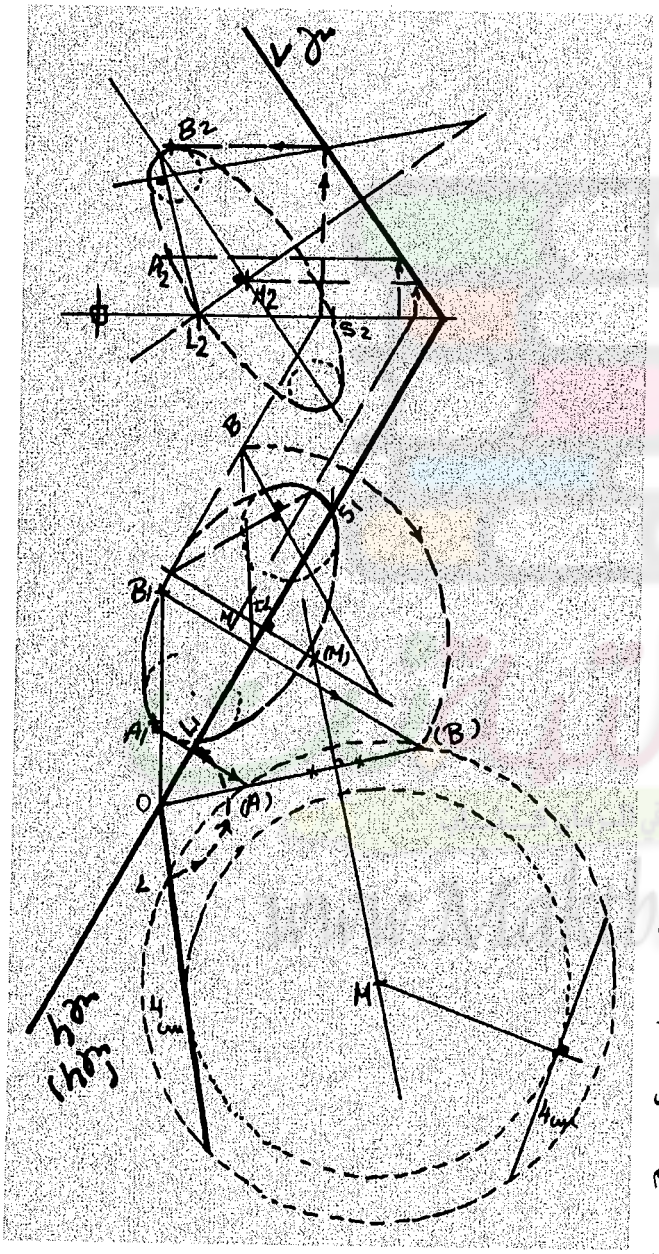
الحل: نوجد الشكل الحقيقـــى للمســـتوى بأثـــاره وذلـــك باستخدام الإسقاط المساعد أو الدوران "والـــدوران أســـهل وأبسط عامـــة". فى شـــكل 269 نســـتخدم العمليـــات الهندسيه فى إيجاد مركز دائرة تمس خطين مستقيمين وهمـــا الأثار ونصف قطرهـــا 3cm فنوجد المركز ونعود به ونكمل الدائرة فى الإسقاط حيث توفر الثلاثة أشـــياء M –و r -و أثار .



شكل 269

**مثال: مثل الدائرة التى تمر بالنقطتين التاليتين ( A( 1,6,? ) , B ( 1, 4, ? ) إذا كان مستواها هو $\lambda$ (5,9,7) وتقطع من الأثر الأفقى له طولا قدره 4 سم .**

الحل:من الوصول للشكل الحقيقى لمستوى الدائرة يمكن الحل لأن المطلوب من التمرين يتم حله باستخدام عمليات الهندسة المستويه وبالتالى لابد أن نكون فى الشكل الحقيقى. فى شكل 270 يتم إستخدام الدوران للحصول على (A), (B) وهو وتر فى الدائرة المطلوبه. ننصف الوتر (A) (B) ونقيم عمودى فيكون المحل الهندسى لمراكز الدوائر التى تمر بالنقطتين. نختار أى نقطة لتكون مركز لدائرة حقيقية تمر بالنقطتين ونصنعها. من داخل هذه الدائرة يتم عمل وتر بطول 4cm ثم نركز فى مركز الدائرة ونصنع دائرة بداخلها تمس الوتر 4cm . من نقطة O مركز على محور الدوران للنقطتان A,B ، نصنع مماس للدائرة التى تمس الوتر 4cm فيقطع الدائرة الخارجية فى نقطة L وهى نقطة بداية الوتر المطلوب للدائرة وهى مكانها الحقيقى على الأثر فيتم دورانها على الأثر الأفقى فنحصل على $L_1$ . منها نقيس 4cm على الأثر فيكون الجزء المقطوع من الأثر ونصفه ونرسم عمودى عليه فيكون محل هندسى للمركز سواء (M) أو M حيث يتم تحديد (M) بتقاطع العمودى مع المحل الهندسى



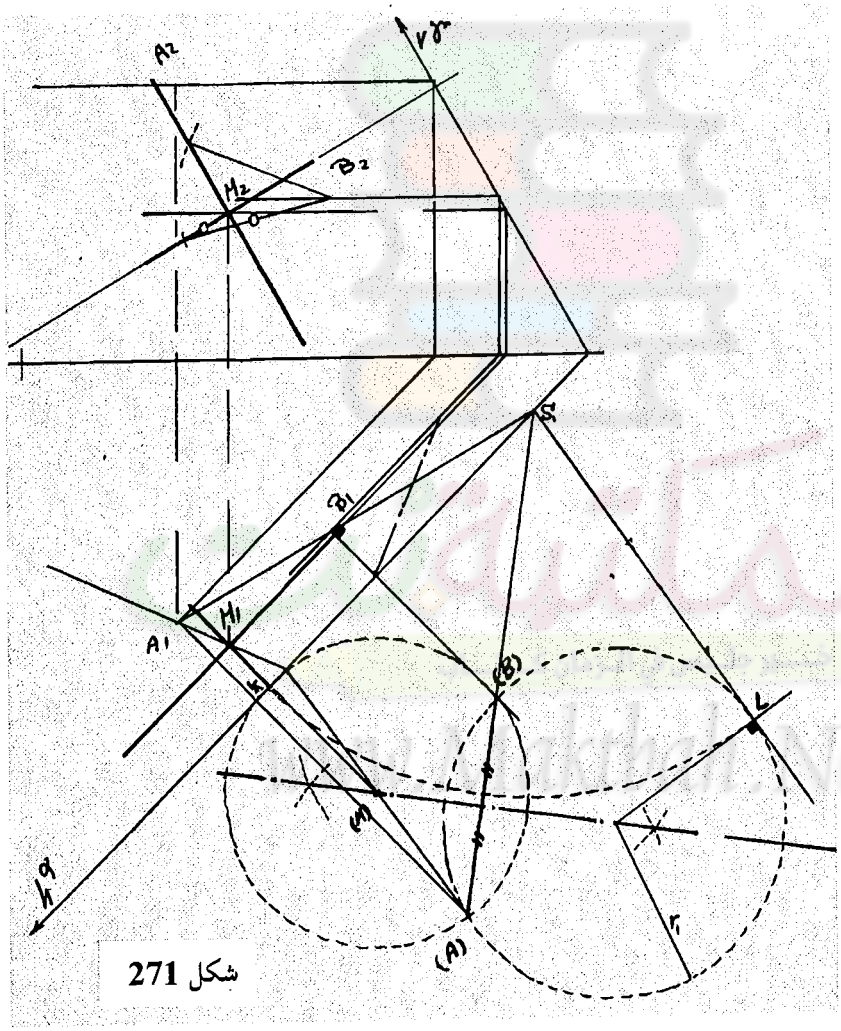
شكل 270

لمركز الدائرة فى الدوران ومن ثم نعود ونأتى M ونكمل الحل لإستكمال شكل الدائرة. ملحوظة: هذا الحـــل مأخوذ من العمليات الهندسة ويمكن العودة للعمليات لمعرفة الحل الهندسى.

**مثال: مثل الدائرة التى تمر بالنقطتين التاليتين A(2.5,5,5), B(6,3.5,3) اذا كان مستواها هو $(11,45^0,120^0)$ $\alpha$ وتمس الأثر الأفقى فى نقطة K مع إستنتاج نقطة K.**

الحل: بالدوران نوجد (B), (A) وننصفه أيضا ونصنع عمودى عليه يكون محل هندسى لمراكز الدوائر التى تمر بهـــم.

نختار أى نقطة ونصنع دائرة بنصف قطر $r_1$ ومن $S_1$ نصنع مماس لهذه الدائرة يمـــس فى L بـــدوران نقطـــة التمـــاس إلى الأثـــر نحصل علـــى نقطـــة التماس الأصـــلية K حيث أن النسبة SK أو SL ثابتة لكـــل الدوائر الـــتى تمـــر بالنقطتين ، مـــن K نصنع عمودى علـــى الأثر فى إتجاه الدوران فنوجد (M) ونرجعه نوجد $M_1$و $M_2$ . ونكمل الحل



شكل 271

# تمارين الدائرة

1- معلوم مستوى $\alpha$ ( -7,7,? ) ونقطة فيه M ( 0,3,3 ) مثل الدائرة التي تقع في $\alpha$ ومركزها M ويمر محيطها بالنقطة P ( -2,3,Z ) .

2- معلوم نقطة P ( 6,1,2.5 ) ومستقيم m [ A ( 5,6.5,5 ) , B ( 8,1,1 ) ] مثل المسار الناتج عن دوران النقطة P حول المستقيم m .

3- مثل الدائرة الواقعة في المستوى $\alpha$ ( 6,4,5 ) وتمس المستقيم $l = AB$ ويقع مركزها M على المستقيم $k$ حيث : CD =

A ( 1.5 , 0 , ? ),B ( -3,4.5 , ? ) ,c ( 2,2,3 ) D ( -4,0,0 ) .

4- مثل دائرة C مسقطها الرأسي جزء مستقيم $B_2$ (2,2) و $A_2$ ( 6,7 ) ومركزها M يبعد 4 سم عن $\pi_2$

5- المعلوم $\alpha$ ( $1,135^0,45^0$ ) والمطلوب تمثيل الدائرة التي تمس $\alpha$ h و $\alpha$v ونصف قطرها 3 سم .

6- معلوم ثلاث نقاط A ( 6,2,2 ) و B ( 9,1,6 ) و C ( 11,6,1 ) مثل الدائرة التي تمر بهذه النقاط .

7- المعلوم مستوى رأسي $\alpha$ يمر بالنقطة M ( 6,6,4 ) ويميل على $\pi_2$ بزاوية مقدارها $45^0$ مثل دائرة تقع في $\alpha$ ومركزها M ونصف قطرها 2cm .

8- مثل دائرة رأسية مركزها النقطة M ( 6,3,3 ) ويمر محيطها بالنقطة P ( 5,5,4.5 )

9- المعلوم مستوى $\alpha$ عمودي على $\pi_2$ يمر بالنقطة M ( 2,4,3 ) ويميل على $\pi_2$ بالزاوية $60^0$ مثل دائرة تقع في $\alpha$ ومركزها M وتمس الاثر الافقي للمستوى .

10 - مثل الدائرة التي تمر بالنقطتين A ( 8,4,2.5 ) و B ( 11,7,3.5 ) ويقع مركزها على المستقيم m [ p( 12,7.5,4 ) , Q ( 8,1.5,6 ) ] .

11- المعلوم نقطة P ومستقيم v مثل المسار الذي ترسمه النقطة P اذا دارت حول v دورة كاملة في الحالات الأتية : اولا : P ( 6,2,3 ) والمستقيم v رأسي يمر بالنقطة A ( 5,4,z ) .

ثانيا : P ( 5,6,2 ) المستقيم v وجهي يميل على $\pi_1$

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

# الباب العاشر

# الكرة

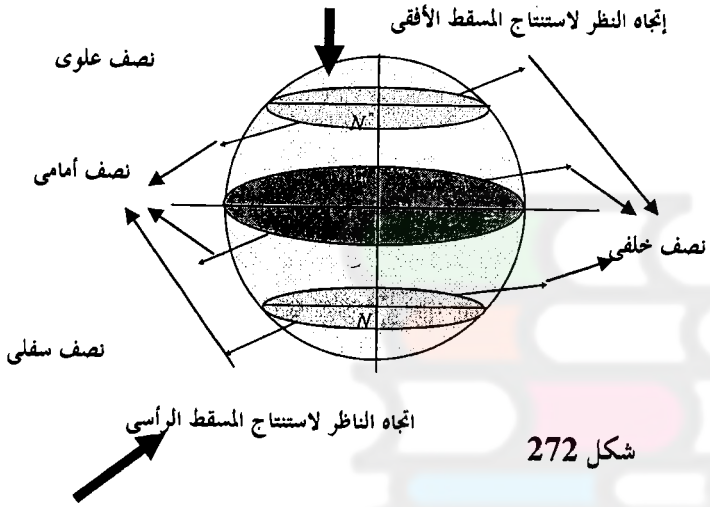
المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

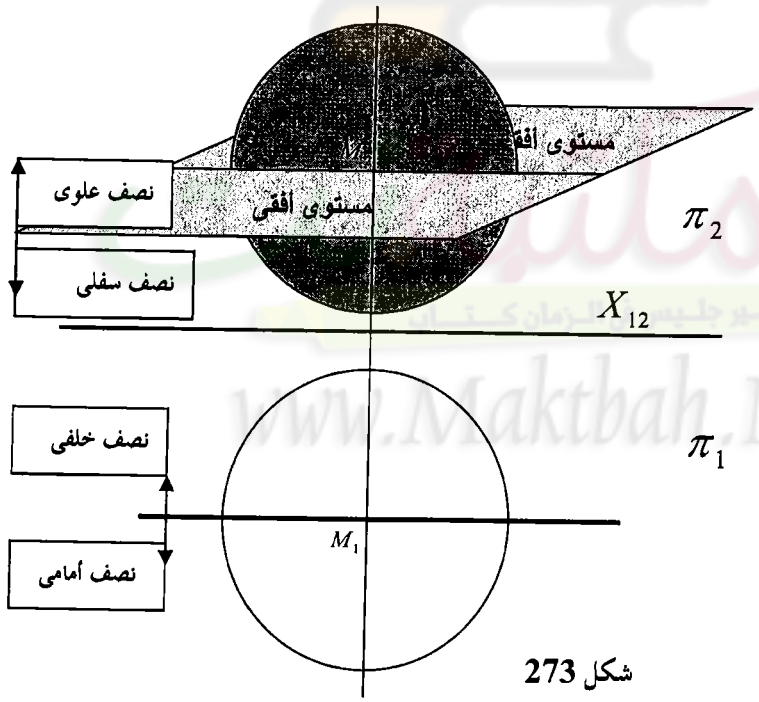
# تمثيل الكرة

## الكرة فى الفراغ والإسقاط

الكرة هى المحل الهندسى فى الفراغ لجميع النقاط المتساوية البعد عن نقطة واحدة وتبعد مسافة **R** عن هذه النقطة. والكرة مثلثها مثل أى جسم لها مساقطها الرأسية ومساقطها الأفقية وكذلك الجانبية. يجب أن نعلم أن الكرة إذا ماوضعناها أمام المستوى الرأسى وفوق المستوى الأفقى فإن هذه الكرة تنقسم إلى أربع أنصاف إعتبارية. فالكرة لو تم قطعها بمستوى موازى للمستوى وجهى "موازى للرأسى" فإن الكرة تكون نصفين ، نصف أمام المستوى الرأسى وهو النصف الخلفى عند الإسقاط فى المسقط الأفقى، " كما يتضح من النظر فى إتجاه السهم عند النظر من أعلى لأسفل فى الشكل الموضح 272 ". هذا يتضح فى المسقط الأفقى للكرة فى شكل 273و 274حيث تظهر الكرة فى المسقط الأفقى دائرة من نصفين من محورها، نصف من المحور الخاص بالكرة ويتجه نحو خط الأرض هو الخلفى ونصف بعد محور الكرة للخارج هو النصف الأمامى شكل 274 و273. أما عند النظر فى إتجاه عمودى على المستوى الرأسى وقطع الكرة من منتصفها بمستوى أفقى ، فإن الكرة

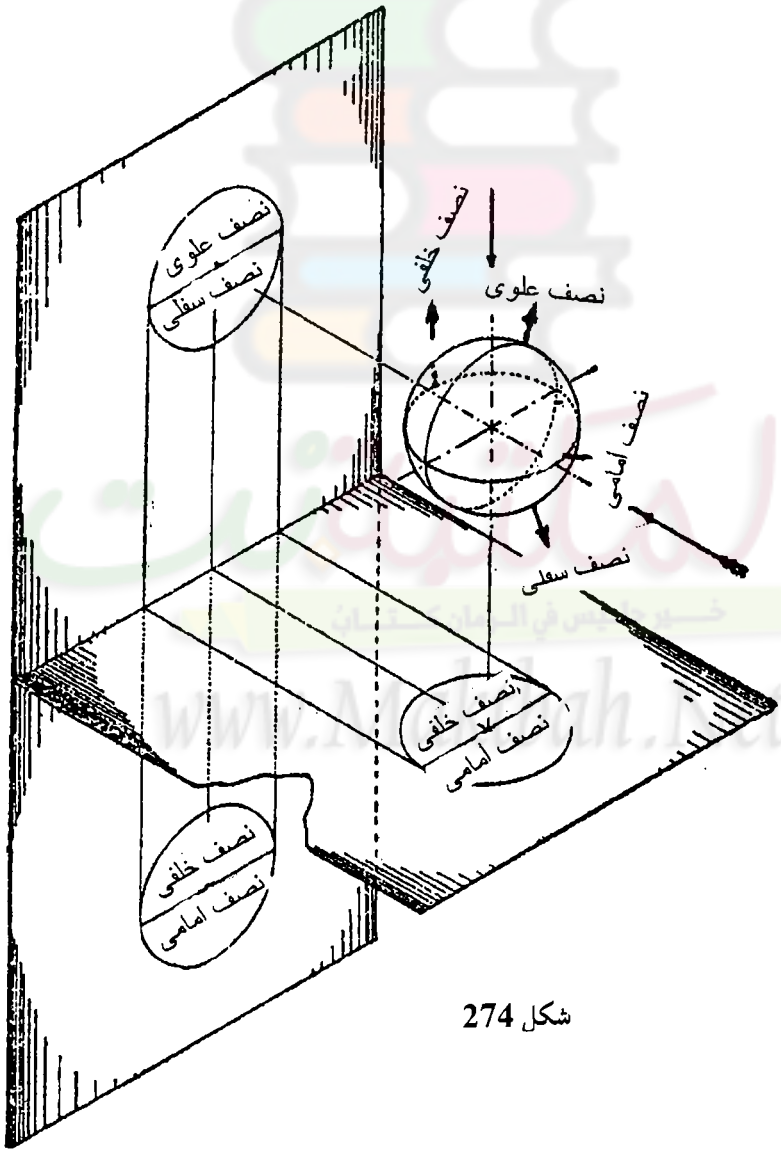



شكل 272




شكل 273

تنقسم أمام الناظر على المستوى الرأسى لنصفين، نصف علوى أعلى المحور ونصف سفلى أسفل المحور شـــكل 273و 274. وبالتالى الكرة فى مسقطها فى المستوى الرأسى نصفين أحدهما علوى والأخر سفلى، ومسقطها فى المستوى الأفقى نصفين أحدهما أمامى والأخر خلفى. لذا يجب أن نعلم أن الكرة عندما تُقطع بمستويات أفقيةة تقطعها فى دوائر موازيـــة للمستوى الأفقى وتظهر بشكلها الحقيقى فى المستوى الأفقىشكل 272 وتظهر فى المستوى الرأسى خطية المسقط طولها 2r . وكذلك لو تم قطع الكرة بمستويات وجهية فإنها تقطع الكرة فى دوائر وجهية تظهر بشكلها الحقيقى فى المستوى الرأسى" دوائر حقيقية " وتظهر خطية المسقط الأفقى طولها 2r . وسنبدأ الشرح للخواص باستخدام أمثلة مباشرة تدلل علىطبيعة الخواص العامة للكرة.

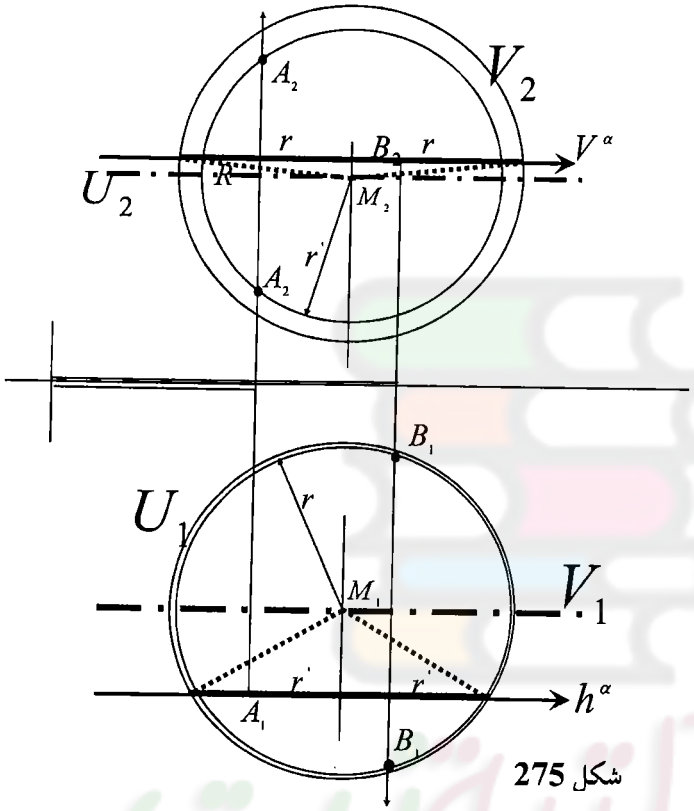



شكل 274

## إستنتاج المسقط الناقص للنقاط على سطح الكرة

مثل الكرة $\phi$ مع تعيين المسقط الناقص للنقطة A الواقعة على سطح الكرة $\phi$ والمعلوم منها فقط المسقط الأفقى $A_1$ وكذلك بالنسبة للنقطة B معلوم منها $B_2$ .

الحـــل: فى شـــكل 275 الإطـــار الخارجي للمسقط الأفقى هو دائـــرة تعرف بالمحيط $U_1$ ومركزهـــا $M_1$ و نصف قطرها R ويكـــون المســـقط الرأسى لهذه الدائرة هو خط مستقيم يوازى خط الأرض $X_{12}$ ويسمي $U_2$ وتعرف الدائرة ب $U_1 (M_1 ,R)$ الاطار الخارجي للمسقط الرأسى هو دائرة تعرف بالمحيط $V_2$ ومركزهـــا $M_2$ ونصف قطرها هو نفس نصف قطر الـــدائرة الأفقـــية R فيكـــون المسقط الأفقى لهذه الدائرة هو خط مستقيم يوازىخط الأرض X12 ويسمى $V_1$ وتعرف الـــدائرة $V_2(M_2 ,R)$




شكل 275

شكل 275 .

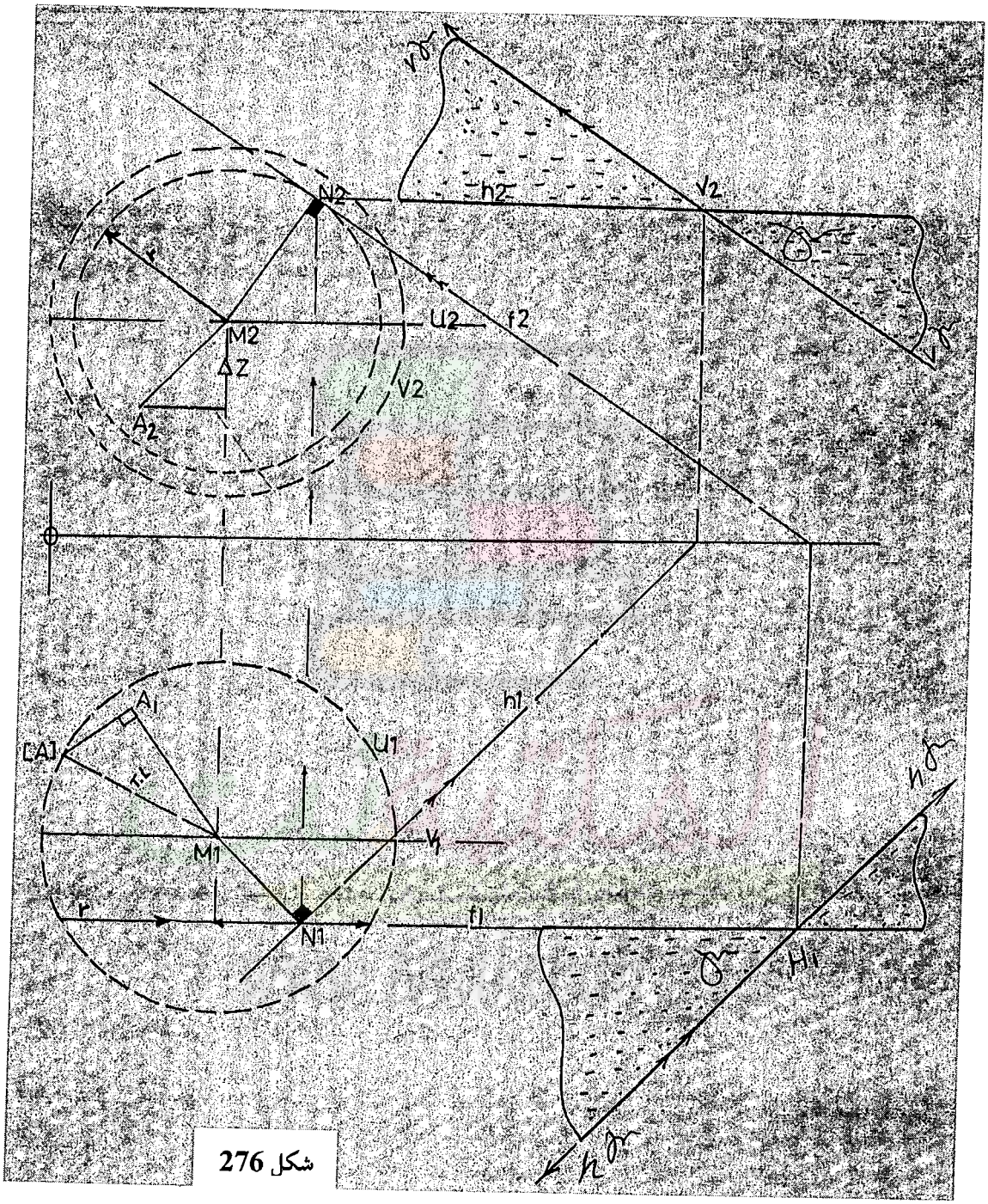
ولتعيين المسقط الرأسى للنقطة $A_1$ نمرر مستوى وجهي يمر بالنقطة A1 في دائرة وجهية تظهـــر خـــط مســـتقيم في المستوى الأفقى قطرها 2r وعلية نأخذ نصفها وهي r وننقله إلى المسقط الرأسى ونركز في $M_2$ ونصـــنع دائـــرة r ونسقط $A_1$ عليها فيكون هناك مسقطان أحدهما أعلى U2 و الأخر أسفلها أى أحدهما على النصف العلوى للكرة.و الأخر يقع على النصف السفلي للكرة وعلية العلوى هو $A_2$ و السفلي $A_2'$ وهذه النقطة تقع في النصف الأمـــامي للكرة حيث مسقطها أسفل $V_1$ في المسقط الأفقى ولو كانت تقع أعلى $V_1$ تكون هذه النقطة في النصف الخلفي للكرة . ونكرر ذلك بالنسبه للنقطة B بإستخدام مستوى أفقى شكل 275.

**مثل كرة مركزها M(4,7,5) وتقع نقطة A(2,4,3) علي سطحها وإذا كانت N1(6,9) هي المسقط الأفقى لنقطة N التى تقع على النصف العلوى لسطح الكرة ، عين $N_2$ ثم مثل المستوى المماس للكرة عند N .**

الحل: أولا لايوجد سوى المركز **M** ونقطة **A** على سطح الكرة شكل 276، وبالتالى نصف قطر الكرة هـو **MA** ولكنه ليس طول حقيقى ، لذلك نبدأ بإستنتاج الطول الحقيقى لنصف قطر الكرة **R=AM "T.L"** ثم من المركز يتم رسم الكرة .ولإستنتاج المسقط الرأسى الناقص لنقطة **N** يتم تمرير مستوى وجهى بالمسقط $N_1$ فيقطع الكـرة فى دائرة وجهية مسقطها الأفقى خطى ويظهر نصف قطرها **r** فنرسم الدائرة الرأسية الحقيقية بنصف القطر **r** ثم نصـعد من$N_1$ عليها لنوجد $N_2$ والتى تقع على النصف العلوى فنستنتج الإحداثى الناقص للنقطة **N**.

المستوى المماس لسطح الكرة: المستوى المماس لسطح الكرة فى نقطة Nهو مستوى عمودى على نصف القطر **MN** من نقطة **N** ، وعيه نرسم المستوى $\gamma$ مستوى عمودى على نصف القطر من نقطة التماس، أى يتم رسمـه كمـا فى القياس بإستخدام مستقيم أفقى عمودى ووجهى عمودى ***f , h***. شكل 276

المكتبة نت
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net




شكل 276

**تمثيل المستوى المماس للكرة بالأثار – وإيجاد الإحداثيات الناقصة للنقاط .**

**مثال- مثل الكرة التى مركزها S(0,4.5,4) وسطحها يمر بالنقطة المعلومة A(-2,2,2) وعين النقطة B(1,?,6.5) C(2,?,4) D(-1,6,?) الواقعة على سطح الكرة، ومثل كذلك المستوى المماس لسطح الكرة عند النقطة A**

**كيفية الحصول على نصف قطر الكرة بمعلومية مركز الدائرة ونقطة على المحيط :**

نصل المركز S بالنقطة A الواقعة على المحيط ويكون هذا هو نصف القطر ونأتى بطولة الحقيقى من خلال $\Delta Z$ للطول $A_2S_2$ وبالتالى نحصل على الطول الحقيقى لنصف القطر نركز فى S ونرسم الدائرة هى السطح الخارجى للكرة شكل 277.

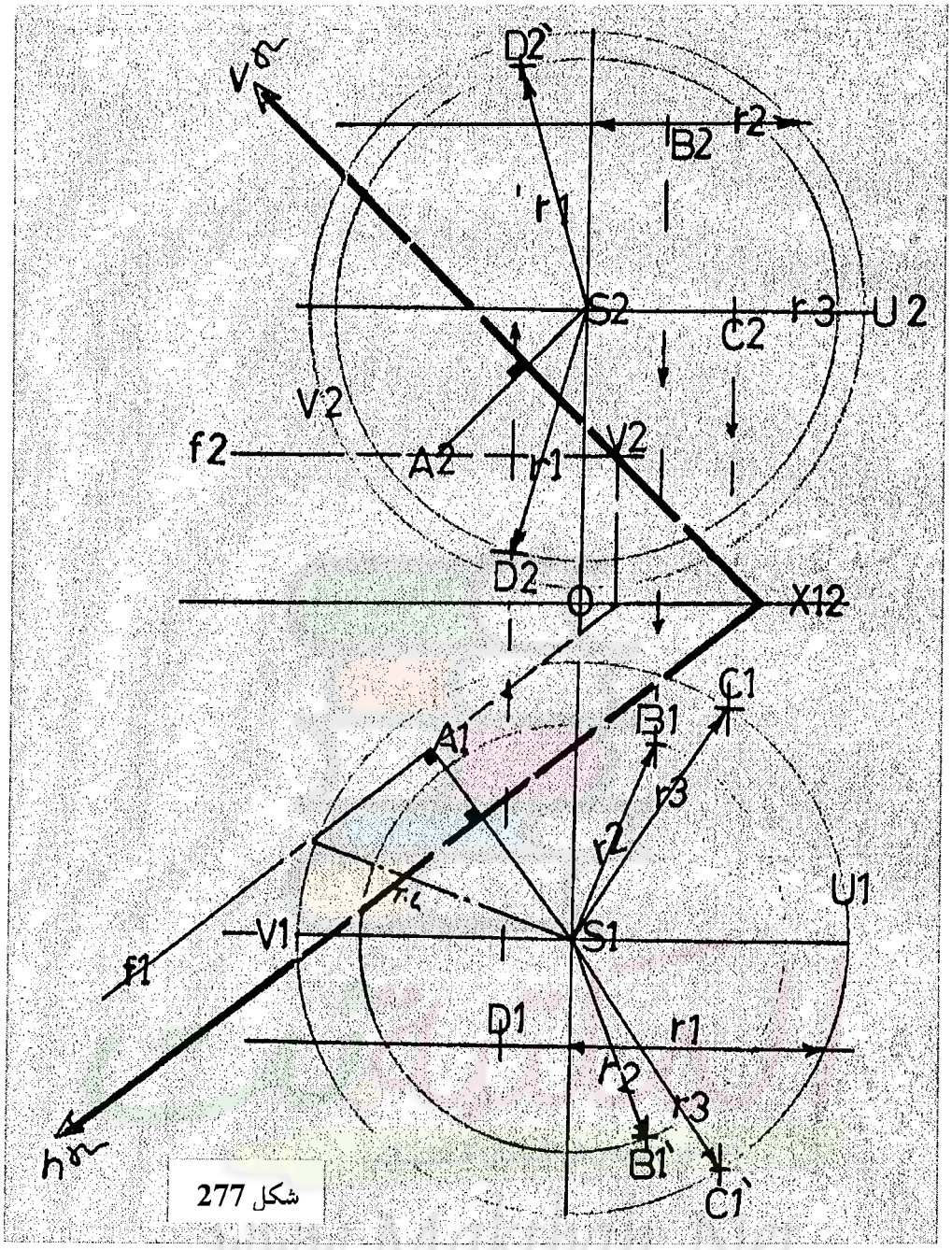
نجد أن $B_2$ تقع على المحيط ومعلوم موقعها في المستوى الرأسى لذلك نمرر بالنقطة $B_2$ مستوى أفقى وبالتالى هذا المستوى يتقاطع مع الكرة في دائرة مركزها $V_2$ علية يمكن أن نركز في $S_1$ بنصف قطر $r_2$ ونرسم دائرة فى المسقط الأفقى هي المحل الهندسي لـ $B_1'$ ,$B_1$، حيث $B_1'$ على النصف الأمامى، $B_1$ على النصف الخلفى شكل 277.

لإستنتاج $C_2$ نجد أنها تقع على القطر الأعظم وبالتالى تقع على المحيط الأكبر وبالتالى نوقع $C_1$ على النصف الخلفى، $C_1'$ على النصف الأمامى شكل 277.

لإستنتاج $D_2$ ، نمرر بالنقطة D1 مستوى وجهى يقطع الكرة في دائرة نصف قطرها $r_1$ نركز في $S_2$ و نرسم دائرة هي h أيضا المحل الهندسي للمسقط $D_2'$ على النصف العلوى و$D_2$ تقع على النصف السفلى شكل 277.

www.Maktbah.Net

لتعيين المستوى المماس للكرة من النقطة A نجد أن هذا المستوى يكون عمودى علي نصف القطر SA وعلية نمرر بنقطة A مستقيم أفقى عمودى على $S_1A_1$ نحصل على أثره ، من أثر المستقيم نرسم الأثر الرأسى للمستوى عمودى على $S_2A_2$ ومن تقاطعة مع $X_{12}$ نرسم الأثر الأفقى للمستوى عمودى على $S_1A_1$ شكل 277.



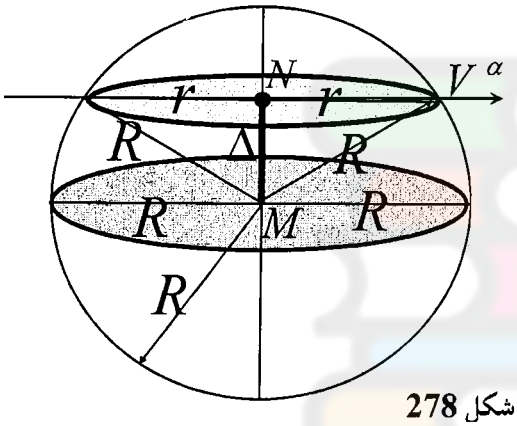

شكل 277

www.Mukbil.Net

## نظرة عامة

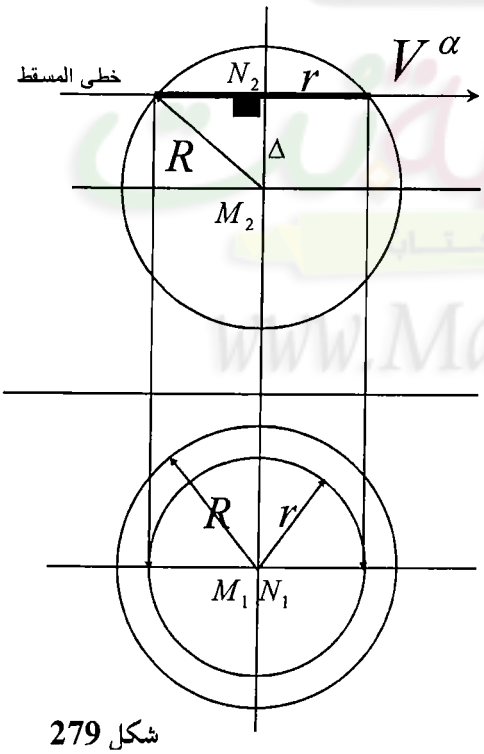
يجب أن تعلم أن معظم تمارين الكرة تتحدث عن مستوى يقطع كرة وفى هذه الحاله فإن المستوى يقطع الكرة فى دائره تسمى دائرة التقاطع وهذة الدائرة تشكل مع المستوى مواصفات خاصة نتحدث عنها من خلال الشكل الموضح وبناء على النتيجه والقاعده الأتيه :

- الخط الواصل من مركز الكرة إلى مركز دائرة التقاطع عمودى على الأثر للمستوى القاطع وبتطبيق هـذه القاعده عندما يكون المستوى خطى المسقط يظهر ما يسمى بمثلث الرعب ومسقط مركز دائرة التقاطع .ويتم شرحها وفهمها كالأتي :




شكل 278

من الشكل الفراغى الموضح شكل 278 نجد أن المستوى الأفقى $\alpha$ المُعرف بأثره الرأسى $V^{\alpha}$ يقطع الكرة، ويكون ناتج التقاطع دائرة أفقية مركزها N أى تظهر بشكلها الحقيقى فى المستوى الأفقى لو نظرنا عليها من أعلى لأسفل وتظهر خطية المسقط فى المستوى الرأسى ويبقى علينا أن نوضح التمثيل الوصفى كيفية إستنتاج دائرة التقاطع ونصف قطرها r كما سنرى فى شكل 279.



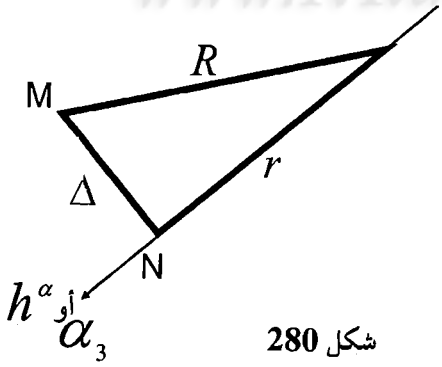

شكل 279

فى شكل 272 لأول باب الكرة ، عندما تقطع مستويات أفقية الدائرة فإن دوائر التقاطع الناتجه لو نظرنا عليها من أعلى لأسفل لوجدنا أن مراكز هذه الدوائر تنطبق على بعضها فى المستوى الأفقى وتكون كلها منطبقة على مركز الكرة، وجميع المراكز للدوائر تقع على المحور الرأسى العام للكرة والذى يظهر فى المسقط الرأسى " كما هو واضح فى

الشكل الفراغى الموجود فى أول باب الكرة شكل 272" . ومن ذلك يتضح أن الدائره الأفقية التى تظهر خطية المسقط فى المسقط الرأسى ومنطبقه على أثر المستوى القاطع تكون أفقية عمودية على المحور العام الصاعد من مركز الكرة وهذه هى النتيجه المطلوبه وهى: *" الخط الواصل من مركز الكرة لمركز دائرة التقاطع عمودية على الأثر للمستوى القاطع"*. وكما فى الشكل279 للمساقط الموضحه، فبمجرد توقيع أثر المستوى $V^{\alpha}$ الخطى وكذلك مركز الكرة، من $M_2$ نسقط عمود على $V^{\alpha}$ فيتقاطع معه فى مركز دائرة التقاطع والتى تقع على خطى المسقط وهى $N_2$ ومن ذلك نستنتج r نصف قطر دائره التقاطع ويتشكل المثلث المطلوب Rوr و $\Delta$ وهو البعد العمودى بين المركزين. ومن نصف قطر الدائرة يمكن رسم مسقطها الأفقى من مركز الكرة $M_1$ حيث ينطبق $N_1$ عليهاوتظهر دائرة حقيقية بشكلها الحقيقى. شكل 279 وشكل 280

## الخلاصة

يجب أن نعلم أنه عندما يكون المستوى خطى المسقط فإن الدائرة تظهر خطية المسقط على أثر المستوى الخطى داخل نطاق الكرة وبذلك إما أن نسقط عمود من $M_1$ على $h^{\alpha}$ ومن $M_2$ على $V^{\alpha}$ تبعا لمن يكون فى وضع خطى المسقط. وكمثال: وكما فى شكل 280 فإن $h^{\alpha}$ هو الخطى المسقط فإن العمود من $M_1$ على خطى المسقط يستنتج مسقط مركز دائرة التقاطع $N_1$ فى خطى المسقط ( ويظهر مثلث الرعب كما فى الأشكال 279و 280 و 281و 282 حيث نستنتج منه طول نصف قطر دائرة التقاطع $r$ ) ونوجد مسقطها مباشرة على العمود الساقط من $M_2$ على $V^{\alpha}$ فيكون المسقط الرأسى لدائرة التقاطع $N_2$ ومن هنا ممكن رسم دائرة التقاطع حيث المحور الأكبر يوازى الأثار ونقيس عليه $r$ والمحور الأكبر عمودى عليها. جميع الأعمده الساقطة من مراكز الكرة على الأثار فى خطى المسقط تُظهر مثلث الرعب كما فى شكل 280




شكل 280

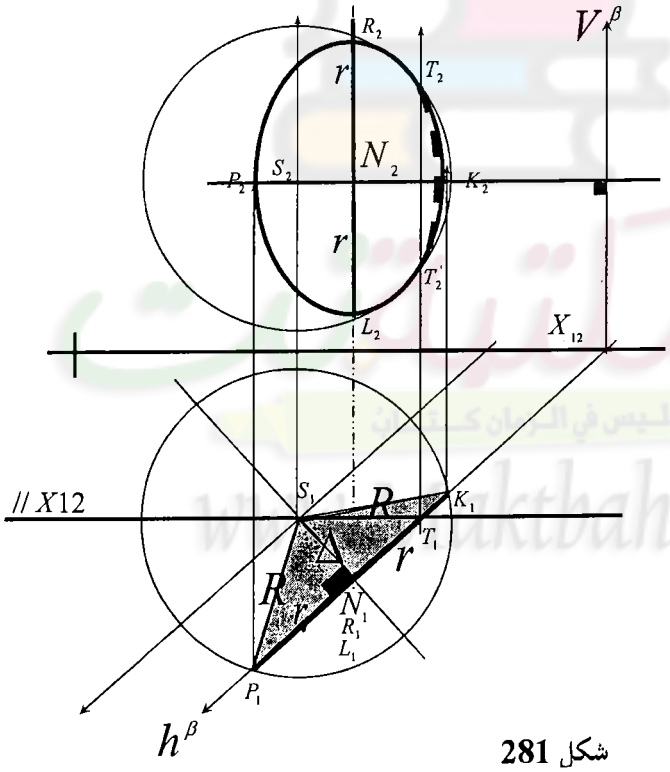
معطيات مثلث الرعب هى $R, r, \Delta$ والمشكله هى أنه يكون أحدهم مجهول، فعندما يكون $R$ و $r$ تستنتج من مثلث الرعب فى خطى المسقط وعندما يكون $X$ للمستوى مجهول فهذا يعنى أن $\Delta$ ستكون مجهولة ويتم إستنتاجها من خلال العمود الساقط على $\alpha_3$ ونقيس عليه الإرتفاع $\Delta$ الذى سيتم إستنتاجه من بيانات مثلث الرعب الباقيه وهى $R$ و $r$ ومثلث فيثاغورث.

## تمثيل تقاطع المستوى مع الكرة

### 1- إذا كان المستوى رأسى

مثل تقاطع المستوى ( $\infty$ ,6,6.5 ) $\gamma$ مع الكرة التى مركزها (0,4,4) Sونصف قطرها 3cm

الحل: لدينا كرة معلوم مركزها S وكذلك المستوى القاطع $\gamma$ والمطلوب تحديد دائرة التقاطع. مباشرة نذهب للقاعدة الشهيرة " مثلث الرعب " والذى يلزم لتطبيقه أن يكون المستوى خطى المسقط ، فإن لم يكن المستوى خطى المسقط نذهب به ونجعله خطى المسقط ونطبق القاعدة ثم نعود به إلى مساقطه. ولكن فى هذه الحالة المستوى خطى المسقط الأفقى ، وعليه نطبق القاعدة مباشرة كما فى شكل 280.




شكل 281

الخط الواصل من مركز الكرة لمركز دائرة التقاطع عمودى على الأثر ، لذلك فى شكل 281 نرسم من S1 عمودي على الأثر الأفقى فيتقاطع معه في نقطة N1 هي مركز دائرة التقاطع فى المسقط الأفقى، نرسم من S2 عمودي على الأثر الرأسى فيكون المحل الهندسى للمسقط الرأسى لمركز الدائرة للتقاطع $N_2$ لذلك نصعد من $N_1$ على العمودى

المقام من $S_2$ فنوجد $N_2$ . وبذلك يكون قد تحدد المثلث فى المسقط الأفقى، حيث أن الدائرة خطية المسقط ومحـــدد نصف قطرها، وبالتالى يمكن رسم الدائرة بالنظم المعروفه، المحور الأكبر موازى للأثار والأصغر عمودى ثم يـــتم قيـــاس نصف القطر على المحور الأكبر ونستكمل الشكل 281 كما تعلمنا فى باب الدائرة. شكل 281

لبحث الظاهر والمختفى، ننظر من أسفل لأعلى فى الإتجاه العمودى على خط الأرض الذى ظهرت تحته الدائرة خطـــى المسقط (فى هذه الحالة هو $X_{12}$ و إن كان المستوى تحول لخطى بإستخدام $X_{13}$ ننظر عموديا على $X_{13}$) فننظر على دائرة التقاطع فى الوضع الخطى ونحدد على نقطة تقاطعها مع المحور الأعظم للكرة "والموازى لخط الأرض الذى جعـــل المستوى خطى المسقط " نجد أنها $T_1$ هى النقطة الفاصلة ويتولد $T_2$, $T_2'$ فى المسقط الرأسى علـــى محـــيط دائـــرة التقاطع، وهما الحد الفاصل بين الجزئين من الدائرةالظاهر و المختفي.شكل 281

عندئذ ولتحديد أيا من الجزئين ظاهر والأخر مختفى عند النظر من أسفل على المسقط الأفقى بداية من نقطة $T_1$ علـــى الجزء الموجود من دائرة التقاطع الخطية مابين $T_1$ وبين خط الأرض وهى $(T_1K_1)$ هو الجزء الذى يكون المنـــاظر فى المسقط الرأسى مختفى لأنه خلف المحور الأعظم للكرة أى فى الجزء الخلفى. أما الجزء الموجود من دائرة التقاطع الخطية مابين $T_1$ وبين حدود الكرة للخارج وهو$(T_1P_1)$ هو الجزء الذى مسقطه فى الرأسى ظاهر لأنه أمام المحور الأعظـــم للكرة أى فى الجزء الأمامى والذى يظهر حقيقى أمام الناظر على للكرة فى الإتجاه المحدد سابقا. شكل 281

## 1. إذا كان المستوى فى وضع عام

**مثال: مثل تقاطع المستوى $\gamma$ (-5,8,6) مع الكرة التى مركزها S(0,5,5) ونصف قطرها 4cm**

1- نوقع كل من المسقط الرأسى والأفقى لسطح الكرة وهما محيطى الدائرتين $(U_1, U_2)$ , $(V_1, V_2)$ و المراكز $S_2$ $S_1$, وكذلك المستوى $\gamma$ شكل 282

2- لإيجاد دائرة التقاطع للمستوى مع الكرة نجد أن المستوى فى وضع عام وليس خطى المسقط سواء فى الأفقـــى أو الرأسى، لذلك نحول المستوى مباشرة لخطى المسقط حتى نستطيع تحديد كل المطلوب.

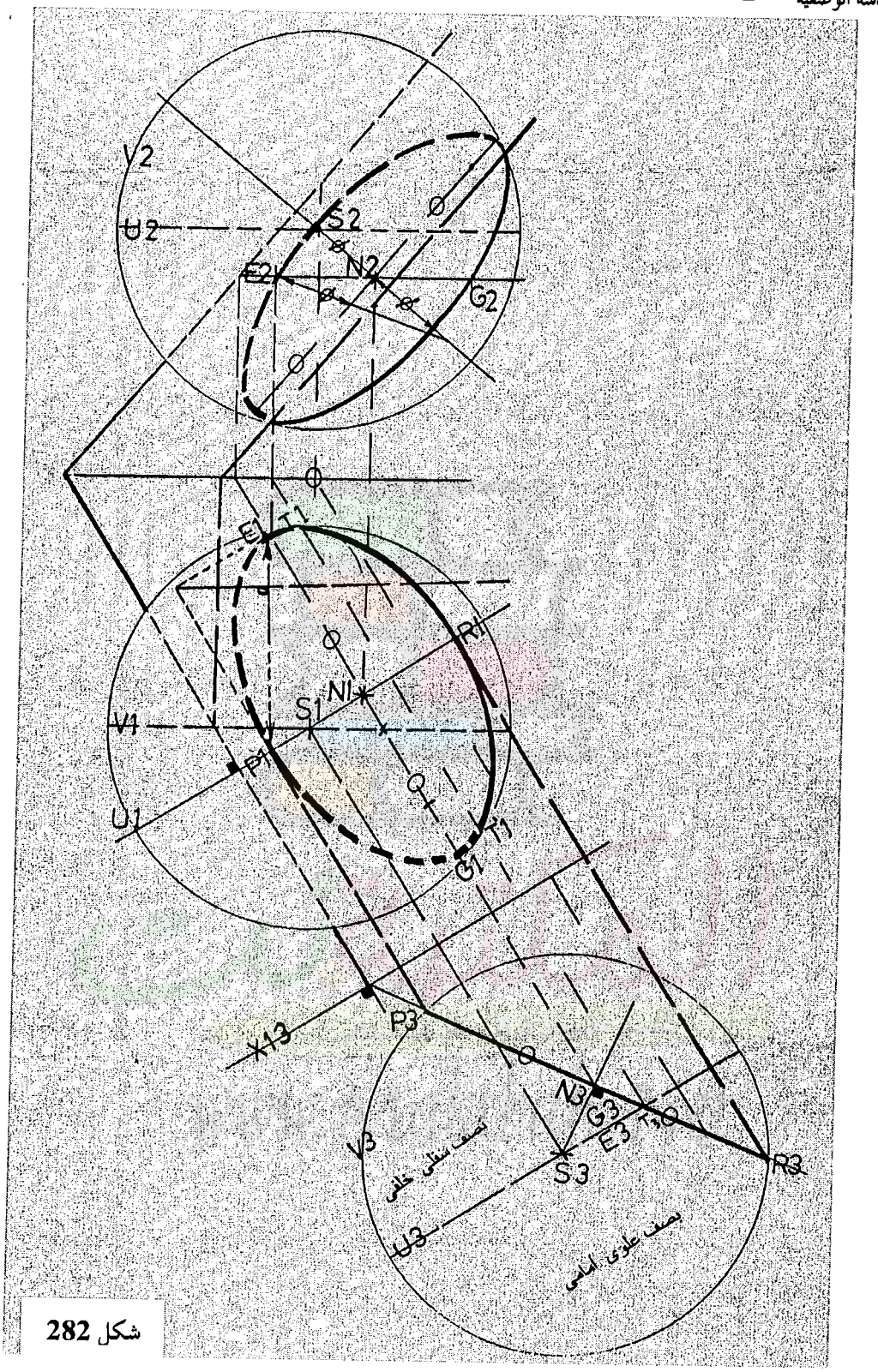
3- نحول المستوى لمستوى عمودى (إسقاط مساعد ) حيث تظهر دائرة التقاطع فية خطية ونعين مركز الكرة $S_3$ .

4- للحصول على مركز دائرة التقاطع نطبق قاعدة مثلث الرعب حيث نسقط من $S_3$ عمودى على أثر المستوى $\gamma_3$ يتقاطع معه فى $N_3$ مركز الدائرة ، وكذلك من $S_1$ عمودى على الأثر الأفقى ومن $S_2$ عمودى على الأثر الرأسى ثم نعود من مركز الدائرة $N_3$ إلى المسقط الأفقى لإيجاد $N_1$ على العمودى من $S_1$ على $h^\gamma$ ومنها نصعد لأعلى على العمودى من $S_2$ على $V^\gamma$ فنوجد $N_2$ ، وهما مساقط مركز دائرة التقاطع. شكل 282

5- من الشكل 282 في المستوى المساعد للكرة يصبح واضح كل من المحور لأعظم $U_3$ الموازى لخط الأرض $X_{13}$ وكذلك مسقط دائرة التقاطع الخطى $R_3$ $P_3$ وبالتالى منها أصبح إسقاطهم مباشرة هما طول المحور الأصغر فى المسقط الأفقى وكذلك طولهم الحقيقي وهو طول المحور الأكبر وبالتالى يتم الإسقاط مباشرة على المستوى الأفقى ونستطيع رسم الضلع مباشرة .

6- من تقاطع دائرة التقاطع مع المحور الأعظم نحصل على النقطة $T_3$ وهي الفيصل بين الجزء من القطع الموجود في النصف الأمامي و النصف الخلفى حيث الجزء $T_3R_3$ ظاهر ( في الأمامي ) و $T_3$ $P_3$ في النصف الخلفي مختفي. ويمكن لك أن تحول المستوى لخطى المسقط إعتماد على المستوى الرأسى وإستخدام مستوى مساعد $X_{24}$عمودى على المستوى الرأسى

www.Maktbah.Net


V2
U2
S2
N2
E2
G2
T1
E1
R1
N1
S1
V1
P1
U1
G1
T1
X13
P3
N3
G3
E3
T3
V3
S3
R3
U3
نصف سفلي خلفي
نصف علوي أمامي

شكل 282

**مثل الدائرة الرأسية C التى مركزها M(8,7,4) والتى تقع نقطة N(6,9,6)على محيطها، ثم مثل الكرة S التى تقطع المستوى الأفقى فى دائرة نصف قطرها 2cm وتقع الدائرة C على سطحها**

الحل: فى حل هذا المثال يراعى أن تأتى بأدواتك وتبدأ فى تنفيذ الحل تباعا

الحل يكون فى إسلوب تحليل المعطيات والإمعان فى التفكير فيه، من شكل 283 نجد أولا نتيجة لأن الدائرة رأسية فهى تقع فى مستوى رأسى وهو خطى المسقط الأفقى وبالتالى فإن مسقطها الأفقى عبارة عن خط مستقيم ومسقطها الرأسى قطع ناقص. ونقطة N تقع على الدائرة، وبذلك نكون حددنا مستوى الدائرة والمسقط الأفقى للدائرة على الأثر الأفقى للمستوى وهو $M_1N_1$ حيث نوصلهم معا يكون $h^\alpha$. وبالتالى أصبح لدينا مستوى الدائرة ومركزها ويبقى نصف القطر وهو موجود ولكن ليس بطوله الحقيقى وبالتالى نوجد الطول الحقيقى MN فيكون هو نصف قطر الدائرة ، ونحدد للدائرة بعد ذلك المحور الأكبر والأصغر فى المستوى الرأسى وكذلك مسقطها الأفقى على خطى المسقط شكل 283.

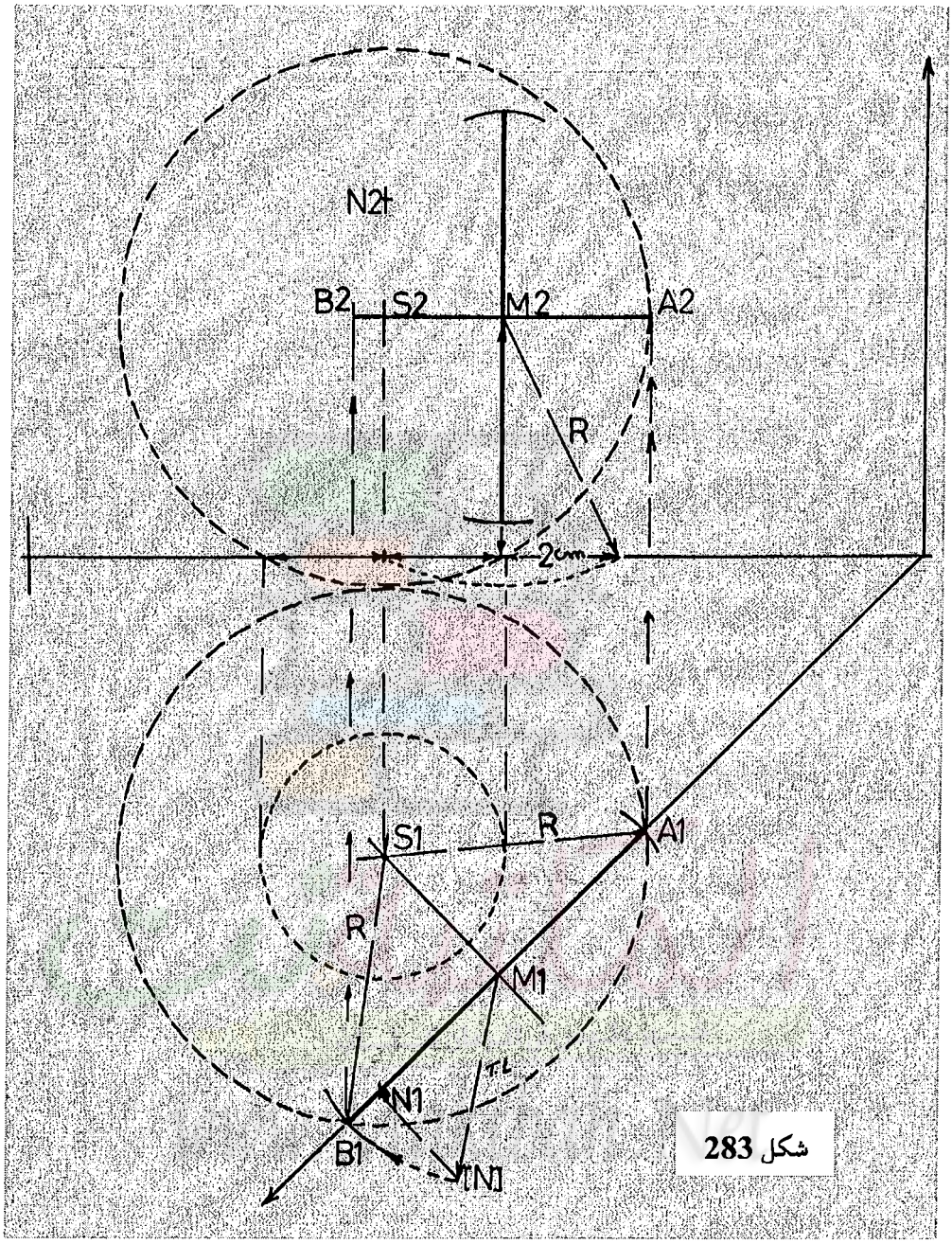
لتحديد مكونات الكرة وهى S,R, position of center يتم التفكير التسلسلى كالاتى:

-الخط الواصل من مركز الكرة لمركز دائرة التقاطع عمودى على الأثر ، فإذا مررنا العمودى على الأثر من مركز الدائرة فى كل من المسقط الرأسى والأفقى يكون هو المحل الهندسى لمركز الكرة، ولكن على الأقل أصبح لدينا المحل الهندسى الرأسى لمركز الكرة وهو خط يمر بـ$N_2$ ويوازى خط الأرض لأنه عمودى على الأثر الرأسى للمستوى الخاص بالدائرة شكل 283.

-مسقط الكرة الرأسى يقطع المستوى الأفقى فى دائرة وبالتالى فهى تظهر من تحت خط الأرض ولكن نصف قطرها يتحدد على خط الأرض لأنها تعتبر دائره فى مستوى أفقى ومسقطه الرأسى خطى. وعليه يتم عمل مثلث كما فى شكل 283من أى نقطة على المحل الهندسى $S_2$ ، ونحن إخترناها من مركز الدائرة. هذا المثلث مكوناته هى الإرتفاع عن خط الأرض ثم نصف قطر دائرة التقاطع 2cm وبالتالى نستنتج نصف قطرالكرة R " هذة الحالة تشبه الشكل الموجود والمستخدم فى أول الباب لشرح الكرة"

-نأخذ نصف قطر الكرة المستنتج "وذلك لإستكمال مثلث الرعب الأفقى" ونقوم بالنزول به للمسقط الأفقى ونركز فى أى من$A_1$ أو $B_1$ ونقطع المحل الهندسى الأفقى للكرة فنوجد المسقط الأفقى لمركز الكرة ومنه نوجد الرأسى

-نصنع كرة بنصف القطر من $S_2$و$S_1$ فنجدها تحقق المطلوب.



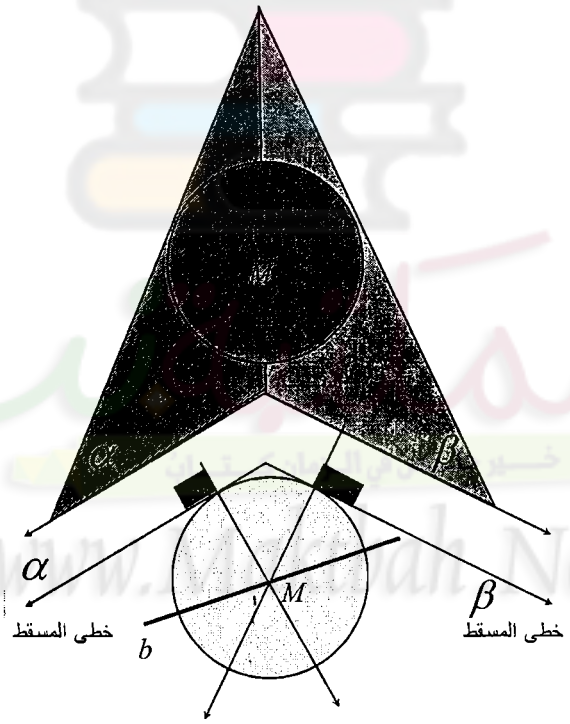

شكل 283

**مثل كرة تمس المستويين [A(9,2,1), B(5,7,4), C(4,4,1)] $\alpha$**

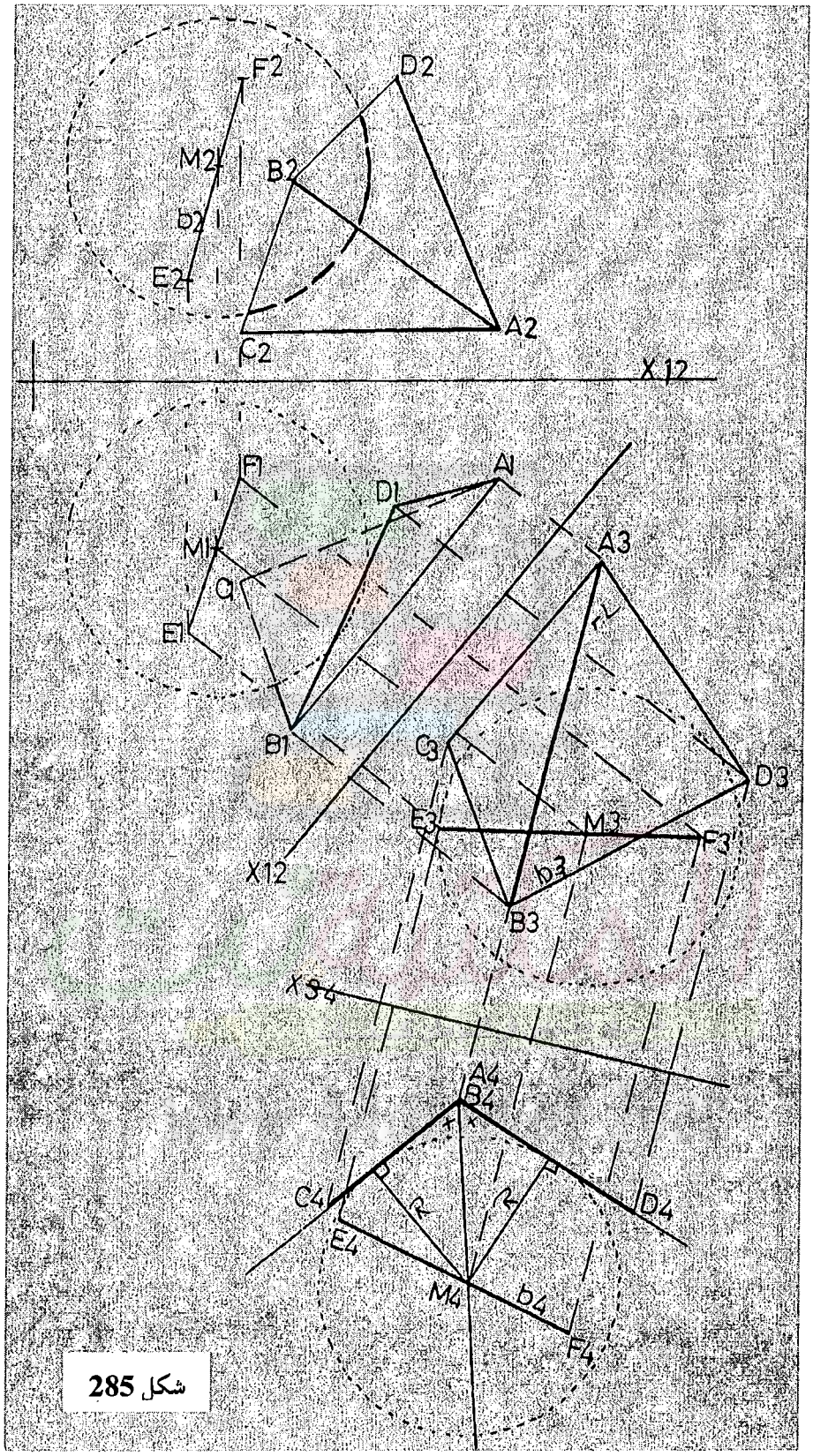
**و [A,B, D(7,2.5,6)] $\beta$ ويقع مركزها على المستقيم [ E(3,5,2), F(4,2,6)] b**

الحل:

لاحظنا فى باب الإسقاط المساعد كيفية إيجاد الزاوية الزوجية بين المستويين وهى الزاوية التى تظهر بالإسقاط فى الإتجاة الذى يكون فيه مسقط خط التقاطع نقطة كما بالشكل **284**. وعليه نحول خط التقاطع لنقطة بإستخدام إسلوب الإسقاط المساعد للمستقيم فيتحول معه مباشرة المستويين إلى خطى المسقط كما يظهر فى الشكل **284** وكذلك فى الحل بالهندسة الوصفية شكل **285**. فى الإسقاط المتتالى كانت الثلاث نقاط **A,B,D** على خط واحد وكذلك **A,B,C** وأصبحا يشكلا زاوية معا، يتم تنصيفها فنوجد المحل الهندسى لكل الدوائر التى تمس المستويين فيقطع المحل الأخر وهو المستقيم **b** فى نقطة هى مركز الكرة المطلوب وكذلك تم تحديد نصف القطر للكرة فنعود بالمركز ونرسمه.شكل **285**

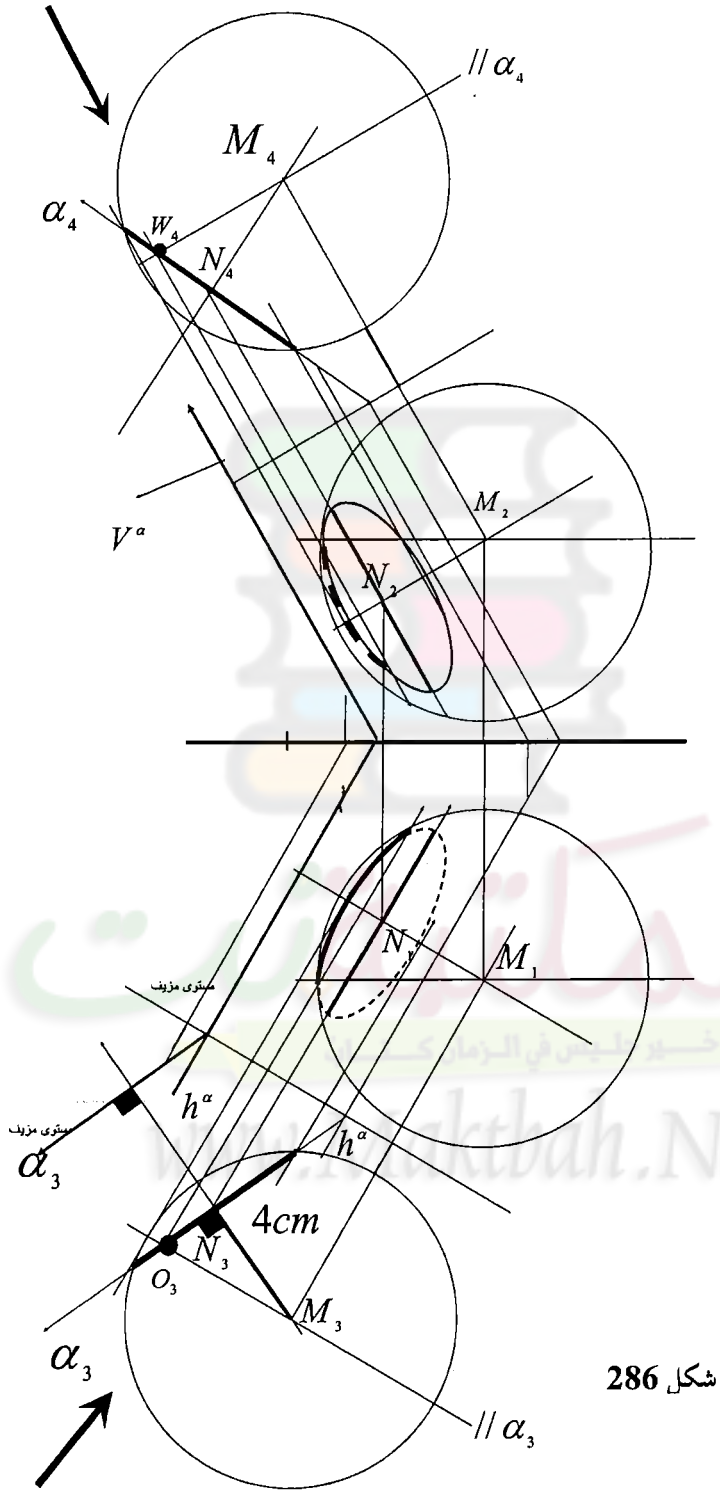



شكل **284**


F2
D2
M2
B2
b2
E2
A2
C2
X12
F1
A1
D1
M1
A3
C1
E1
B1
C3
D3
E3
M3
F3
X12
b3
B3
X34
A4
B4
C4
D4
E4
M4
b4
F4

شكل 285

المعلوم كرة مركزها M (6,7,6) و نصف ا 5 cm مثل المستوى $\alpha(x,60°,120°)$
الذى يقطع الكرة فى دائره نصف قطرها يساو 3 cm
ثم مثل دائرة التقاطع




شكل 286

دائما عندما نتحدث عن مستوى قطع كرة فإن هذا يؤدى إلى الذهاب بالمستوى إلى $\alpha_3$ و $\alpha_4$ حيث يتم التسلسل فى شكل 286 الأتى: 1- من $M_3$ عمود على $\alpha_3$ 2- من $M_1$ عمود على $h^\alpha$ 3- من $M_2$ عمود على $V^\alpha$ 4- من $M_4$ عمود على $\alpha_4$.

من الأعمده على $\alpha_3$ و $\alpha_4$ نستنتج مساقط مركز دائرة التقاطع $N_3, N_4$ ثم نعود بهما على الأعمده المقامة من $M_1$ على $h^\alpha$ ومن $M_2$ على $V^\alpha$ فنستنتج $N_1, N_2$. وبالتالى أصبح لدينا مراكز الدوائر وكذلك نصف القطر للدوائر والمستنتج من خطى المسقط. ويمكن الإستغناء عن $\alpha_4$ ونأتى بالمسقط الرأسى للمركز بالإسقاط، ولكن تم عملها بهذا الإسلوب لنُعود الطالب على إستخدام إسلوب خطى المسقط فى إستنتاج المراكز.شكل 286

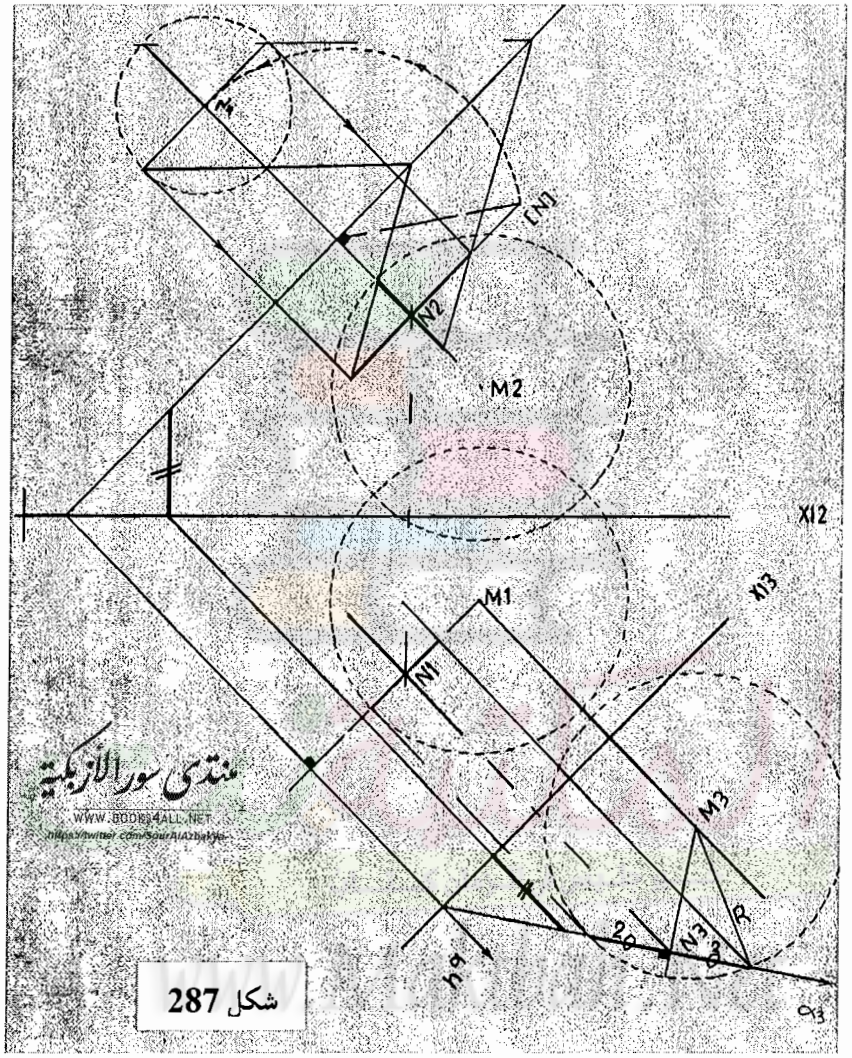
**الظاهر والمختفى**

نرسم من مركز الكرة فى خطى المسقط موازى لخط الأرض الذى جعل المستوى خطى وهما $\alpha_4 //$ و $\alpha_3 //$، فى الإسقاط فى $\pi_3$ الموازى $\alpha_3 //$ من مركز الكرة يقطع الدائره الخطى فى نقطة وهى $O$ وهى تفصل الدائره لجزئين، جزء ظاهر وجزء مختفى ، ولتحديدهما ننظر فى الإتجاه العمودى على "الخط الموازى لخط الأرض والمسوم من مركز الكرة" أى فى إتجاه السهم الموضح فى شكل 286 ، فنجد جزء من الدائرة يقع قبل هذا الموازى وحتى نقطة $O_3$ وهو أول مايقابل النظر أى قبل نقطة $O_3$ هذا الجزء هو ظاهر والباقى منقط كما يتضح فى الشكل 286، وكذلك بالنسبة لنقطة $W_4$ ننظر من الإتجاه الأعلى وبنفس الإسلوب فى شكل 286.

**مثال: مثل كرة مركزها M(11,2,3) وتقطع المستوى $(1,135^0,45^0)$ $\alpha$ فى دائرة نصف قطرها 2cm، مثل دائرة التقاطع**

الحل: فى هذه الحالة المعلوم شكل 287 هو دائرة التقاطع ونريد أن نمثل الكرة وكما سبق الذكر أن مثلث الرعب هو الذى يربط الإثنين معا ولكن فى خطى المسقط حتى نستطيع تطبيق القاعدة. لذلك نحول المستوى لخطى المسقط فى المستوى الثالث "فى الثلاثات" ونذهب بمركز الكرة فنحصل على $M_3$ وخطى المسقط. نبدأ بتطبيق القاعدة ونسقط العمود حيث العمود الساقط من مركز الكرة عمودى على الأثر يمربمركز دائرة التقاطع ويتم ذلك فى كل المستويات الأول والثانى والثالث. العمود الساقط من $M_3$ يقطع خطى المسقط فى نقطة هى $N_3$ مركز دائرة التقاطع، ومنها نقيس

2cm يمن وشمال فنوجد نقاط نهاية دائرة التقاطع والتى يمكن أن نصلها بمركز الكرة فيكون هذا هو نصف قطر الكرة ونمثل الدائرة ، وفى المسقط الرأسى أستخدمنا الدوران لكى نوضح مسقط الشكل الحقيقى لدائرة التقاطع ومنها نستنتج المحور الأكبر فى المسقط الرأسى بالدوران كتدريب للطالب.

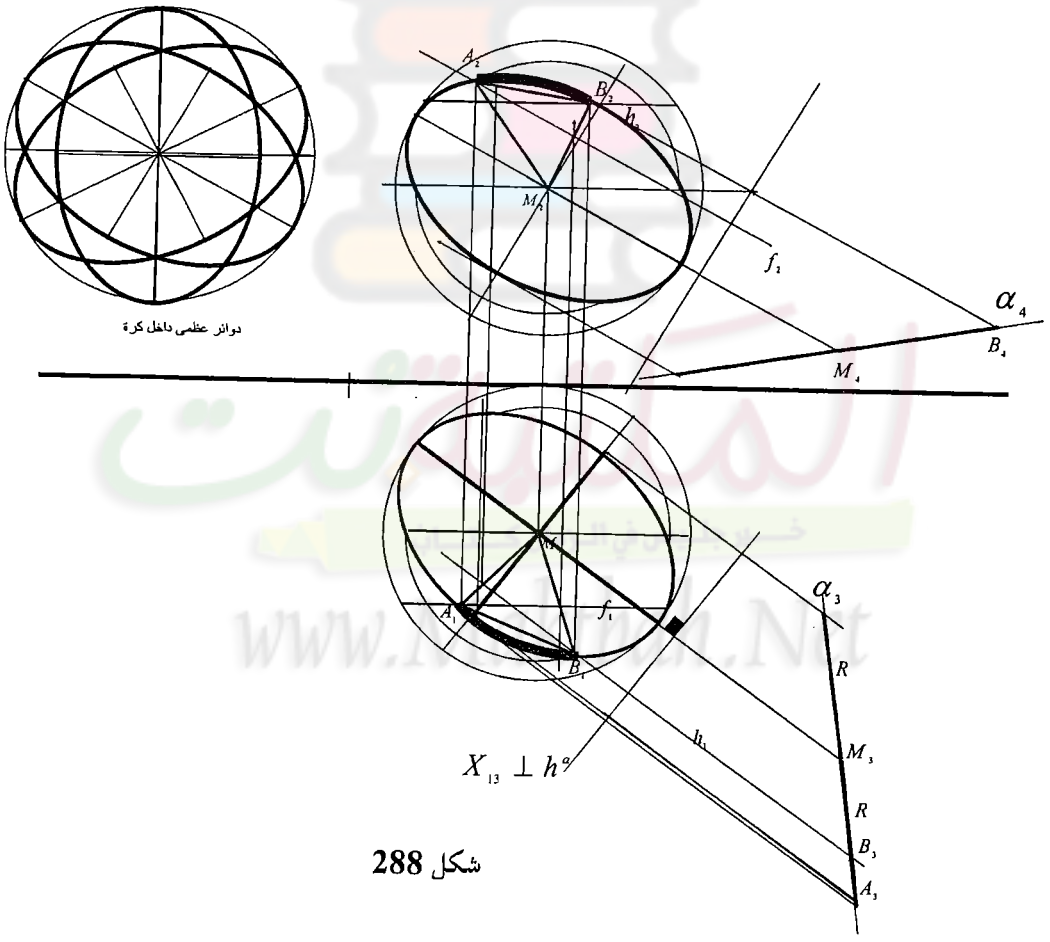



منتدى سور الأزبكية
WWW.BOOKS4ALL.NET

شكل 287

**مثل أقصر مسار بين النقطتين A,B على سطح الكرة التى مركزها M (5,4,5) و نصف قطرها 4cm إذا علمت أن B (6,Y,7), A (3,6,Z) و أن نقطة A تقع على النصف العلوى للكرة ونقطة B تقع على النصف الأمامى للكرة**

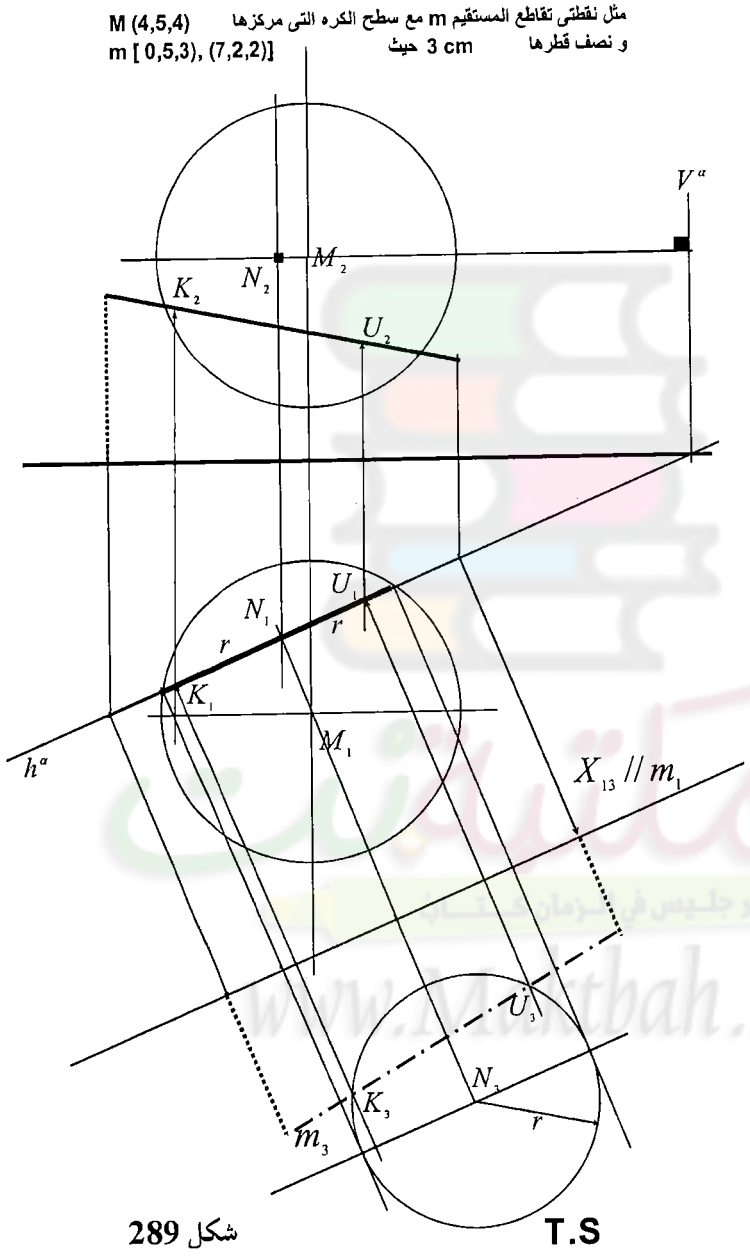
الحل: الدائرة العظمى هى الدائرة التى مركزها هو مركز الكرة ونصف قطرها نصف قطر الكرة "كما يتضح فى الشكل 288 للدوائر العظمى" ، وبالتالى لرسم دائرة عظمى فقد أصبح معلوم مركز الدائرة ونصف قطرها ولكن يبقى مستوى الدائرة، ويكون هو الذى يتكون من الثلاث نقاط M,A,B . وبناء على ذلك يتم رسم الدائرة العظمى داخل الكرة وأقصر مسار يظهر عليها هو من B إلى A فى المسقط الأفقى وليس العكس لأن العكس هو أكبر مسار على سطح الكرة بين النقطتين. وأيضا يتم تحديده فى الرأسى كما هو موضح بالرسم شكل 288.




شكل 288

## نقطة تقاطع مستقيم مع كرة

نقطة تقاطع مستقيم مع كرة يتحدد بنفس إسلوب إيجاد نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى حيث نمرر بالمستقيم مستوى فيقطع الكرة فى دائرة، هذه الدائرة تتقاطع مع المستقيم فى نقطتين هما نقطتى تقاطع المستقيم مع الكرة فى شـــكل 289 ولكن كالأتى :




شكل 289

1. بتمريـــر مســـتوى خـــاص بالمستقيم فيقطع الكرة فى دائـــره خطى المسقط، فنوجـــد مركـــزى دائرة التقاطع ونصف قطرها N,r بإستخدام مثلث الرعب، حيـــث نسقط عمود من مركز الكرة على خطى المسقط فنوجـــد المســـقط الأفقى لمركز دائـــرة التقـــاطع ثم نوجد مسقطه الرأسى $N_2$ علـــى العمود الساقط مـــن $M_2$ علـــى الأثر الرأسى

2. نوجد الشكل الحقيقى لدائرة التقاطع والمستقيم "يجب أن تلاحظ أن المستقيم والدائرة الأن يقعان فى مستوى واحد وهـــو المســـتوى القاطع للكرة" ، ونأتى بالشـــكل الحقيقى بأن نرسم $X_{13}$ موازى للأثر الأفقى لمستوى الدائره وهو نفسه مـــوازى ل $m_1$ فيظهـــر المســـتقيم T.L وكذلك الدائرة بشكلها الحقيقى حيث نرسم الدائرة بنصف قطرها المحدد من تقاطع المستوى مع الكرة .

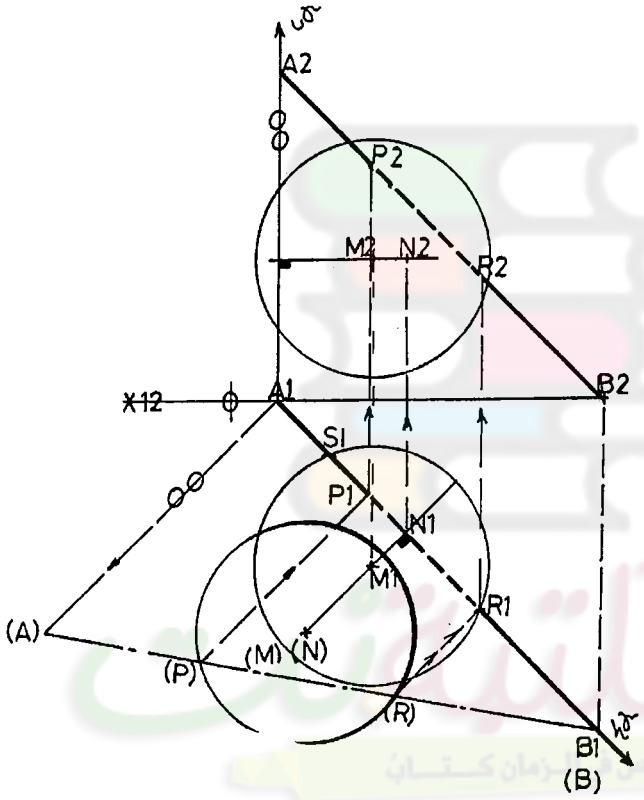
3. نحدد نقطتى التقاطع فى الشكل الحقيقى "فى الثلاثات" بين مسقط المستقيم والدائرة الحقيقيـــة وهمـــا $K_3,U_3$ نرجعهم إلى مساقطهم الرئيسة على المستقيم.

**مثل بإستخدام الدوران نقطتى تقاطع المستقيم مع الكرة التى مركزها M(2,3.5,3) ونصف قطرها 2.5 cm مع المستقيم b[ A(1,0,7), B(7,7,0)]**

الحل:

1- نمرر بالمســـتقيم مســـتوى خـــاص عمودى ، فيقطع الكرة فى دائرة .شكل 290

2 _ نسقط من $M_1$ عمودى على $h^{\gamma}$ " وكذلك من $M_2$ " فيتقاطع معـــه فى $N_1$ " بنظرية مثلث الرعـــب أو الخـــط الواصل من ... إلى... يكون ...." ومن ثم نوجد $N_2$. شكل 290



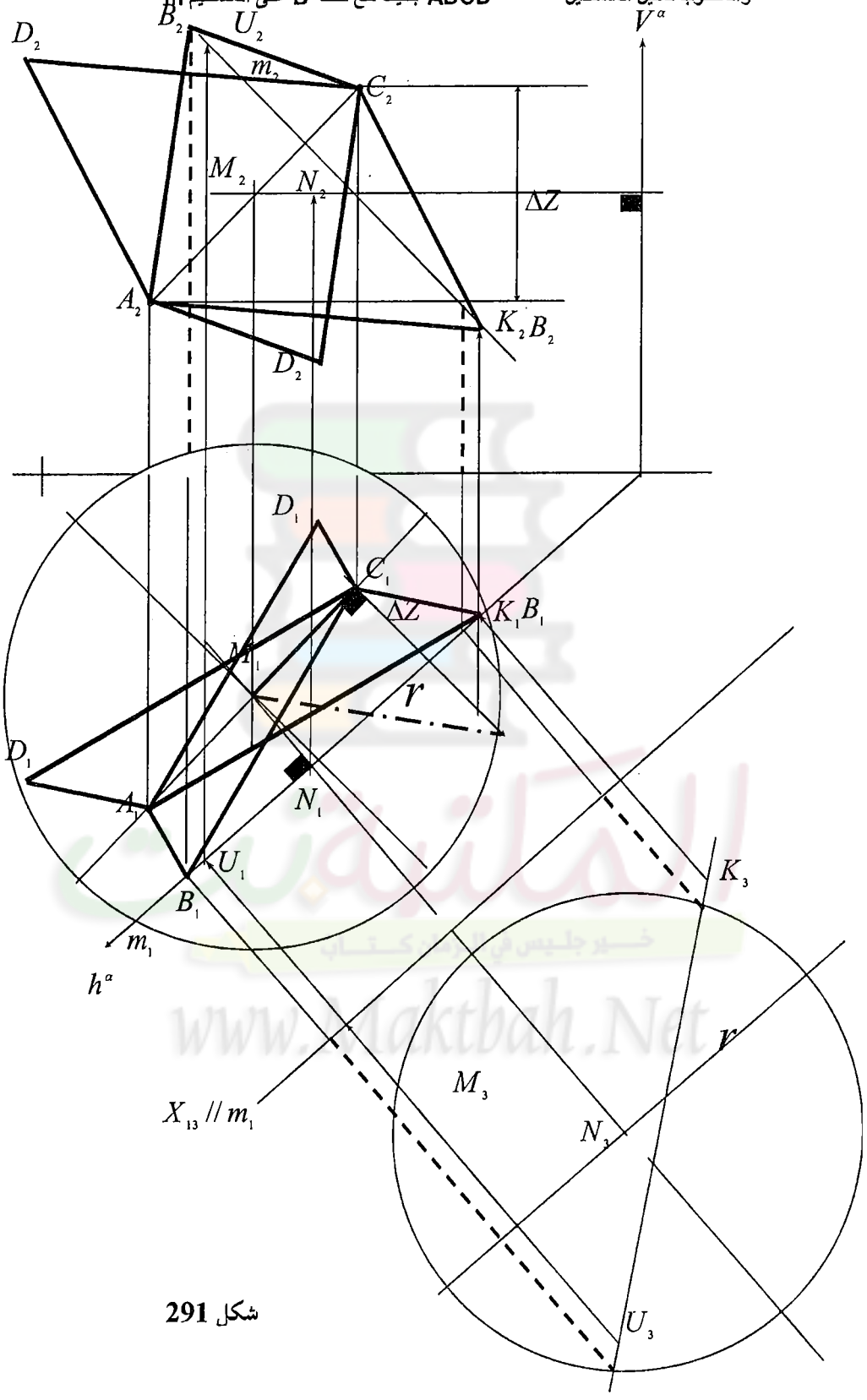

شكل 290

3_ بالدوران حـــول الأثـــر الأفقـــى للمستوى بالنبة للمسقط $N_1$ نوجـــد (N) وكذلك (A),(B)

4_ نرسم من مركز الدائرة دائرة حقيقية وبنصف قطرها الذى ظهر فى خطى المسقط وهو $N_1S_1$ فتظهر نقطتى التقاطع ( R) ,(P) ونعود بهم على مساقط المستقيم شكل 290

المعلوم النقطتان A (2,6,3), C (6,2,7) و المستقيم m [ (3,7,8), (8,3,3)]

والمطلوب تمثيل المستطيل ABCD بحيث تقع نقطة B على المستقيم m




شكل 291

المستطيل ABCD شكل 291 فيه الزاويه ABC قائمة فهى زاوية محيطية لذا تقع إما على محيط دائره أو محيط كرة وأن AC قطرها ، وهى لو على محيط دائره يكون المستقيم m مماس لها ومن المعروف أن المماس للدائره يكون فى مستواها ولكن AC , m شماليين وبالتالى m ليس مما س للدائرة وبالتالى المحل الهندسى للنقطة B ليس دائرة وإنما كرة وتصبح B نقطة على سطحها وعلى المستقيم m وهى نقطة تقاطعهما ويكون AC هو قطر الكرة. هذا المثال تطبيق مباشر على نقطة تقاطع مستقيم مع كرة، والمثال له حلان ناتج من نقطتى تقاطع المستقيم مع الكرة هما إحتمالى تواجد نقطة B مرتين.

المكتبة نت
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

# تمارين الكرة

1- مثل الكرة التي مركزها ( 4,7,5 ) N وتقع نقطة ( 2,4,3 ) A على سطحها واذا كانت النقطة ( P 6,9,z ) تقع في النصف العلوي لسطح الكرة ومثل P والمستوى α المماس لسطح الكرة عند P .

2- مثل الكرة التي فيها ( 7,8,3 ) A و ( 3,2,7 ) C .

3- مثل الكرة التي مركزها ( 11,4,5.5 ) M وتقع نقطة ( 9,1.5,7 ) A على سطحها واذا كانت النقطة ( P 12.5,3,z ) تقع في النصف العلوي لسطح الكرة فمثل اقصر مسار يقع على سطح الكرة ويصل بين النقطتين A,P .

4- مثل كرة تمس $\pi_1$ و $\pi_2$ ويقع مركزها على المستقيم

m [ A( 6,2,6 ) , B ( 1, 5,2 )

5- عين مركز ونصف قطر الدائرة C التي تمس اضلاع المثلث ABC حيث A ( 2,3,1 ) , B ( 7,10,1 ) C ( 2,10,7 ),( ثم مثل الكرة التي نصف قطرها 5 سم وتقع الدائرة C على سطحها .

6- المعلوم النقطة A ( 7,4.5,8.5 ) ومستوى α ( $9,160^0,135^0$ ) تقع فيه النقطة P ( 3,2,z ) مثل كرة تمس المستوى α عند نقطة P وتمر بالنقطة A .

7- مثل دائرة تقاطع كرة مركزها النقطة N ( 8,3,3.5 ) ونصف قطرها 3 سم مع مستوى α في الحالات الاتية :

اولا : α مستوى رأسي α ( $.5,30^0,?$ ) .

ثانيا :α مستوى عمودي على $\pi_2$ α ( $.5,?,45^0$ )

ثالثا : α ( $0,60^0, 45^0$ ) .

8- مثل دائرة رأسية مركزها M ( 8,7,4 ) وتقع النقطة P ( 6,9,6 ) على محيطها ثم مثل الكرة التي تقع هذه الدائرة على سطحها وتقطع $\pi_1$ في دائرة نصف قطرها 2 سم .

9- المعلوم مستوى رأسي يمر بالنقطة ( 12,3,2 ) A ويميل على $\pi_2$ بالزاوية $45^0$ ثم مثل المحل الهندسي لنقط المستوى التي نسبة بعديها عن النقطتين ( 6,4,4 ) P و ( 1,2,1 ) Q تساوي 1 : 2 .

10- المعلوم النقطتين ( 6,4,4 ) A و ( 1,2,1 ) B ومستقيم افقي h يمر بالنقطة ( 13,1,8 ) P ويميل على $\pi_2$ بالزاوية $45^0$ ثم مثل نقطة Q على h تكون نسبة بعديها عن النقطتين B , A تساوي 1 : 2 .

11- مثل الكرة التي مركزها النقطة ( 11,2,3 ) N وتقطع المستوى $\alpha$ [$0,135^0$,$45^0$] في دائرة نصف قطرها 2 cm ثم مثل دائرة التقاطع .

12- مثل نقطتي تقاطع سطح كرة مركزها النقطة ( 3,4,3.5 ) N ونصف قطرها 2.5 cm مع مستقيم m في الحالتين الاتيين :

اولا : المستقيم m افقي يمر بالنقطة ( 6.5 , 1, 1.5 ) P ويميل على $\pi_2$ بالزاوية $45^0$ .

ثانيا : m [ P ( 8,7,0 ) , Q ( 2,0,7 ) ] .

13- المعلوم النقطتين ( 5,3,4 ) A و ( 1,1,1 ) B ومستقيم m حيث :

M [ P ( 10,1.5,0 ), Q ( 7,4,6.5 ) ] مثل نقطة N على m بحيث يكون

BN : AN = 2 : 5 اذكر الحل الفراغي ثم مثل بالاسقاط .

www.Maktbah.Net

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

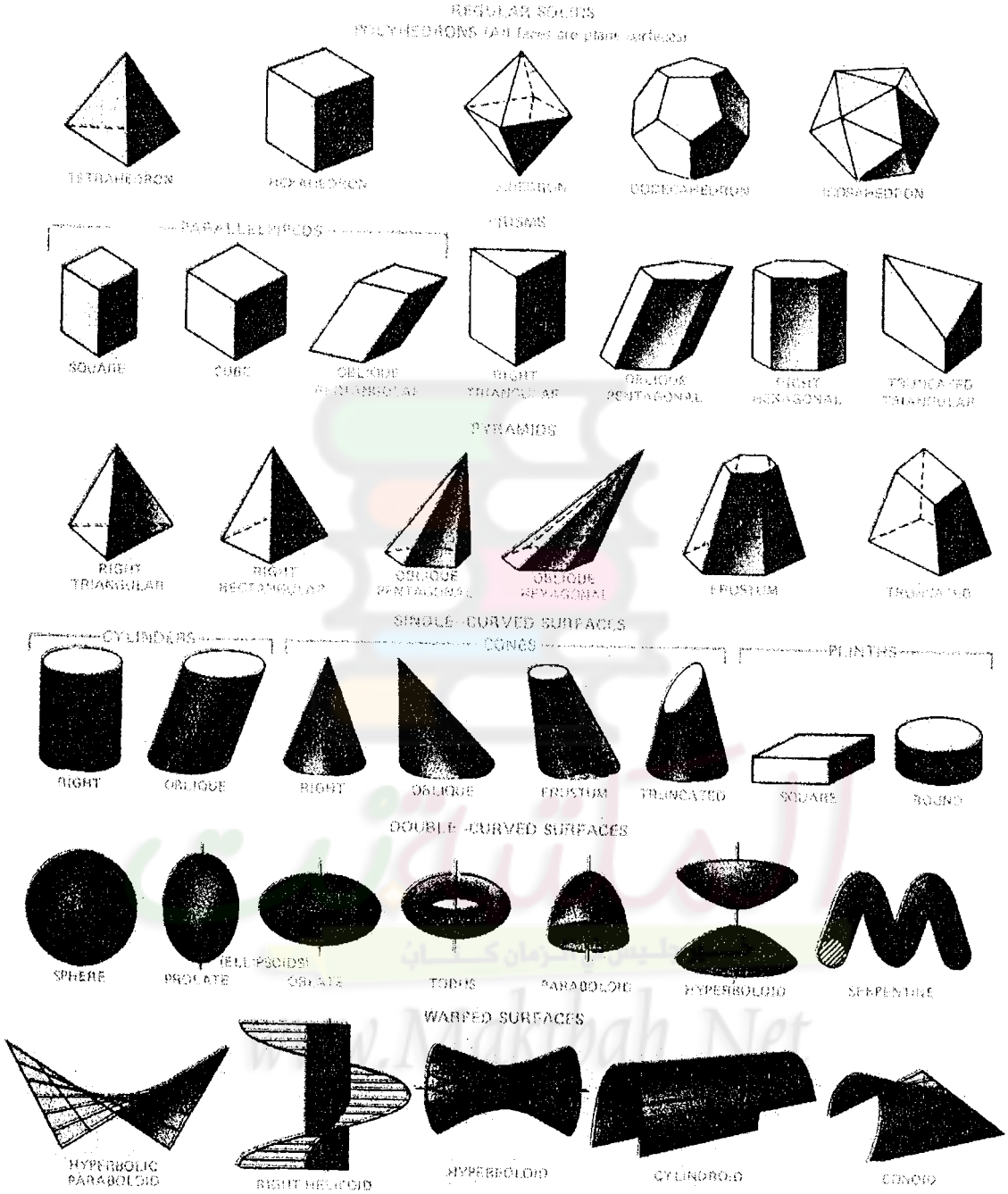
# الباب الحادى عشر

# كثيرات السطوح

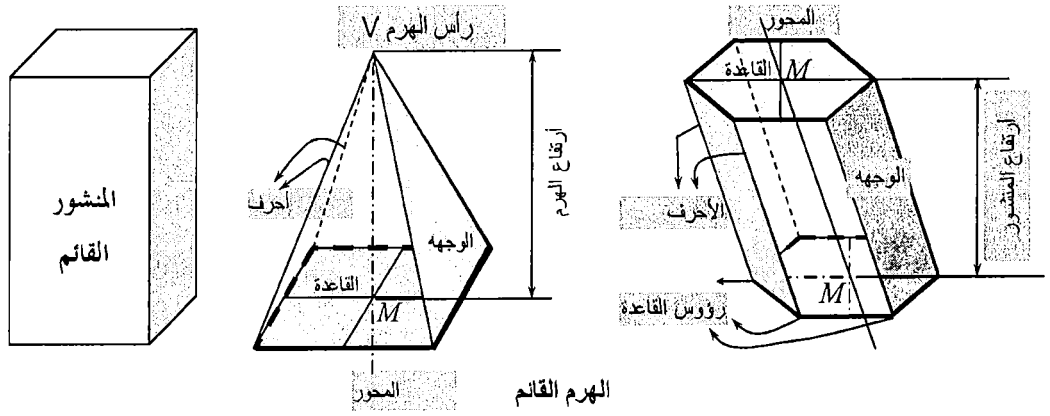
www.Maktbah.Net

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

# كثـــــيـرات الســـــطوح




شكل 292




شكل 293

1. تعريف: كثيرات السطوح عبارة عن أجسام محددة بمستويات من جميع جهاتها شكل 292و شكل 293 تُسمى أوجه، وهذه الأوجه تتقاطع فى مستقيمات تُسمى أحرف الجسم والأحرف تتلاقى فى نقاط تُسمى رؤوس الجسم.

وتنقسم كثيرات السطوح إلى قسمين هما: 1- كثيرات السطوح المنتظمه 2- الهرم والمنشور

2. كثيرات السطوح المنتظمة : هى عبارة عن كثيرات السطوح التى جميع أوجهها عبارة عن مضلعات منتظمة ومنطبقة، وتتبع نظرية أويلر فى أن:

1- مجموع الزوايا المستوية المحصورة بين الأحرف والتى تمر بأى رأس من رؤوس كثيرات السطوح المنتظمة يجب ألا تقل عن $360^{O}$ وألا يتحول إلى مستوى

2- أوجهه كثيرات السطوح المنتظمة عبارة عن مضلعات منتظمة ومنطبقة وزواياها جميعا متساوية

3- كثيرات السطوح المنتظمة توجد كرة تمر برؤوسها

كثيرات السطوح ماهى إلا أجسام متعدده الأوجهه شكل 293 ويمكن التعبير عنها بأنها كثيرات سطوح لها أحرف وقاعدة وتتمحور حول محور عام . وكثيرات السطوح المنتظمه القائمة هى التى يكون فيها المحور عمودى على مستوى القاعدة، أما كثيرات السطوح المائلة فيكون فيها المحور مائل على القاعدة.ونحن هنا نهتم بوضع أسلوب للتفكير لسهوله التعامل مع التمارين ونتبع هذه الخطوات دائما. فعند التفكير فى حل تمارين كثيرات السطوح تذكر دائما أنك لابد أن تُكمل تمثيل القاعدة ثم تمثيل الإرتفاع. وعليه فالتفكير محصور فى إتجاهين (القاعدة والإرتفاع)

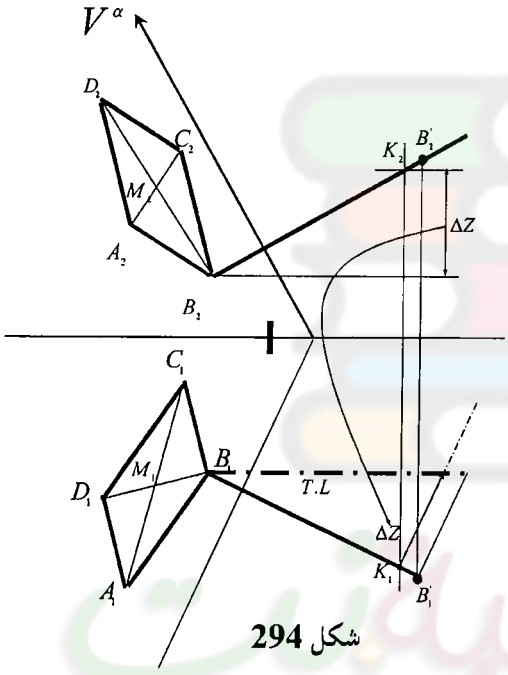
## القاعدة كيف تفكر لإستكمال شكل القاعدة

بالنسبه لإستكمال القاعدة عامة فإنك لابد أن تدفع المعطيات الموجوده أمامك فى التمرين إلى إيجاد على الأقل أى نقطتين فى القاعدة سواء كانت القاعدة واقعة فى المستوى الأفقى أو فى أى مستوى أخر وبمجرد الحصول على النقطتين فى القاعدة نرى إذا كانت القاعدة واقعه فى أى مستوى يتم تحويل المستوى إلى شكله الحقيقى " بإستخدام الإسقاط المساعد او بالدوران" لإستكمال شكل القاعدة بنظم وخواص الهندسه المستويه لشكل القاعدة، أما إذا كانت القاعدة فى المستوى الأفقى او المستوى الرأسي يتم إستكمال القاعدة مباشرة بإستخدام خواص الهندسه المستويه لشكل القاعدة.

شكل 293

## الإرتفاع

بالنسبة للإرتفاع فى للمنشور القائم المنتظم والهرم القائم المنتظم هو مستقيم عمودى على مستوى القاعدة من مركزها بالنسبة للهرم، ومن أى رأس من رؤوس القاعدة أو مركز القاعدة بالنسبه للمنشور. وبالتالى لتحديد الإرتفاع فى شكل 294 على أحد الأرف الخارج من أحد رؤوس القاعدة B، يتم إختيار أى نقطة على الإرتفاع ثم نأتى بالطول حتى هذة النقطة ونحصل على إتجاه الطول الحقيقي ثم نقيس عليه الطول المطلوب ثم الرجوع به لتحديد الإرتفاع. كما تم فى باب المستقيم المثال الموضح شكل 294 يبين كيفية قياس إرتفاع المنشور من أحد رؤوس القاعدة. ويتم كالأتى:




شكل 294

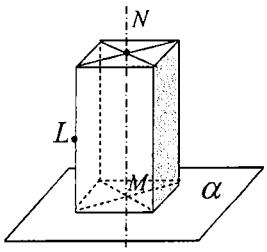
1. نقيم مستقيم عمودى على مستوى القاعدة (على الأثار) ويكون مُمثل لأحد الأحرف أو المحور من أى رأس من رؤوس القاعدة بالنسبة للمنشور القائم، ( أو من مركز قاعدة الهرم المنتظم القائم)
2. نختار أى نقطة على هذا العمودى مثل نقطة K وبالتالى نوجد الطول الحقيقى للمستقيم $BK$ يكون هذا هو إتجاه الطول الحقيقى للحرف ومن هنا يمكن قياس الإرتفاع المطلوب عليه وليكن 7cm إبتداء من نقطة B ونعود به فنحصل على مسقط النقطة فى المستوى الأفقى $B_1'$ ثم نصعد بها لنأتى بمسقطها الرأسى $B_2'$، وبذلك أصبح لدينا طول

الحرف فى كل من المستوى الأفقى والرأسى. نقيم باقى الأعمده فى المستويين الأفقى والرأسى ونقيس عليها نفس الأطوال تبعا لمسقطها فنوجد القاعدة الأخرى.

## تمارين عامه

**مثل منشور رباعى قائم إرتفاعه 7 cm وقاعدته مربع إذا كان مركز إحدى قاعدتيه نقطة M (-3, 4,4) ومحوره يمر بالنقطة N(5.5, 8,8) وأحد أحرفه يمر بالنقطة L(0,8.5,5)**

الحل:




1. نصل MN فيكون المحور للمنشور شكل 295

2. من نقطة M نرسم المستوى $\alpha$ العمودى على المحور فيكون مستوى القاعدة شكل 295

3. من نقطة L نرسم مستقيم موازى للمحور هو المستقيم a شكل 295

4. نقطة تقاطع المستقيم a مع




شكل 295

المستوى $\alpha$ هى A شكل 295

5. أصبح لدينا نقطتان فى القاعدة وهما المركز وأحد رؤوس القاعدة وبالتالى نذهب للحصول على الشكل الحقيقى للمستوى لإيجاد الشكل الحقيقى للقاعدة ونعود بها بإستخدام الإسقاط المساعد. شكل 295

6. يتم إقامة الأحرف من رؤوس القاعدة عموديه على الأثار وإيجاد الطول الحقيقى لأحد الأحرف وقياسه على الأخرين

7. إستكمال القاعدة الثانيه شكل 295

**مثل المنشور الرباعى $ABCDA'B'C'D'$ إذا علم الرأس A(1,6,1) وإرتفاع المنشور 8 cm ومحوره يقع على المستقيم e [E(-2, 6.5,8), K(4.5,1,0)] .**

الحل: 1. يتم رسم من A مستوى عمودى على e يتقاطع معه فى مركز M مركز المنشور. شكل 296

2. من $A_1$ و $M_1$ بالدوران نوجد (M), (A) وعليه نكمل المربع فى الدوران ثم نعود بـه بالتـألف فنوجـد $A_1B_1C_1D_1$ . شكل 296

3. بالإسقاط والمستقيمات الوجهيه اوالأفقيه نحصل على $A_2B_2C_2D_2$. شكل 296

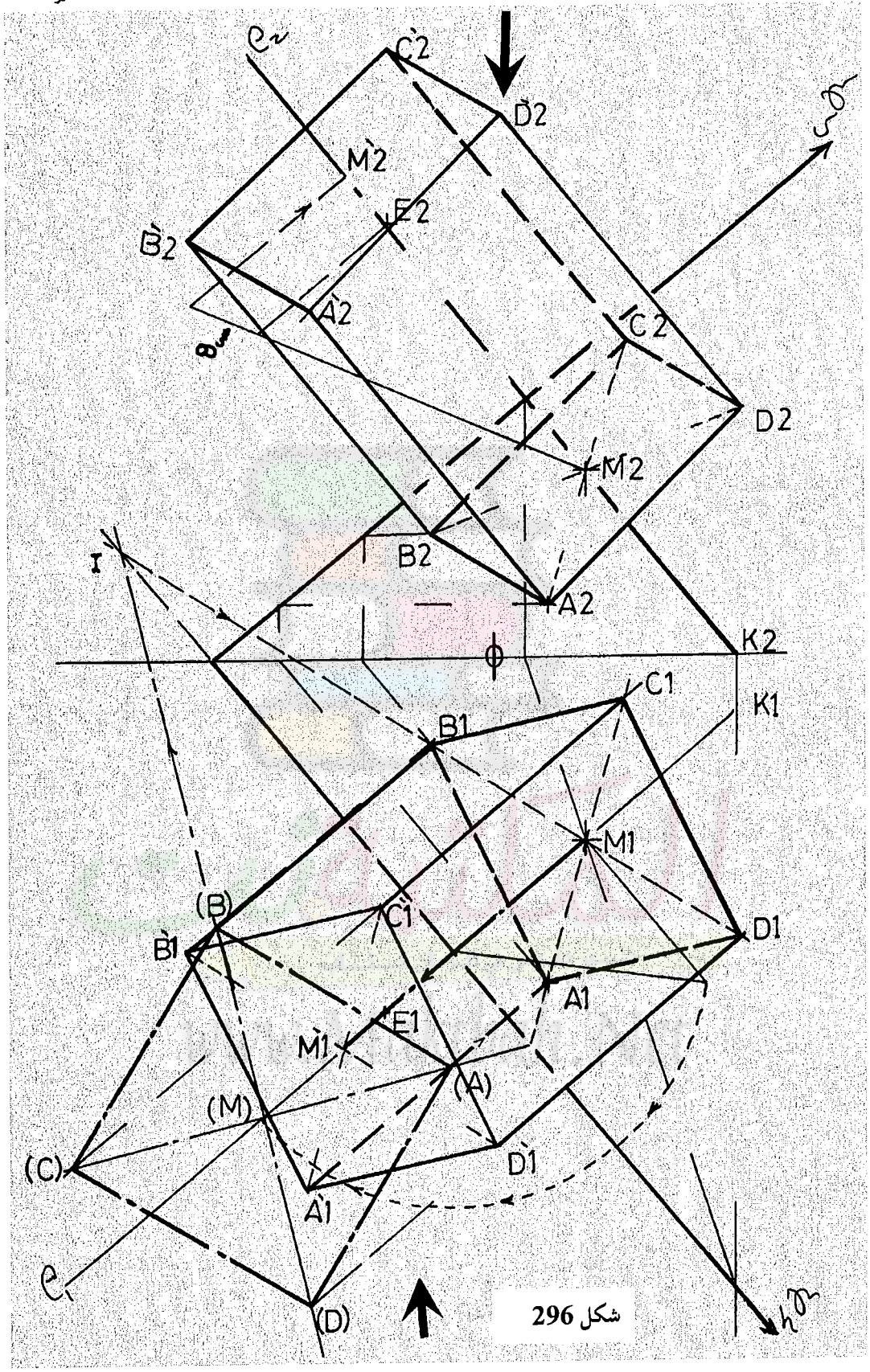
4. نرسم موازى للمسقط $e_1$ من $A_1B_1C_1D_1$ و نرسم موازى للمسقط $e_2$ من $A_2B_2C_2D_2$

5. نأخذ مثلا $M_2E_2$ ونأتى بالطول الحقيقى لهذا الإرتفاع ونوقع عليه البعد 8cm ونعود به فنحصـل علـى $M_2'$ وبالإسقاط على $M_1'$ . شكل 296

6. من الطول $M_1M_1'$ نوقعه على كل الأحرف فى المسقط الأفقى فنحصل علـى $A_1'B_1'C_1'D_1'$. شـكل 296

7. من الطول $M_2M_2'$ نوقعه على كل الأحرف فى المسقط الرأسى فنحصل على $A_2'B_2'C_2'D_2'$. شـكل 296

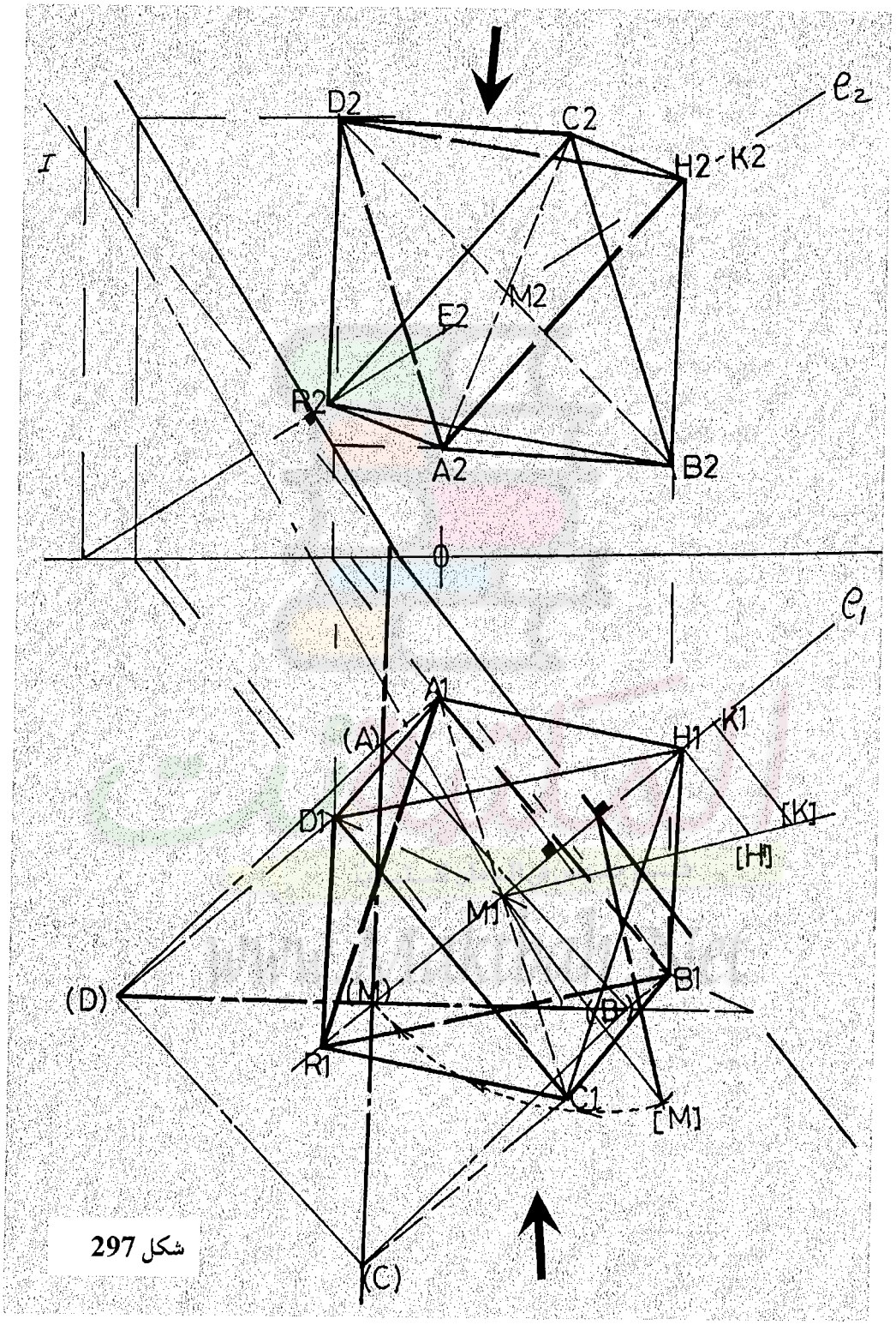
8. بالنسبه للظاهر والمختفى نجد أن فى المسقط الرأسى الحدود الخارجيه كلها ظاهرة ولايوجد سوى النقطة $C_2$ هى التى لايخرج منها حرف ظاهر كما أنها أقرب نقطة لخط الأرض فى المسقط الأفقى وبالتالى فالخارج منـها كله مختفى. وكذلك بالنسبه للمستوى الأفقى. شكل 296


C2
D2
M2
E2
B2
A2
C2
D2
M2
B2
A2
K2
C1
K1
B1
M1
(B)
C1
D1
B1
A1
E1
M1
(A)
(M)
D1
(C)
A1
(D)

شكل 296

**مثل ذو الثمانية أوجهه المنتظم الذى رأسه النقطة A(0,2.5,2) وقطره يقع على المستقيم e=EK حيث E(0,7,4), K(5,3,7)**

الحل:




شكل 297

الحل:

1. يتم رسم من A مستوى عمودى على e بإستخدام مستقيم أفقى أو وجهى عمودى فيكون مستوى القاعدة
2. نوجد نقطة تقاطع المستوى العمودى مع المستقيم e فيكون المركز M . شكل 297
3. بالدوران حول الأثر الأفقى للمستوى العمودى نوجد كل من (A),(M),(C),(D) وبالرجوع بالتألف نأتى بـ $A_1B_1C_1D_1$ وبالإسقاط المباشر نوجد $A_2B_2C_2D_2$. شكل 297
4. للحصول على رأس الثمانى نجد أن من مميزات الثمانى الأوجه أن كل الأقطار متساوية وبالتالى بمعرفة(M) (A) يتم أخذ نقطة $K_1$ على المستقيم e ونأتى بطوله الحقيقى ونوقع عليه الطول (A)(M) نحصل على $H_1$ وننقل نفس الطول من $M_1$ نحصل على $R_1$ رؤوس الثمانى. وكذلك بالإسقاط فى المستوى الرأسى شكل 297 .

**مثل الهرم الثلاثى المنتظم ABCD إذا علم رأسه A(3,7.5,2.5) والحرف BC يقع على المستقيم المعلوم e[E(7,0,9.5),K(-2.5,3.5,0)]**

الحل: نكون مستوى القاعدة من النقطة A والمستقيم e لأنهما فى مستوى القاعدة وذلك برسم موازى من A للمستقيم KE فيتكون المستوى بمستقيمين متوازيين، نوجد أثار هذين المستقيمين ومنهما نحصل على أثار المستوى الذى يحتويهم $V^\gamma, h^\gamma$. شكل 298

1. يتم دوران المستوى حول أثره الأفقى ونحصل على (e) ,(A). شكل 298
2. فى الدوران "هندسه مستويه" نستغل الخواص الهندسيه للمثلث ABC المتساوى الأضلاع "قاعدة الهرم" ، نسقط عمود على (EK) من (A) فنحصل على نقطة منتصف القاعدة ، ومن نقطة (A) نرسم مائل $30^0$ على العمودى فيقطع (EK) فى نقطة (B) ومنها نكون حصلنا على الطول (A)(B) فنقطع به نوجد (C) ويصبح مثلث القاعدة بشكله الحقيقى واضح. شكل 298

3. من نقطة تلاقى المستقيمات المتوسطه لقاعدة المثلث (A)(B)(C) وهى (N) نقيم عمودى هو إرتفاع الهرم الغير محدد

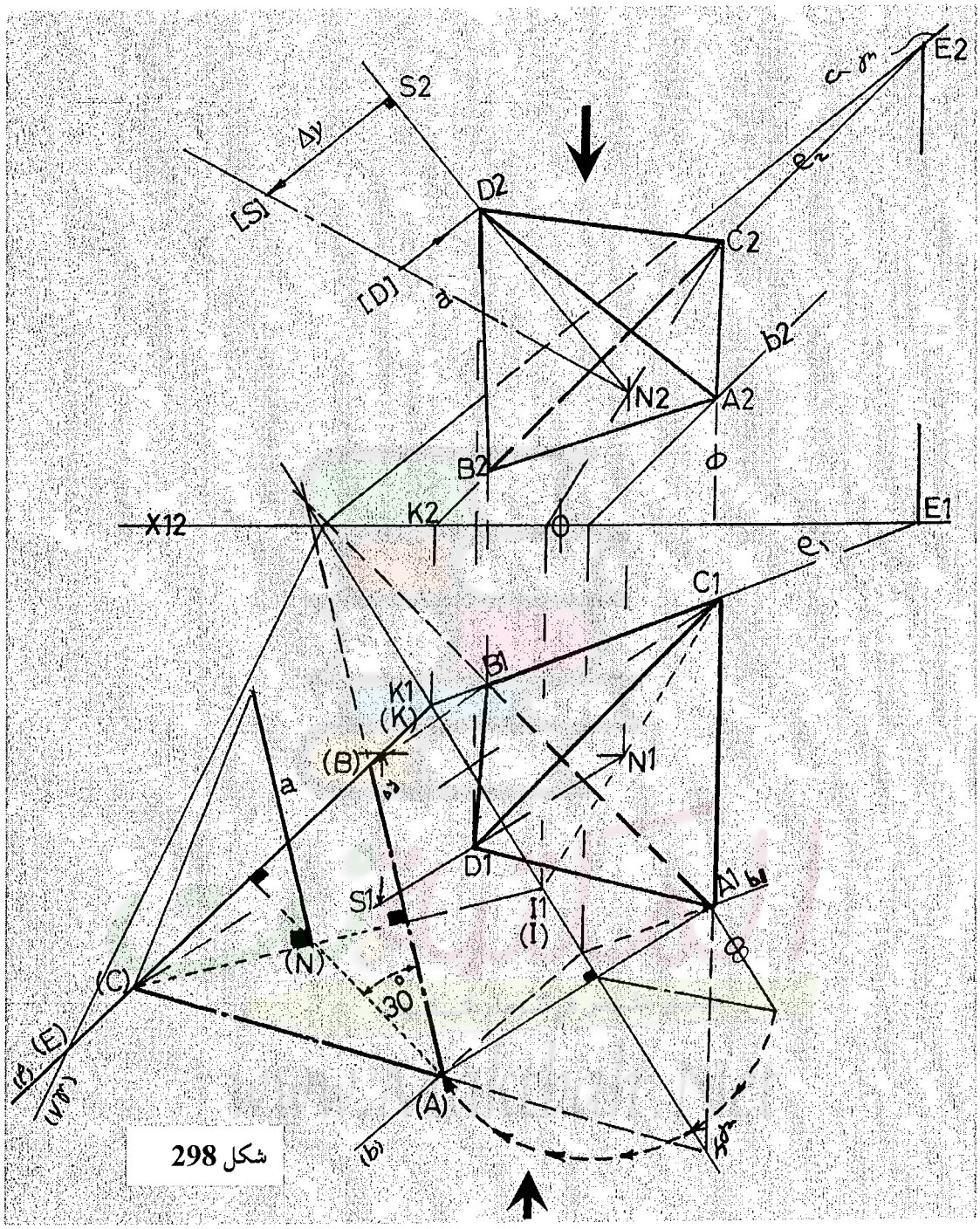
4. نركز فى أحد رؤوس القاعدة ونقطع الإرتفاع بالبرجل بطول ضلع الهرم فنحدد إرتفاع الهرم الحقيقى كطول حقيقى

5. نعود بكل من (A),(B),(C),(N) وذلك بالتألف فنحصل على $A_1B_1C_1N_1$ ومن ثم على $A_2B_2C_2N_2$

6. نرسم من $N_1$ و$N_2$ مستقيم عمودى على مستوى المثلث هو محل هندسى للإرتفاع ومنه نحدد الطول الحقيقى له إبتداء من نقطة N ثم نقيس على الطول الحقيقى طول إرتفاع الهرم الذى أوجدناه ونحن فى الدوران فنوجد مساقط الرأس $D_1,D_2$ شكل 298

7. الظاهر والمختفى: بنفس قاعدة الأحرف الظاهره الخارجيه أو أعلى نقطة فى المسقط الرأسى يكون كل الخارج منها ظاهر فى الأفقى والمقابل لها على نفس القطر منقط (مختفى) والعكس صحيح. شكل 298

المكتبة نت
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net


S2
Δy
[S]
D2
E2
C2
[D]
a
b2
N2
A2
B2
K2
X12
E1
C1
B1
K1
(K)
(B)
N1
a
D1
A1
S1
I1
(I)
(N)
30°
(C)
(E)
(A)
(b)

شكل 298

مثل المكعب الذى وجهه $A'B'C'D'$ يقع فى المستوى $\gamma$ (-5,6,4) وإذا علم أن $A'$(-1,1.5,?) و $B'$(0.5,?,1)

1. نعين المسقط الرأسى $A_2'$ للنقطة A وكذلك المسقط الأفقى $B_1'$ للنقطة B وذلك بتمرير مستقيم أفقى أو وجهى

2. بدوران المستوى $\gamma$ حول أثره الأفقى بإستخدام أى نقطة على الأثر الرأسى $S_2$ و $S_1$ على خط الأرض نحصل على (S) وهى نقطة على $(V^\gamma)$ وهو دوران الأثر الرأسى، نصلها بنقطة تلاقى الأثار فيكون هذا هو $(V^\gamma)$ ومن ثم نصنع خطوات دوران نقطة $A_1'$ حول الأثر الأفقى فنحصل على $(A')$ . شكل 299

3. نصل $B_1'A_1'$ ونمده حتى يقابل محور الدوران $h^\gamma$ فى النقطة I نصلها ب(A) ونسقط العمودى من $B_1'$ فنحصل على $(B')$ . شكل 299

4. من الضلع $(B')(A')$ يتم إنشاء المربع كامل بخواص الهندسه المستويه فيتكون $(C')(D')$ ونعود بهم نحصل على $C_1'D_1'$ بنظريه التألف شكل 299

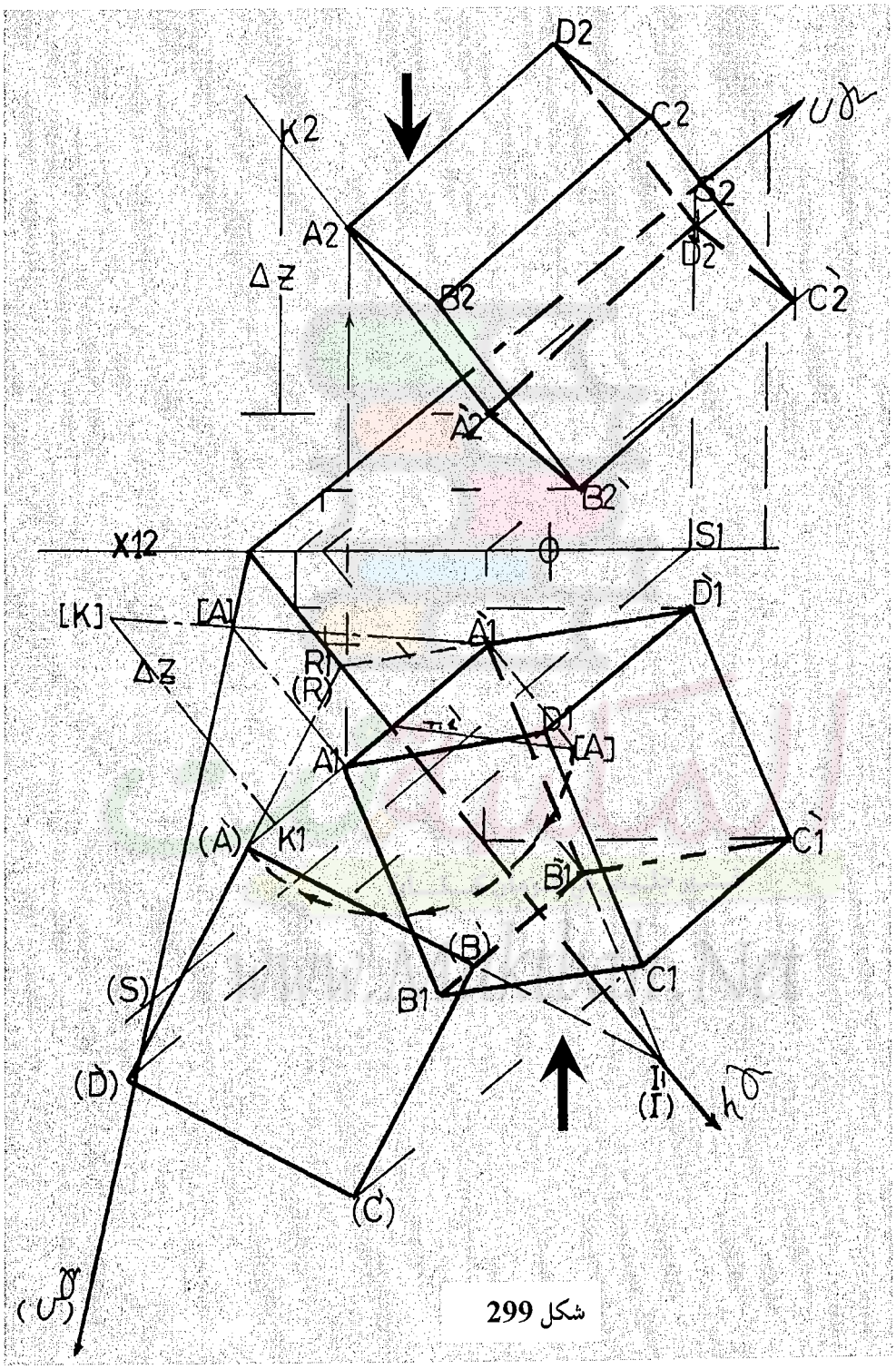
5. بعد إستكمال رؤوس قاعدة المكعب "المربع" $A'B'C'D'$ نقيم أعمدة من رؤوس القاعدة على أثار المستوى فى مساقطها ونوجد الطول الحقيقى لأى حرف منهم وليكن القائم من $A'$ كما هو واضح فى المسقط الرأسى ، ثم يتم تعين الطول الحقيقى لضلع المكعب عليه "الطول الحقيقى موجود فى الدوران". شكل 299

6. لتحديد الظاهر والمختفى فى المكعب فإنه يلزم تحديد رأسين فى المكعب على قطر وأحد بحيث أن ظهور أحدهما بكل الأحرف الخارجه منه يعنى إختفاء الأخر بكل الأحرف الخارجه منه وليتم ذلك يتم الاتى:

أولا: النظر على المسقط الرأسى من أعلى لأسفل فى إتجاه السهم، فنرى أول نقطة فى الأعلى هى الأولى وهى $D_2$ والتى يكون كل الخارج من المناظر لها فى الأفقى ظاهر أى من $D_1$ وتكون المقابله لها على القطر وهى $B_1'$ كل الخارج منها منقط. شكل 299

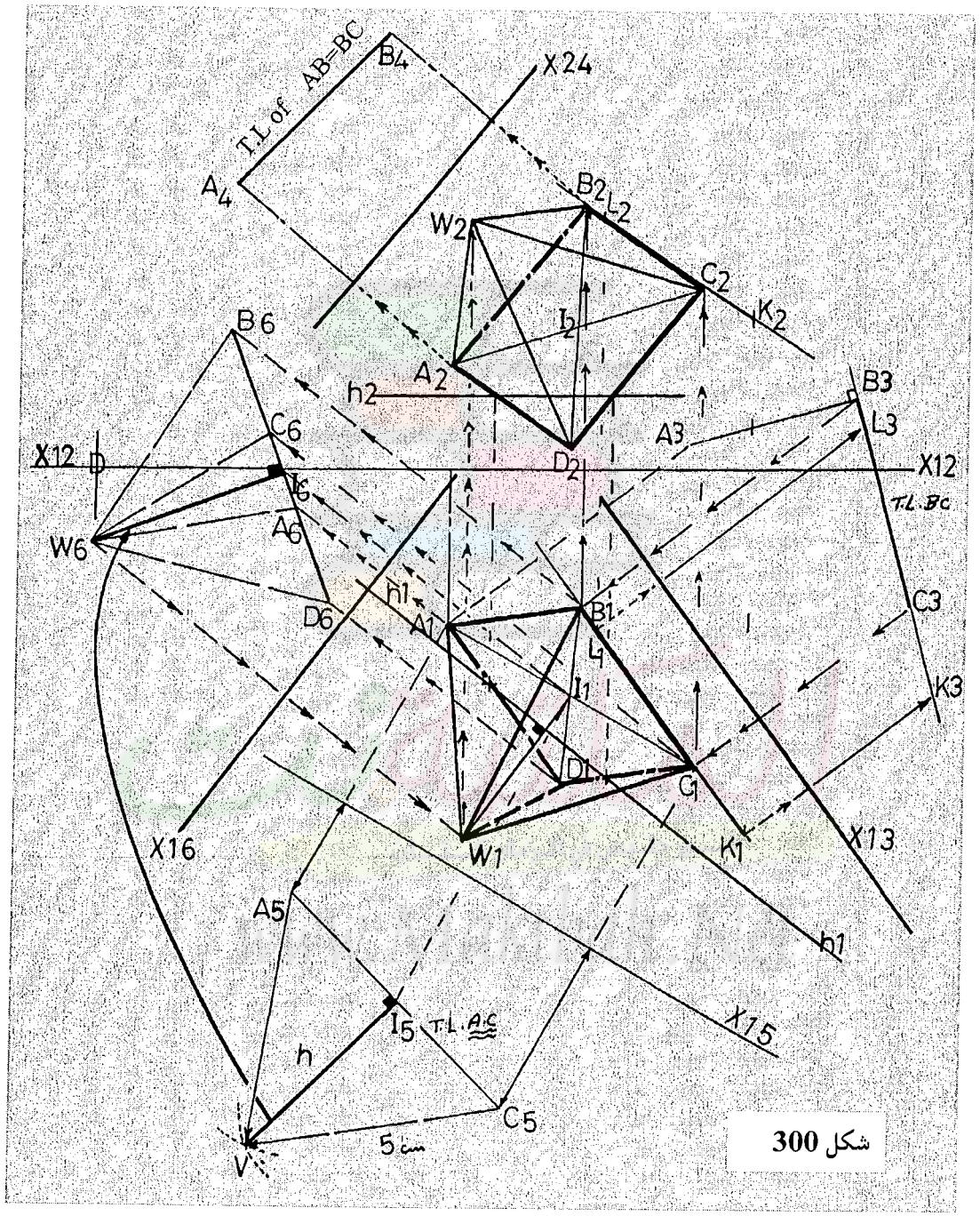
ثانيا: النظر على المسقط الأفقى من أسفل لأعلى فى إتجاه السهم، فنرى أول نقطة فى الأسفل هى الأولى وهى $B_1$ والتى يكون كل الخارج من المناظر لها فى الرأسى ظاهر وهى $B_2$ وتكون المقابله لها على القطر وهى $D_2'$ كل الخارج منها منقط.

ثالثا: يمكن عكس القاعدة فعند النظر من أسفل لأعلى ننظر لأقرب نقطة من خط الأرض فنجدها هى $D_1'$ فتكون فى الرأسى كل الخارج منها منقط والباقى ظاهر . وعند النظر على المسقط الرأسى من أعلى لأسفل نجد أقرب نقطة لخط الأرض هى $B_2'$ وبالتالى الخارج من المناظر لها فى الأفقى وهى $B_1'$ منقط والباقى ظاهر. وهذه القاعدة للمنشور والمكعب الرباعى.



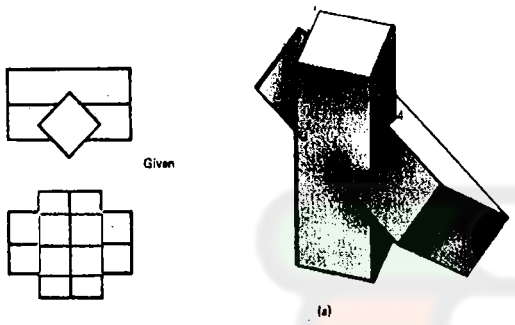

شكل 299

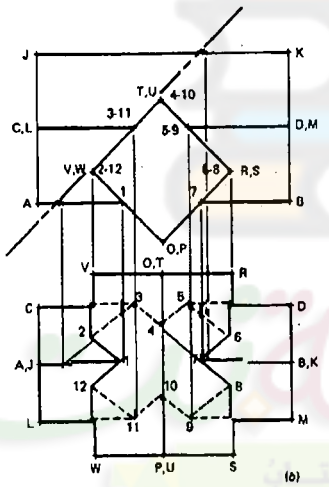
مثل مربع ABCD حيث A(7,3,2) رأس فيه وأحد أضلاعه يقع على المســـتقيم b[L(10,3,5), K(13,7,3)] ثم مثل هرم قائم قاعدته هذا المربع وطول حرفه 5cm .



## مضلع تقاطع مستوى مع كثيرات السطوح

مضلع التقاطع لمستوى مع كثيرة السطوح هو شكل هندسى مضلع، أضلاعه خطوط ناتجة من تقاطع المستوى القاطع مع مستويات أوجهه كثيرة السطوح، رؤوس هذا المضلع هى نقاط تقاطع المستوى القاطع مع أحرف كثيرة السطوح كما بالشكل 301. وعدد أضلاع مضلع التقـــاطع هى عدد أوجهه كثيره السطوح المقطوعة. يتم تعيين مضلع التقاطع بعد إعتبار أحرف كـــثيره السطوح مستقيمات ونأتى بنقطة تقـــاطع كـــل مستقيم مع المستوى وبالتالى تتواجد عدد نقاط بعدد الأحرف ويتم توصيلها معا.




شكل 301

**ويتم إيجاد نقاط تقاطع الأحرف مع المستوى القاطع بأحد الاساليب الأتية:**

1. بالطريقه العامه "نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى" والحالة الخاصة منها عندما يكون المستوى خطى المسقط
2. بإستخدام الإسقاط المساعد "بتحويل المستوى لخطى المسقط ومعه كثيره السطوح فتنتج مساقط نقاط مضلع التقاطع مع المستوى الخطى ولكن فى الثلاثات (كلها تحمل رقم 3) وبالتالى نعود بها لمساقطها الأولى والثانيه
3. بإستخدام التألف الموجود بين مضلع التقاطع وقاعدة الجسم

وسيتم شرحها كلها على أمثلة تطبيقية قادمة

## إيجاد مضلع التقاطع بإستخدام المستوى العمودى خطى المسقط

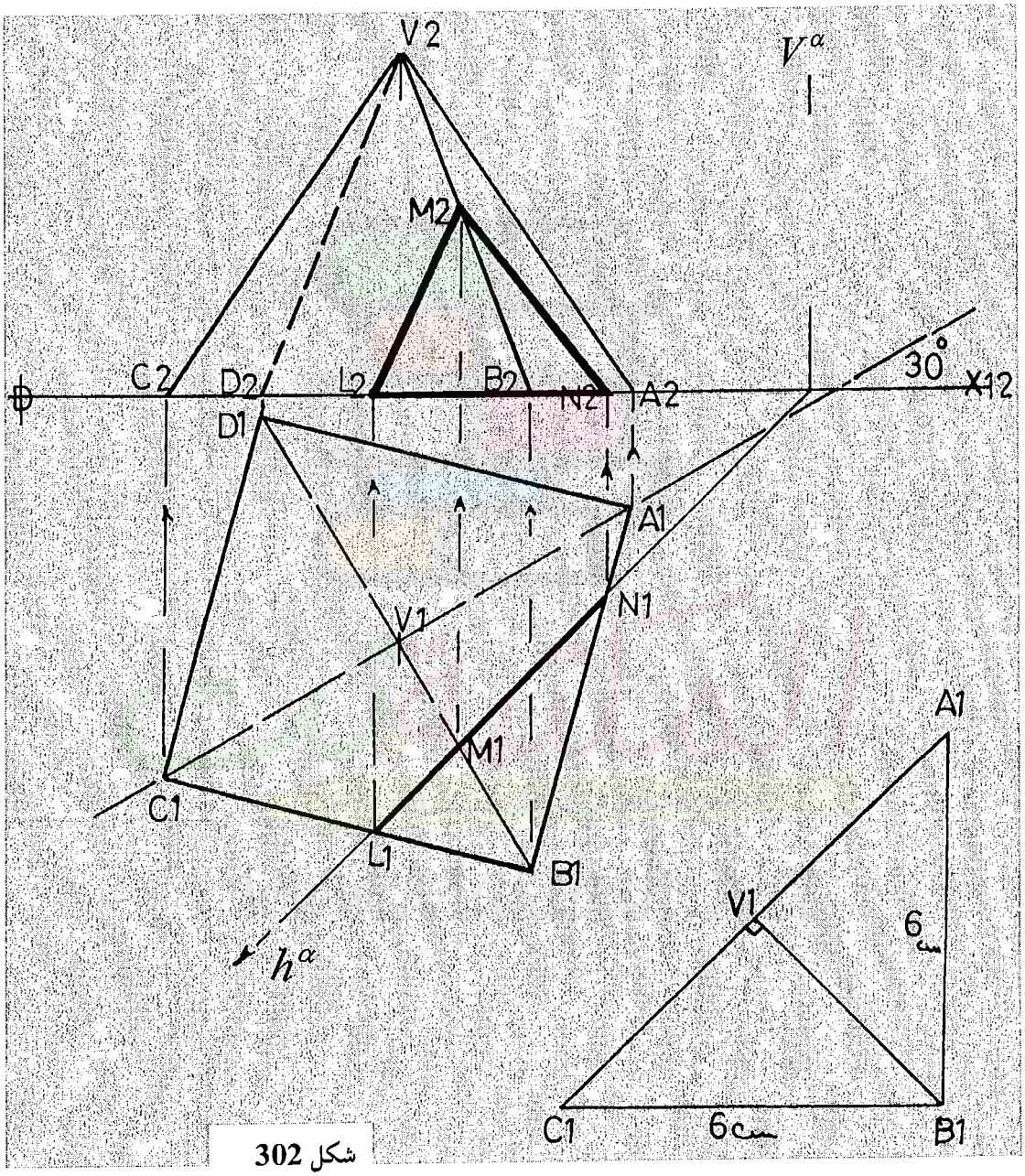
**مثل مضلع تقاطع هرم قائم رأسه V(6,4,5.5) وقاعدته مربع يقع فى $\pi_1$ طول ضلعه 5cm وأحد قطريه يميل $30^0$ على $X_{12}$ مع المستوى أولا: رأسى $\alpha(12.5,45^0)$ ثانيا: عمودى على $\pi_2$ وهو $\alpha(0,30^0)$**

الحل: أولا رأسى $\alpha(12.5,45^0)$

1. نتيجة لأن القاعدة فى المستوى الأفقى فتظهر بشكلها الحقيقى، ولرسم القاعدة يتم رسم مستقيم فى الأفقى يميل $30^0$ على خط الأرض من $V_1$ " محل هندسى لقطر القاعدة **AC**". شكل 302
2. إستخدام رسم خارجى لمربع طول ضلعه **6cm** نأتى بطول القطر ونصفه فنتج**M** وهى $V_1$
3. يتم توقيع طول نصف القطر من $V_1$ فنحصل على $C_1A_1$ ثم نقيم عمودى من $V_1$ محل هندسى لقطر المربع الأخر ونقيس عليه نفس نصف القطر فيكتمل المربع وهو قاعدتة الهرم، ونصله بالرأس فيكتمل الهرم
4. نوقع المستوى $\alpha$ القاطع وهو مستوى رأسى خطى المسقط الأفقى ، أى يقطع الهرم فى مضلع تقاطع ولكنه يظهر خط فى المستوى الأفقى نتيجه لخاصية المستوى الرأسى الذى يقع فيه مضلع التقاطع . شكل 302
5. من شكل 302 ، نجد أن المستوى الرأسى قطع الهرم فى المستوى الأفقى فى النقاط الاتيه: $L_1M_1N_1$ ، حيث $L_1$ على ضلع القاعدة $C_1B_1$ ، و $M_1$ على الحرف $V_1B_1$ ، و $N_1$ على الضلع $A_1B_1$ ، لذلك نوجد مساقطها الرأسية على المستقيمات التى تقع عليها حيث $L_2,M_2$ يقعا على خط الأرض لأنهما على أضلاع القاعدة التى تقع فى المستوى الأفقى أما $M_2$ فتقع غلى الحرف فتنقل على $V_2B_2$ لأن مسقطها الأفقى يقع على $V_1B_1$ وبالتالى نكون حصلنا على مضلع تقاطع المستوى الرأسى مع الهرم.
6. من شكل 302، عندما ننظر من أسفل لأعلى على المسقط الأفقى نجد أن أضلاع القاعدة للهرم منها ماهو ظاهر ومنها ماهو مختفى، وكذلك رؤوس القاعدة. فإذا نظرنا سنجد رؤوس القاعدة $C_1B_1A_1$

لايعوق رؤيتهم شيء أما النقطة $D_1$ فإنها تكون خلف حدود المسافة من $C_1$ إلى $A_1$ وهذا يعنى أنها لاتظهر فى الرأسى هى والحرف الخارج منها، لذلك فإن الحرف $V_2D_2$ سيكون مختفى رأسيا.

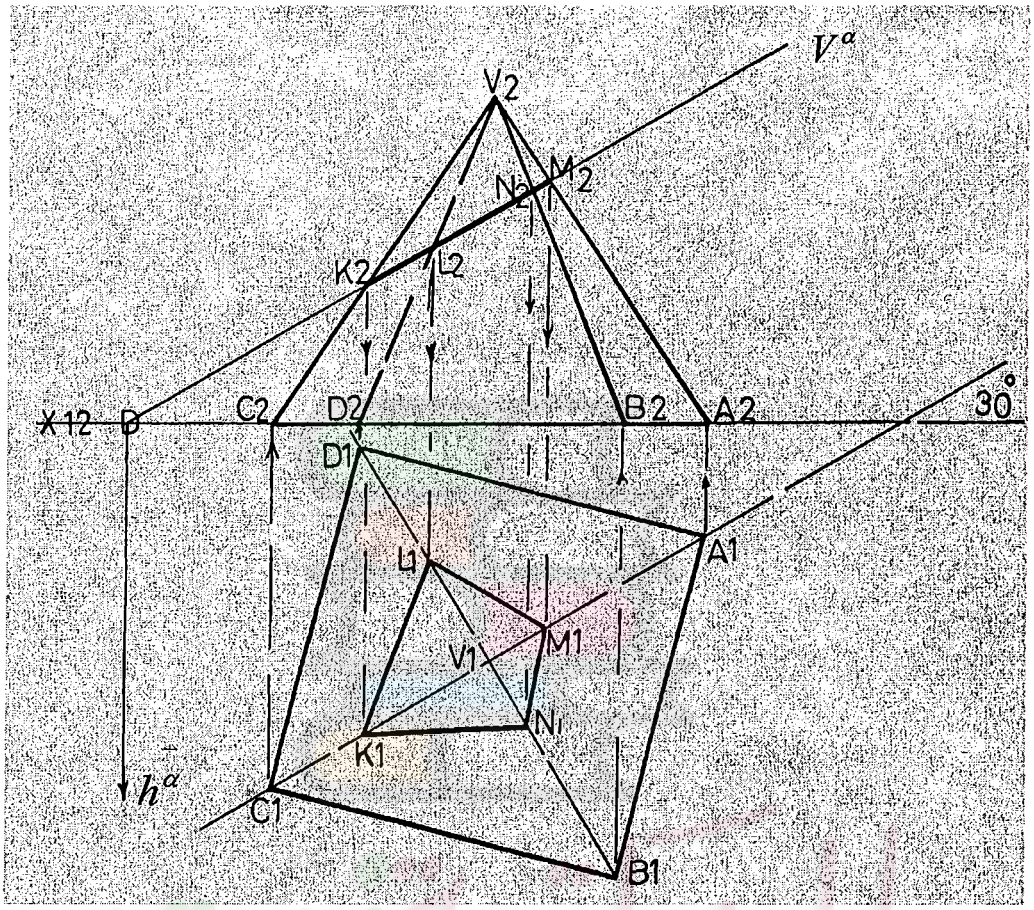
7. بالنسبة لمضلع التقاطع فبنفس الإسلوب السابق للنظر نجده كله ظاهر أمام الناظر لذلك فهو ظاهر فى المسقط الرأسى. شكل 302




شكل 302

ثانيا: عمودى على $\pi_2$ وهو $\alpha(0,30^0)$

بالنسبه للحاله الثانية يكون العكس فى إتجاه النظر والتطبيق كما يتضح فى الشكل 303



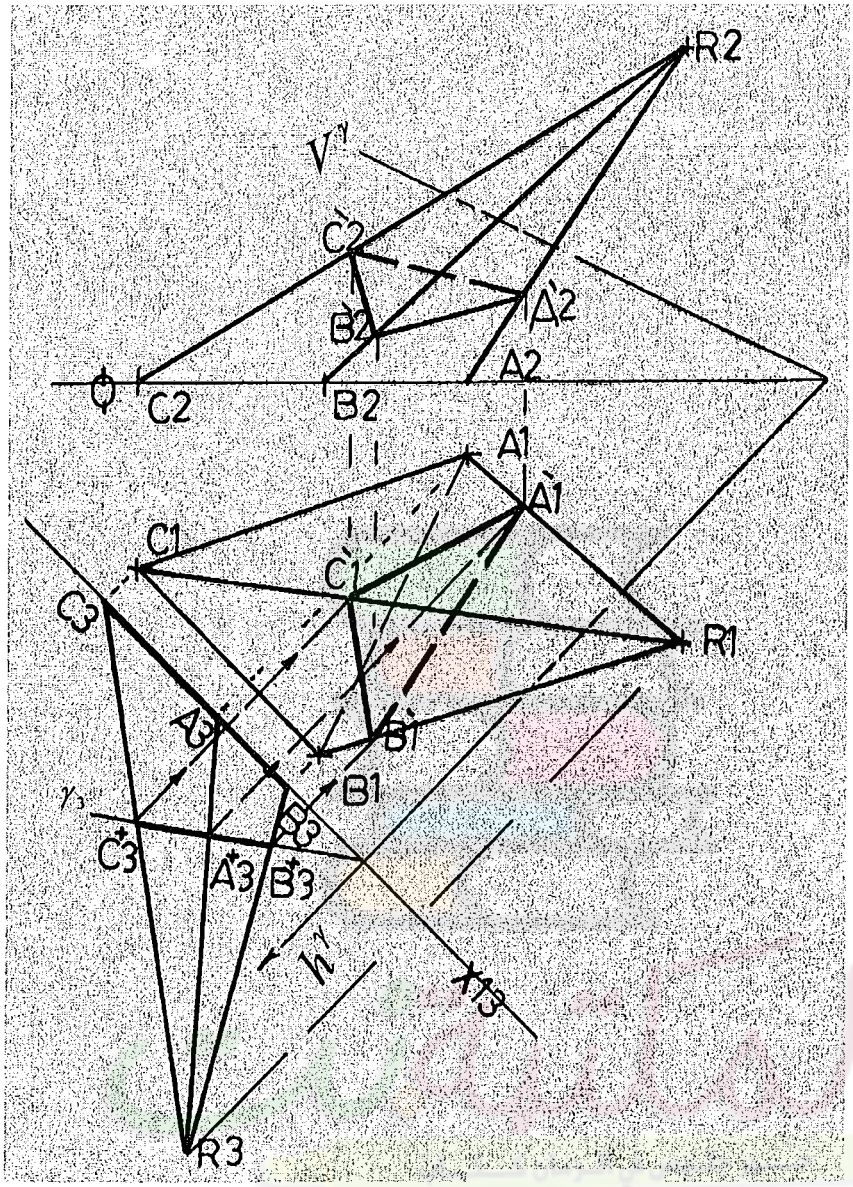

شكل 303

## إيجاد مضلع التقاطع بإستخدام الإسقاط المساعد

معلوم هرم ثلاثى مائل قاعدته ABC ورأسه R والمستوى $\gamma$ حيث $(10,45^0,\ 25^0)$, A(5,1,0),B(3,5,0),C(0.5,2.5,0) R(8,3.5,4.5), $\gamma$، أوجد مضلع التقاطع بإستخدام الإسقاط المساعد للهرم الثلاثى

الحل: يتم تحويل المستوى القاطع الى مستوى خطى المسقط بإستخدام الإسقاط المساعد ، بإستخدام $X_{13}$ عمودى على $h^\gamma$ فنحصل على $\gamma_3$ وأيضا يتم تحويل الهرم الى المسقط الثالث "الثلاثات" شكل 304

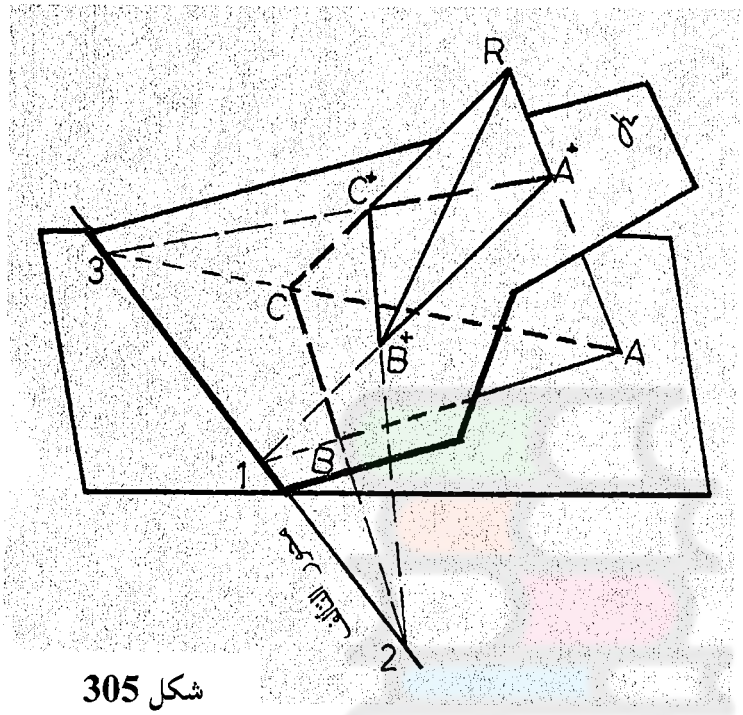
1. مميزات إيجاد المسقط الثالث أن المستوى خطي المسقط ومن مميزات خطي المسقط أن نقطة تقاطعه مع أى مستقيم تظهر مباشرة على خطى المسقط كما وضحنا فى الموضع سابقا فى بند نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى خطي المسقط شكل 304




شكل 304

2. فى $\pi_3$ نحصل على $A_3^*$ $B_3^*$ $C_3^*$ وهى نقاط تقع على مساقط الأحرف ولكن أيضا فى الثلاثات أى تقع على الأحرف $R_3C_3$ ,$R_3B_3$, $R_3A_3$ وبالتالى نعود بمساقط نقاط التقاطع على الأحرف المناظره لها فى المسقط الأول الأفقى فنحصل على $C_1'$ ,$B_1'$, $A_1'$ المسقط الثانى الرأسى فنحصل على $C_2'$ ,$B_{21}'$, $A_2'$ وبذلك يتحدد مساقط مضلع التقاطع.

## تعين مضلع التقاطع بالتألف المركزى




شكل 305

إذا قطع مستوى مثل $\gamma$ أحد كثيرات السطوح فإنه يقطعه فى مضلع مستوى $A^*,B^*,C^*$ كما بالشكل 305 حيث تتواجد علاقة بين مضلع التقاطع $A^*B^*C^*$ ومضلع القاعدة $ABC$ وتسمى بالتألف وخواصها كالأتى:

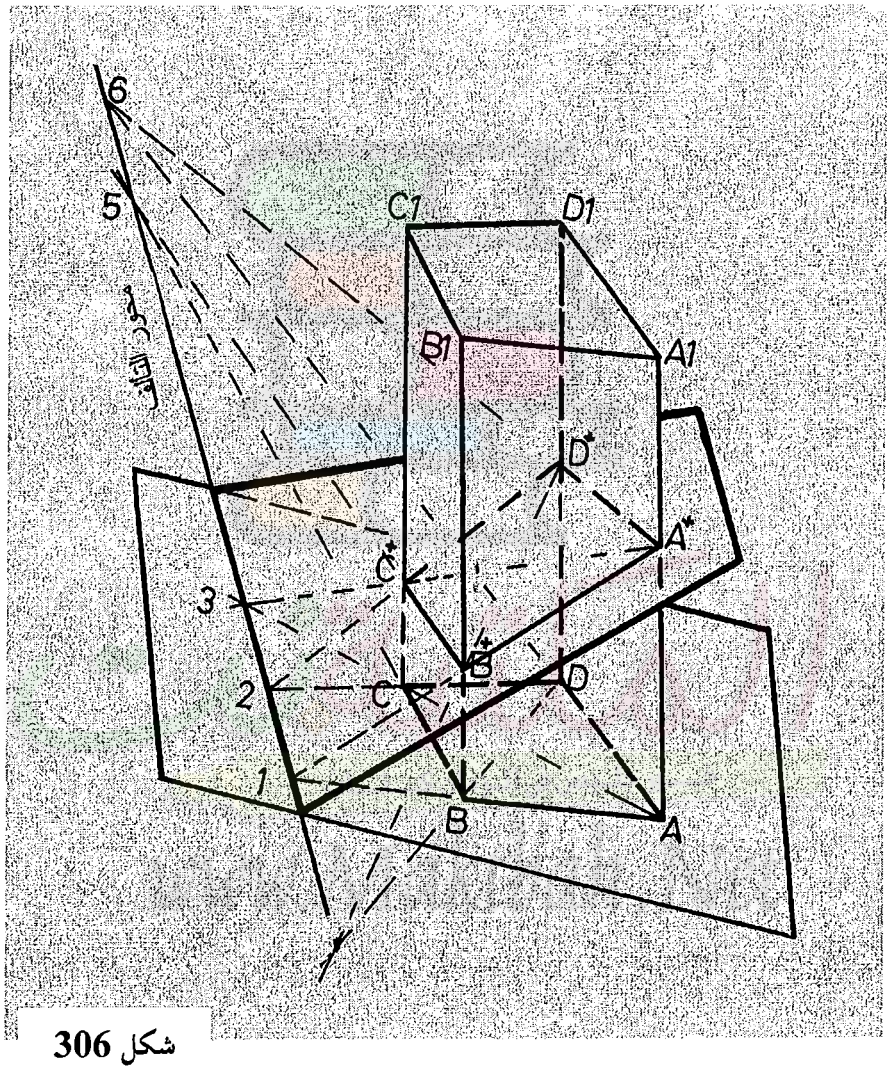
1. لكل نقطة على مضلع التقاطع تناظرها نقطة واحدة على مضلع القاعدة على نفس الحرف والعكس صحيح ، أى أن علاقة التناظر واحد لواحد بين مضلع التقاطع ومضلع القاعدة. كمثال شكل 305 النقاط $A^* B^* C^*$ تناظر A, B' C والعكس صحيح وكذلك شكل 306 النقاط $A^* D^* B^* C^*$ تناظر A, B' C, D.
2. خط تقاطع المستوى القاطع $\gamma$ ومستوى القاعدة يسمى محور التألف
3. أى ضلع من أضلاع المضلع يناظره ضلع من أضلاع القاعدة ، كمثال شكل 305 لضلع $A^* B^*$ يناظر الضلع A B والضلع $B^* C^*$ يناظر الضلع B C والعكس صحيح، وكذلك شكل 306 لجميع الأضلاع
4. كل مستقيمين متناظرين (كمثال $A^*B^*$و AB ) يتقابلان في نقطة واحدة على محور التألف. كمثال شكل 305 و 306، $A^*B^*$ عند إمتداده يقطع محور التألف فى نقطة رقم 1 هى نفس النقطة التى يتقاطع فيها الخط الواصل بين النقطتين المناظرين لهم فى القاعدة وهما AB مع محور التألف. وكذلك لباقى المستقيمات

فى شكل 305 $C^*B^*$، CB و $A^*C^*$، AC

في شـــكل 306 $A^*B^*$، AB و$C^*B^*$، CB و $C^*D^*$، CD و $A^*D^*$، AD و$B^*D^*$، BD و$A^*C^*$ ، AC

5. المستقيمات الواصلة بين كل نقطتين متناظرتين تقع على حرف واحد تتقابـــل كلـــها في نقطـــة واحـــدة كمثـــال 1و2و3و4و5و6 شكل 306 وهي تشكل رأس وجهه هرم وهذا النوع يسمى التألف المركزي .

6. المستقيمات الواصلة بين كل نقطتين متناظرتين تتوازى وتوازى أحرف النشور وهذا النوع يسمى بالتألف المتوازي .




شكل 306

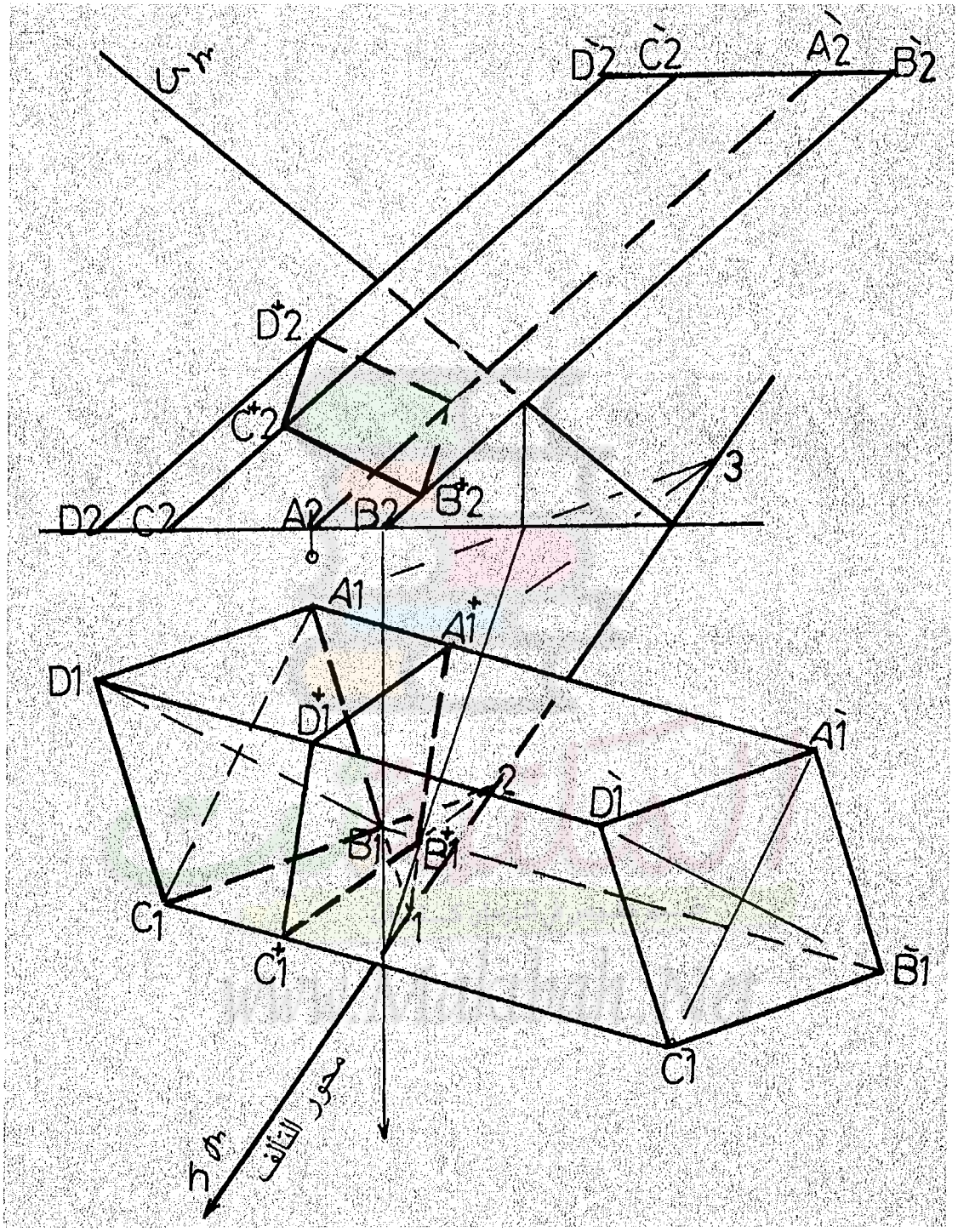
من المثالين السابقين يتضح أنه بتواجد مضلع القاعدة ومحور التألف ونقطة واحدة على مضلع التقاطع يمكن إستخدام التألف وإستنتاج نقاط مضلع التقاطع الباقية

**مثل منشور رباعى مائل قاعدته مربع ABCD واقعه فى المستوى الأفقى حيث A(0,1,?), D(-3,2,?) وأحد رؤوس القاعدة العليا A'(7,3,6) ثم عين مضلع التقاطع مع المنشور مع المستوى (5,7,4) $\gamma$.**

الحل:

1. نجد أولا فى شكل 307 قاعدة المنشور تقع فى المستوى الأفقى (T.S) ويتم إستكمال الشكل المربع فى المسقط الأفقى بإستخدام خواص الهندسه المستويه إبتداء من $A_1D_1$
2. من النقطة $A'$ نرسم الحرف $AA'$ وبذلك يتحدد إتجاه مساقط الحرف وطولها ، نرسم موازيات من رؤوس القاعدة ونستكمل القاعدة العليا شكل 307
3. لنأتى بتقاطع المنشور مع المستوى $\gamma$ نأخذ الحرف $B_2B_2'$ ونوجد نقطة تقاطعه مع المستوى $\gamma$ بتمرير مستوى رأسى بالحرف فنوجد نقطة التقاطع وهى $B_1^*$ شكل 307
4. محور التألف هو خط تقاطع مستوى القاعدة مع المستوى $\gamma$ وهو $h^\gamma$ شكل 307
5. بعد الحصول على $B_1^*$ كنقطة فى المضلع نبدأ فى الحصول على باقى نقاط المضلع وذلك بالحصول أولا على النقاط المرتبطه بها كالأتى:

- نصل $A_1B_1$ ونمده حتى يقطع محور التألف فى نقطة 1 نصلها بالنقطة $B_1^*$ فيقطع الحرف $A_1A_1'$ فى نقطة هى $A_1^*$ على مضلع التقاطع شكل 307
- كذلك $C_1B_1$ نمده فيقطع محور التألف فى نقطة 2 نصلها بنقطة $B_1^*$ ونمده يقطع الحرف $C_1C_1'$ فى نقطة $C_1^*$ شكل 307
- نصل $D_1A_1$ ونمده يقطع محور التألف فى نقطة 3 نصلها بنقطة $A_1^*$ ونمده يقطع الحرف $D_1D_1'$ فى نقطة $D_1^*$ شكل 307
- وبالتالى يصبح لدينا شكل مضلع التقاطع ومساقطه كاملة
- بالنسبه للظاهر والمختفى يتم كما إتبعنا فى التمارين السابقة وعامة أضلاع مضلع التقاطع المنطلقة من أحد الأحرف المنقطة (المختفية) تكون مختفية. شكل 307


D2 C2 A2 B2
D2
C2
A2
B2
3
D2 C2 A2 B2
A1
A1
D1
D1
A1
D1
2
B1
B1
C1
C1
1
B1
C1
محور التآلف
h

شكل 307

## الإفراد

إفراد السطوح تعتبر من الموضوعات الهامه فى الحياة العملية وهى تلخص ماسعينا لتعلمه من بداية هذا العلم. والأمثلة كثيرة على ذلك، لأننا عندما نصمم جسما فإن هذا الجسم له أبعاده الخارجية وأشكاله وكذلك كثيرات السطوح والسطوح الدورانية كما فى شكل 308 فى الجزء الأمامى من الطائرة وكيفية أنه يتكون من أكثر من جزء منحنى وكيف سيكون شكل ألواح المعدن قبل التصنيع وماهى مساحته التى يجب تقطيعه عليها حتى يمكن عند تشكيلها تكون هذا الشكل. وكمثال أخر فى مداخن المصانع هى إسطوانات متقاطعة وهى كانت فى الأصل قبل التصنيع ألواح من الصاج لذلك كانت الخطوة الأولى بعد التصميم هى معرفة مساحة الألواح الصاج التى سيتم قطعها مفرودة ومسطحة بحيث يكون شكلها عند التصنيع والتطبيق تعطى الشكل الذى تم تصميمه. وقس على ذلك كل الأشكال التى تُصمم من أجسام الأجهزة والمعدات وعبوات التعبئة والعلب الكرتون التى توضع بها البضائع. ومن هنا ظهر أهمية هذه الجزء من العلم والتى يجب على المهندس تعلمه جيدا. حيث وجب على طالب كلية الهندسة أن يجيد هذا العلم. وإنى شخصيا أُرجع التأخر فى عملية التصنيع فى الدول النامية إلى أن المهندسين لايجيدوا هذا العلم ويتركوه للفنيين ( الصنايعية) للعمل فيه بالشبهه أو بالقياس.



شكل 308

## إفراد السطح الجانبي والقاعدة ومضلع التقاطع للهرم والمنشور

لإفراد السطح الجانبي للهرم أو المنشور وكذلك القاعدة لابد من معرفة الأطوال الحقيقية لأحرف الهرم أو المنشور بوضعه من ناحية أنه قائم أو مائل وكذلك الأطوال الحقيقية لأضلاع القاعدة ومعه أيضا مضلع التقاطع إن وجد.

بالنسبة للأحرف: يتم تعين الأطوال الحقيقة للأحرف بواسطة الدوران أو الإسقاط المساعد. فالنسبة للهرم يتم إستخدام الدوران لأنه أسهل فى التناول والمعالجة، ويتم دوران نهايات الأحرف (نقاط رؤوس القاعدة) إبتداء من رأس الهرم بحيث تكون فى المسقط الأفقى فى الوضع الذى يشبه مسقط المستقيم الوجهى (موازية لخط الأرض) (كما حدث فى باب القياس) ومن ثم بالتناظر الرأسى على خط الأرض نوجد المساقط الرأسية لهذه النقاط نهايات الأحرف (نقاط رؤوس القاعدة)، وسنعرض بعض الأمثلة على ذلك . أما بالنسبة للمنشور فإستخدام الإسقاط المساعد هو أفضل الطرق لنأتى بالطول الحقيقى للأحرف المتوازية حيث نرسم خط أرض $X_{13}$ يوازى أى حرف فنأتى بالطول الحقيقى للحرف ومايوازيه من أحرف أخرى وكذلك الوضع الحقيقى للمنشور ناحية أنه قائم أو مائل، وسنعرض بعض الأمثلة على ذلك. وفى أول باب الدوران سنجد مثال كامل على كيفية إستغلال الدوران لنأتى بالأطوال الحقيقية للأحرف للهرم وكذلك الأطوال بداية من رأس الهرم وحتى نقاط مضلع التقاطع.

### بالنسبة للقاعدة

يتم إستخدام الدوران للمستوى حول الأثر الأفقى للقاعدة حيث نحصل على الشكل الحقيقى للقاعدة وكذلك الأطوال الحقيقية لأضلاعها لأننا سنستخدمها بأطوالها الحقيقة.

### بالنسبة لمضلع التقاطع

يتم إستخدام الدوران للمستوى حول الأثر الأفقىللمستوى الذى قطع كثيرة السطوح وهو المستوى الذى يقع فيه مضلع التقاطع حيث نحصل على الشكل الحقيقى لمضلع التقاطع وكذلك الأطوال الحقيقية لأضلاعه لأننا سنستخدمها بأطوالها الحقيقة.

**مثل هرم رباعى مائل RABCD ومثل تقاطعه مع المستوى $(2.5,55^0,155^0)$ $\gamma$ ومثل إفراد السطح والقاعدة وكذلك مضلع التقاطع على سطح الإفراد حيث A(-8,5.5,0), B(- R(0,4.5,5.5), 3.5,6.5,0), C(2.5,0.5,0), D(-6,1.5,0)**

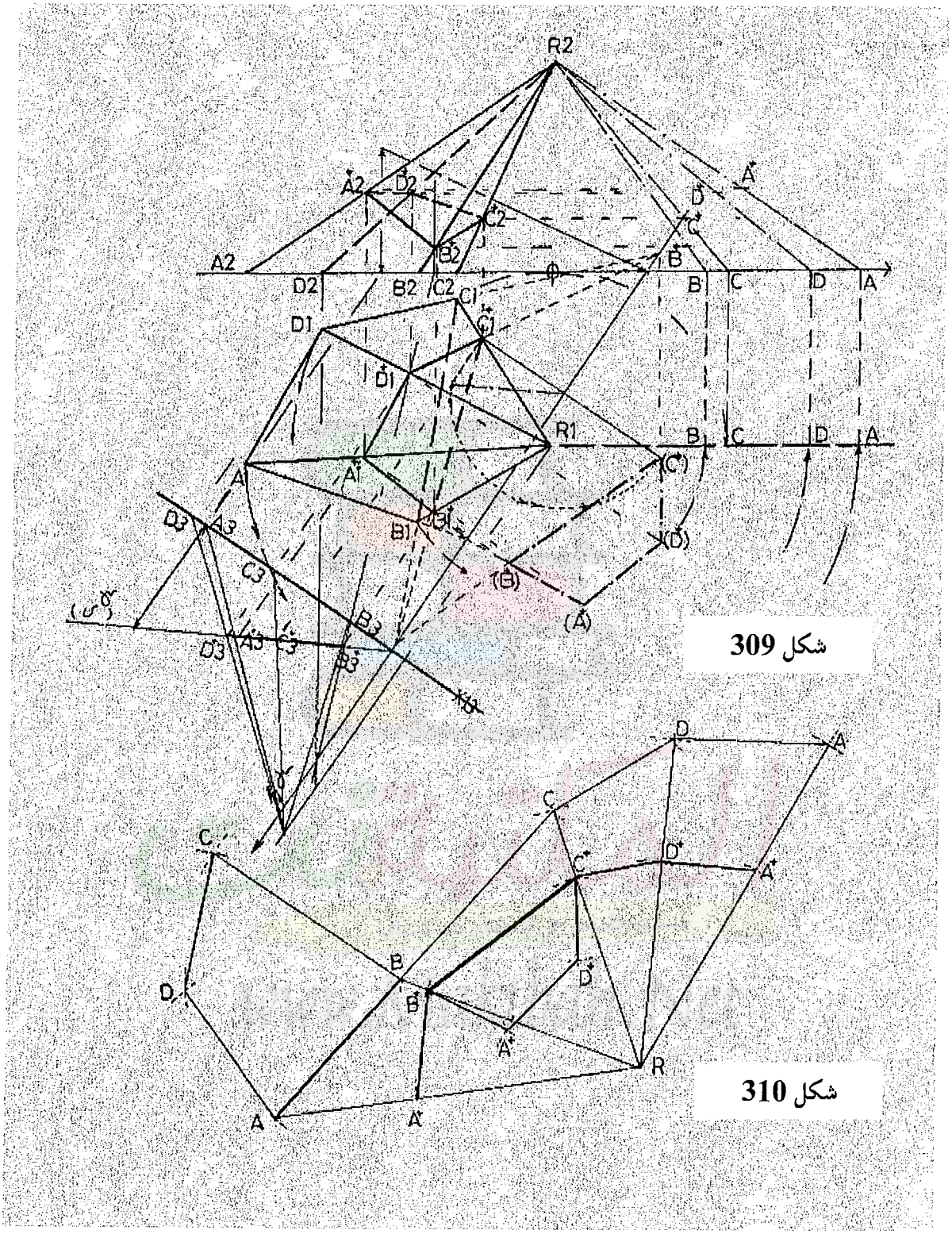
الحل

1. من شكل 309 ومن خواص نقاط القاعدة فإنها تقع فى المستوى الأفقى ولايوجد نقص فى الإحداثيات أى يتم التمثيل المباشر للهرم والمستوى القاطع
2. بإستخدام الإسقاط المساعد وتحويل المستوى $\gamma$ لخطى المسقط نأتى بمضلع التقاطع $^+A_3{}^+B_3{}^+C_3{}^+D_3$ والعوده بهم لمساقطهم الأولى والثانيه
3. لإحداث الإفراد لابد وأن نأتى بالأطوال الحقيقية لجميع الأضلاع فى الهرم حتى يمكن إفرادها بنفس علاقات الأضلاع وبعدها الحقيقىعن بعضها ولكن بالأطوال الحقيقيه وليتم ذلك نتبع الاتى:

- بالنسبة للقاعدة فهى بشكلها الحقيقى فى المستوى الأفقى
- بالنسبة لمضلع التقاطع نأتى بشكله الحقيقى بإستخدام الدوران حول الأثر الأفقى للمستوى الواقع فيه وهو المستوى $\gamma$ فنحصل على $(A^+)$ $(B^+)$ $(C^+)$ $(D^+)$ وتصبح هذه هى الأطوال الحقيقيه والشكل الحقيقى لمضلع التقاطع
- بالنسبه للأحرف الخاصة بالهرم والأحرف الخاصه بمضلع التقاطع ( من رأس الهرم وحتى نقاط مضلع التقاطع )، يتم دوران المساقط الأفقيه لهذه الأحرف حول رأسها "مركزها" $R_1$ حتى يصبحوا مساقط لمستقيمات وجهيه أى يكونوا موازيين لخط الأرض، وذلك الدوران يكون (شكل 309) حتى الخط الموازى لخط الأرض والمرسوم من $R_1$ ثم نصعد بهم رأسيا فنوجد مساقط نهايه النقاط على خط الأرض ، يتم توصيل هذه النقاط بالمسقط الرأسى لرأس الهرم فتكون هذه هى الأطوال الحقيقيه للحرف ، ونسقط عليها مباشره نقاط مضلع التقاطع بالخطوط الموازيه لخط الأرض من المساقط الرأسيه لمضلع التقاطع شكل 309. بذلك يكون لدينا الأطوال الحقيقيه للأحرف ولأحرف مضلع التقاطع

- فى شكل 310 ، لإحداث الإفراد يتم إستخدام الأطوال الحقيقيه لكل وجهه من أوجه الهـرم بترتيـب الأوجـه الأمامى او العكسى " ABCDA او ADCBA " والحرف الذى سنبدأ به هو من ننتهى به حيث أن كل وجهه يتكون من ثلاثه أضلاع حرفين وضلع قاعدة وبداخلهم ضلع من أضلاع مضلع التقاطع لذا نبدأ كالأتى: بأخذ أى حرف وليكن RA يتم رسمه بطوله الحقيقى ونوقع عليه رموزه R,A ثم بفتحة تساوى $RA^+$ (مأخوذه مـن المسقط الرأسى بعد الدوران) نركز فى R ونقطع RA بقوس فى نقطة ستكون هى $A^+$، ثم نـأتى بطـول AD ونركزبه فى نقطة A ونصنع قوس ثم نأتى بطولRD ونركز فى R ونصنع قوس يتقاطعا معا فى D ، نأتى بطـول $RD^+$ ونوقعه على RD وبالتالى يكون لدينا وجهه الهرم RAD كاملا. يتم إستكمال الإفراد للوجهـه التـالى إعتماد على أخر حرف توصلنا إليه وهو RD فيكون التالى هو RC ثم بإستخدام معه الطولDC نحصل على C ثم RB من R وكذلك CB من C فيتقاطعا ونحصل على B وأخيرا من RA وبإستخدام أيضا AB نحصل على A مره أخرى لأنها نهايه هذا الوجهه
- لوضع إفراد القاعدة نأخذ أى ضلع من الأضلاع للقاعدة وليكن AB ونضع عليه الشـكل الحقيقـى للقاعـد بإستخدام البرجل لنقل الشكل الحقيقى حيث نركز فى A بطول AD ثم نركز فى B بطول DB فيتقاطعا فى D ثم من B نركز بالطول CB وكذلك من D نركز بالطول DC فنحصل على C
- يتم عمل ذلك بالنسبه لمضلع التقاطع كما تم فى القاعدة ولكن بإستخدام الأطوال الحقيقيه الـتى حصـلنا عليـه بالدوران

www.Maktbah.Net




شكل 309

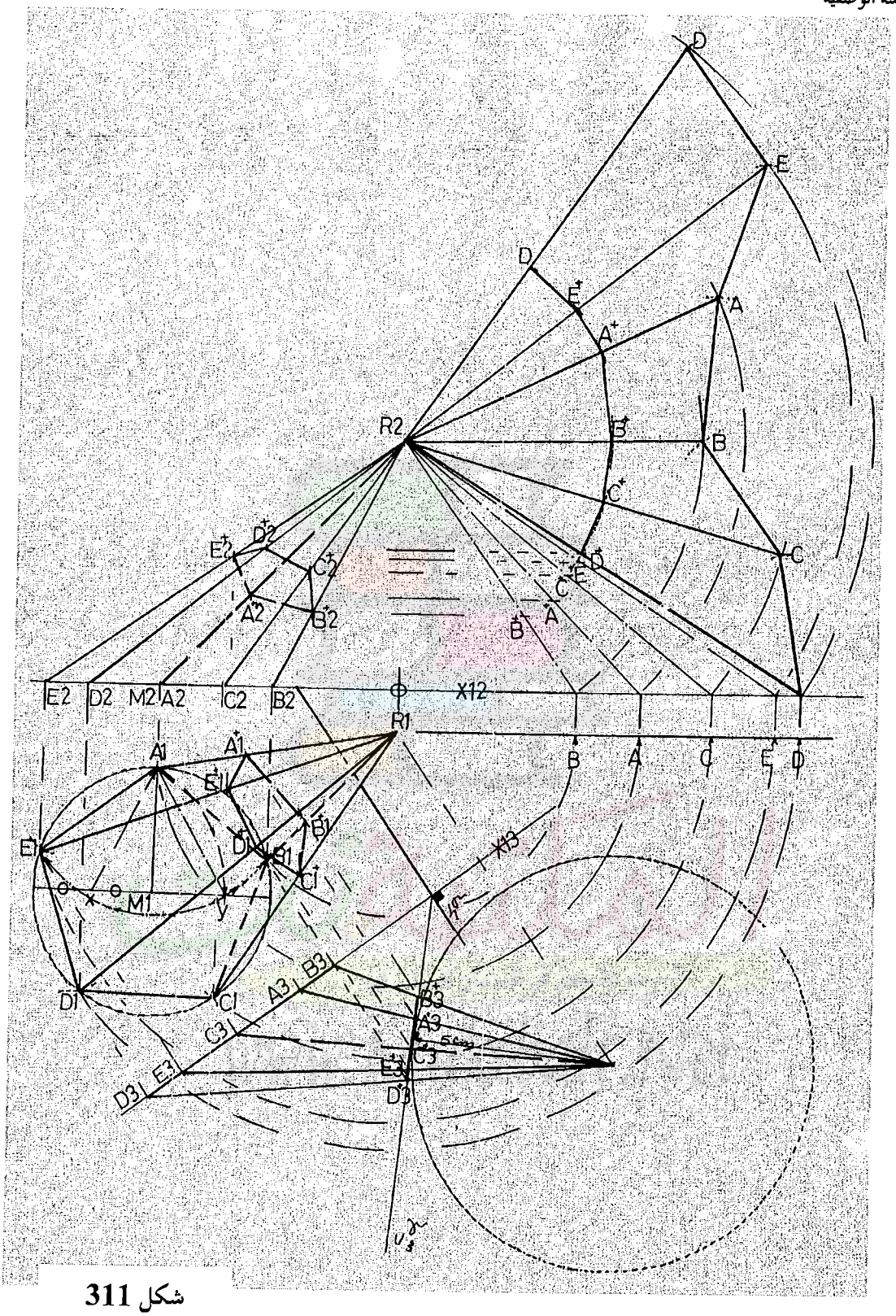
شكل 310

**مثل هرم خماسى مائل رأسه R(0,1,6) وقاعدته خماسيه تقع فى المستوى الأفقى ومركزها M(-6,5,0) وأحد رؤوسها A(-62,0) ثم عين مضلع تقاطعه مع المستوى (-2.5,3.5,?) $\gamma$ بحيث يبعد 5.5 cm عن رأس الهرم ثم إفرد السطح الجانبى ومضلع التقاطع**

الحل:

1. من شكل 311 بإستخدام العمليات الهندسيه يتم إستكمال الشكل الشكل الحقيقى للخماسى الواقع فى المستوى الأفقى ونحصل على الهرم كاملا
2. المستوى القاطع $\gamma$ معلوم منه الأثرالأفقى فقط وبالتالى يمكن رسم $X_{13}$ عمودى عليه لتحويل المستوى $\gamma$ الى خطى المسقط وكذلك نصبح فى $\pi_3$ والهرم كاملا كذلك فى الثلاثات وخاصه رأس الهرم
3. إذا كان المستوى القاطع يبعد عن رأس الهرم بمسافة 5.5cm فإن المستوى فى الثلاثات يكون خطى المسقط والمفروض أن المسافه العموديه من رأس الهرم لخطى المسقط ستكون المسافه المطلوبه وبالتالى نفتح البرجل فتحه تساوى 5.5cm ونصنع بها دائره
4. من نقطة تلاقى $h^\gamma$ مع $X_{13}$ نرسم خط يمس هذه الدائره ويكون هو $\alpha_3$ للمستوى وهو خطى المسقط ومنه يمكن الرجوع لإيجاد الأثر الرأسى للمستوى
5. من خطى المسقط الناتج نستنتج نقاط مضلع التقاطع ولكن فى الثلاثات وهى $A_3^+ B_3^+ C_3^+ D_3^+ E_3^+$ فنعود بها على المستقيمات المناظره أفقيا ورأسيا
6. لإحداث الإفراد لابد أن نأتى بالأطوال الحقيقيه ويتم ذلك بإستخدام الدوران كما هو واضح فى الشكل 311 على الناحيه اليمنى
7. يتم إستخدام الأطوال الحقيقيه لإيجاد الشكل الحقيقى للإفراد

www.Maktbah.Net


D
E
D
E2
A
A2
R2
B
B2
C
C2
D2
E2
D2
M2
A2
C2
B2
X12
R1
A1
B1
C1
D1
E1
M1
A3
B3
C3
D3
E3
60°

شكل 311

**مثل هرم رباعى قائم قاعدته مربعه ABCD واقعه فى المستوى الأفقى وأحد رؤوسها A(-2,3.5,?) وأحد أوجهه الهرم يقع فى المستوى $\alpha(2,-4,4)$ . أقطع الهرم بالمستوى $\beta(?,60^0,30^0)$ المار بالنقطة N(4,0,6) ثم أفرد الجزء السفلى من الهرم**

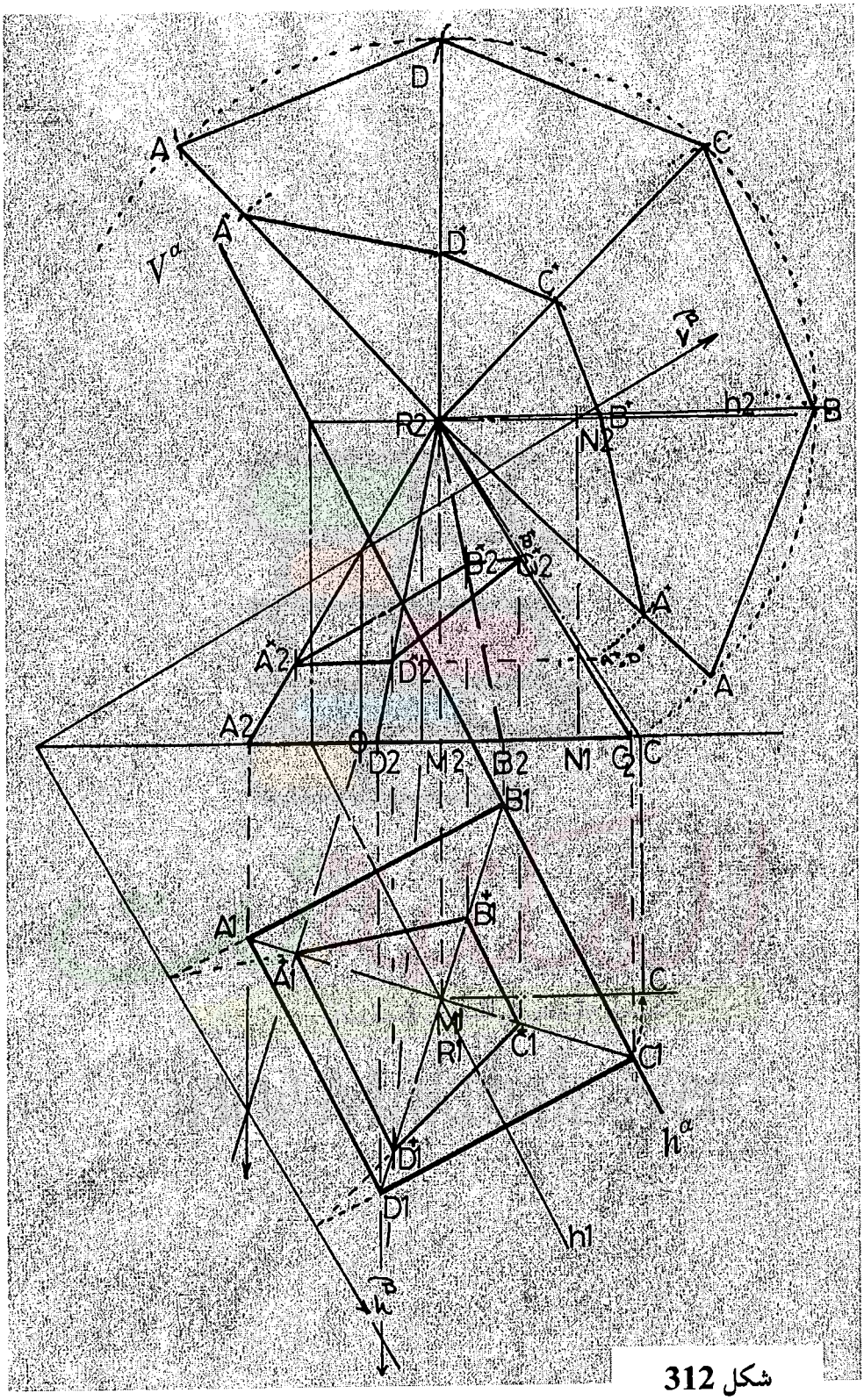
الحل: من شكل 312 قاعدتة المربع **ABCD** تقع فى المستوى الأفقى أى أنها بشكلها الحقيقى وخواص الهندسه المستويه فى $\pi_1$

1. وجهه الهرم وليكن **VBC** يقع فى المستوى $\alpha$ أى الضلع **BC** فى المستوى $\alpha$
2. من البند السابق فإن **BC** يقع فى $\alpha$ وفى المستوى الأفقى أى على خط تقاطعهما أى على الأثر الأفقى للمستوى $\alpha$ ، وعليه فإن الأثر الأفقى محل هندسى للضلع **BC**
3. من نقطة $A_1$ نسقط عمود على $h^\alpha$ نوجد $B_1$ ومن الطول المستنتج للضلع $A_1B_1$ نقيس مثله على $h^\alpha$ فنوجد $C_1$ ومن ثم نوجد $D_1$ وبهذا يكون إكتمل شكل القاعدة الرباعيه الواقعه فى المستوى الأفقى والذى يقع مسقطها الرأسى على خط الأرض.
4. من مركز المربع نجد أن الهرم القائم رأسه مسقطها الأفقى $R_1$ ينطبق على المركز $M_1$ وبالتالى نكون حصلنا على $R_1$ وهى رأس الهرم والتى تقع فى المستوى الذى يقع فيه وجهه الهرم $\alpha$
5. بإستخدام مستقيم أفقى يمرر داخل المستوى $\alpha$ نحصل على المسقط الرأسى للرأس $R_2$ وبهذا يكتمل شكل الهرم
6. إرسم المستوى $\beta$ من نقطة N ويجوز تمرير مستقيم أفقى أو وجهى يحمل إتجاهات هذا المستوى ونحصل على أثر ومنه نرسم أثار المستوى المطلوب. ولكن فى هذه الحاله النقطة N تقع فى المستوى الرأسى وفى $\beta$ وبالتالى فهى تقع على الأثر الرأسى للمستوى $\beta$ وعليه نرسم من المسقط الرأسى لنقطةN الأثر الرأسى للمستوى $\beta$ بزاويه ميل المستوى ومنه نرسم الأثر الأفقى للمستوى
7. بإستخدام التألف نأتى بمضلع التقاطع للمستوى $\beta$ مع الهرم ويمكن للقارىء أن يستخدم التقاطع المباشر لكل حرف مع المستوى وكذلك يمكن إستخدام الإسقاط المساعد بتحويل المستوى لخطى المسقط ومعه الهرم ونأتى بمضلع التقاطع فى الثلاثات ونعود به كما فى المثال القادم.

8. الإفراد يتم من خلال إيجاد الطول الحقيقى للأحرف وفى هذه الحاله الطول واحد لكل الأحرف وعليه يتم إيجـاد أحدهم وليكن $R_1C_1$ بإستخدام الدوران وكذلك الأطوال الحقيقيه من خط الأرض لنقاط مضلع التقاطع كمـا بالشكل 312 حيث نحصل على, $R_2B^+, R_2A^+, R_2C^+, R_2D^+$

9. من $R_2$ سواء داخل الرسم أو خارجه يتم توقيع الطول $R_2A_2$ ومنه يتم الإفراد تبعا لأساليب الإفراد بالأطوال الحقيقيه للأحرف ولمثيلاتها الخاصه بمضلع التقاطع

المكتبة نت
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net


D
A
C
A
D
C
$V^a$
$\vec{v}$
R2
N2
B
h2
B
B2
C2
A
A2
A
A2
D2
M2
B2
N1
C2
C
B1
A1
B1
A1
C
M1
R1
C1
C1
$h^a$
D1
D1
h1
h

شكل 312

**المعلوم المنشور الرباعى المائل الذى قاعدته المربع ABCD الواقعة فى المستوى الأفقى وأحرفه فى وضع عام حيث A(-2.5,3.5,5), A'(4.75,5.25,0), B(-3,0.75,5), B'(4.25,2.5,0) والمطلوب تعيين مضلع التقاطع للمنشور مع المستوى (-7,6,3.5) $\gamma$ وكذلك إفراد السطح الجانبى وقاعدتة المنشور مبينا مضلع التقاطع.**

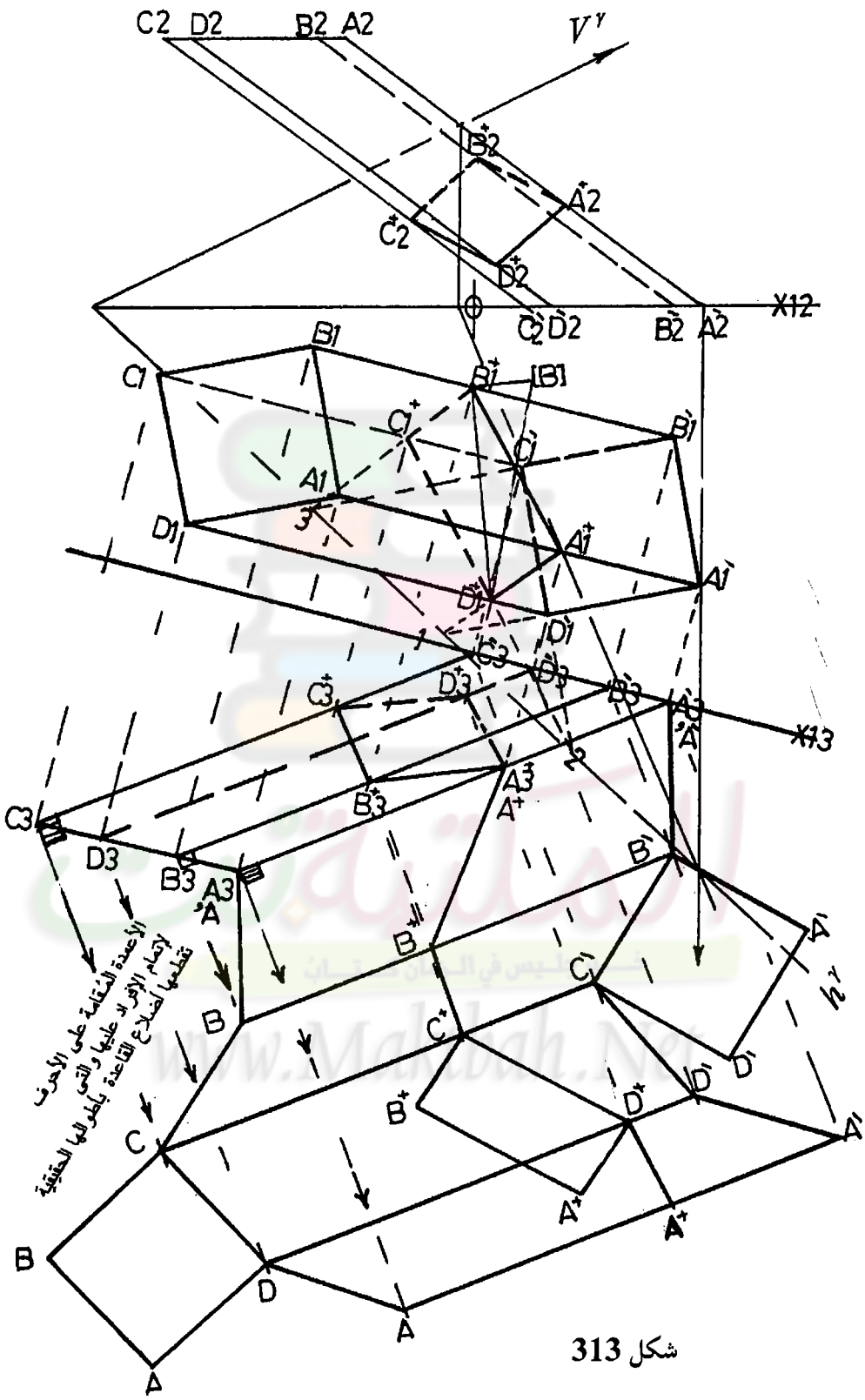
الحل: البيانات المعطاه فى شكل 313 ليس بها أى مشكلة لتمثيل المنشور. ولإيجاد مضلع التقاطع نستخدم هنا كنوع من التمرين التألف المركزى. نبحث أولا عن تقاطع أحد الأحرف مع المستوى بإستخدام الموضع كما حدث بالحرف 'AA فنحصل على $A_1^+$ ومن خلال عمليات التألف بالنقاط 1و2و3 الحادثة على محور التألف $h^\gamma$ نوجد كل من $B_1^+ C_1^+ D_1^+$ ثم بالتناظر على المستوى الرأسى نحصل على الأحرف على النقاط $A_2^+ B_2^+ C_2^+ D_2^+$ .

لإتمام الإفراد نحاول الحصول على الأطوال الحقيقية لجميع أحرف المنشور والقاعدة ومضلع التقاطع.

**<u>بالنسبة للقاعدة</u>:** موجودة فى المستوى الأفقى ، لذلك هى بأطوالها الحقيقة.

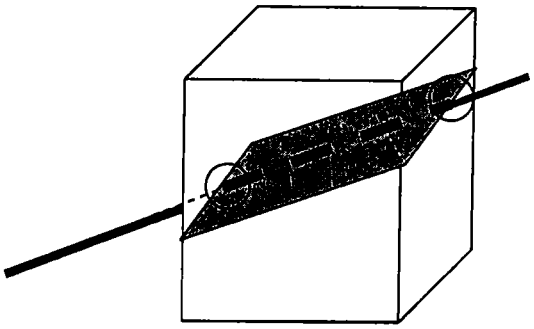
**<u>بالنسبة للأحرف</u>:**

1. نتيجة لأن الأحرف متوازية فإننا نستخدم الإسقاط المساعد برسم خط أرض $X_{13}$ موازى لأحد الأحرف فنحصل على الطول الحقيقى للأحرف وأوضاعها بالنسبة لبعض، ويمكن أن نكتفى بطول واحد لأى حرف ولكن نتيجة للإفراد المطلوب فإننا نأتى كما فى الشكل 313 بكل الأحرف لأن المنشور مائل فنحتاج أطوالها وموضعها.
2. نقيم أعمدة من كل الأحرف فى الثلاثات لتكون محل هندسى للوضع الحقيقى للأحرف فى الإفراد، حيث نبدأ الإفراد من $A_3A_3'$
3. نأخذ أطوال أضلاع القاعدة إبتداء من A فنأخذ طول ضلع القاعدة AB ونركز فى كل من $A_3'$, $A_3$ ونقطع الأعمدة الخارجة من كل من $B_3'$ , $B_3$ فنستنتج B, B' فى الإفراد وبنفس التسلسل نقطع الأعمدة الخارجة من $C_3$, $C_3'$ بطول ضلع القاعدة BC ، وهكذا حتى نصل إلى $A_3A_3'$ مرة أخرى.
4. بالنسبة لمضلع التقاطع فإن نقاطه تظهر من خلال إسقاط أعمدة مباشرة من النقاط فى الثلاثات على الأحرف بأوضاعها فنأتى بأصل النقاط على الأحرف فى الإفراد ثم نوقع على أى ضلع منهم الشكل الحقيقى لمضلع التقاطع.


C2 D2 B2 A2
V2
X12
X13
الأعمدة المتناهية على الأحرف
لإتمام الإفراد عليها والتي
تقطعها لضلع القاعدة بأطوالها الحقيقية

شكل 313

## إيجاد نقطة تقاطع مستقيم مع كثيرات السطوح



من شكل 314 نقطة تقاطع مستقيم مع كثيرات السطوح تأتى بأن نمرر بالمستقيم مستوى ، هـذا المستوى يقطع كثيرة السطوح فى مضلع ، هـذا المضلع يتقاطع مع المستقيم فى نقطتين هما نقطـتى تقاطع المستقيم مع كثيرة السطوح

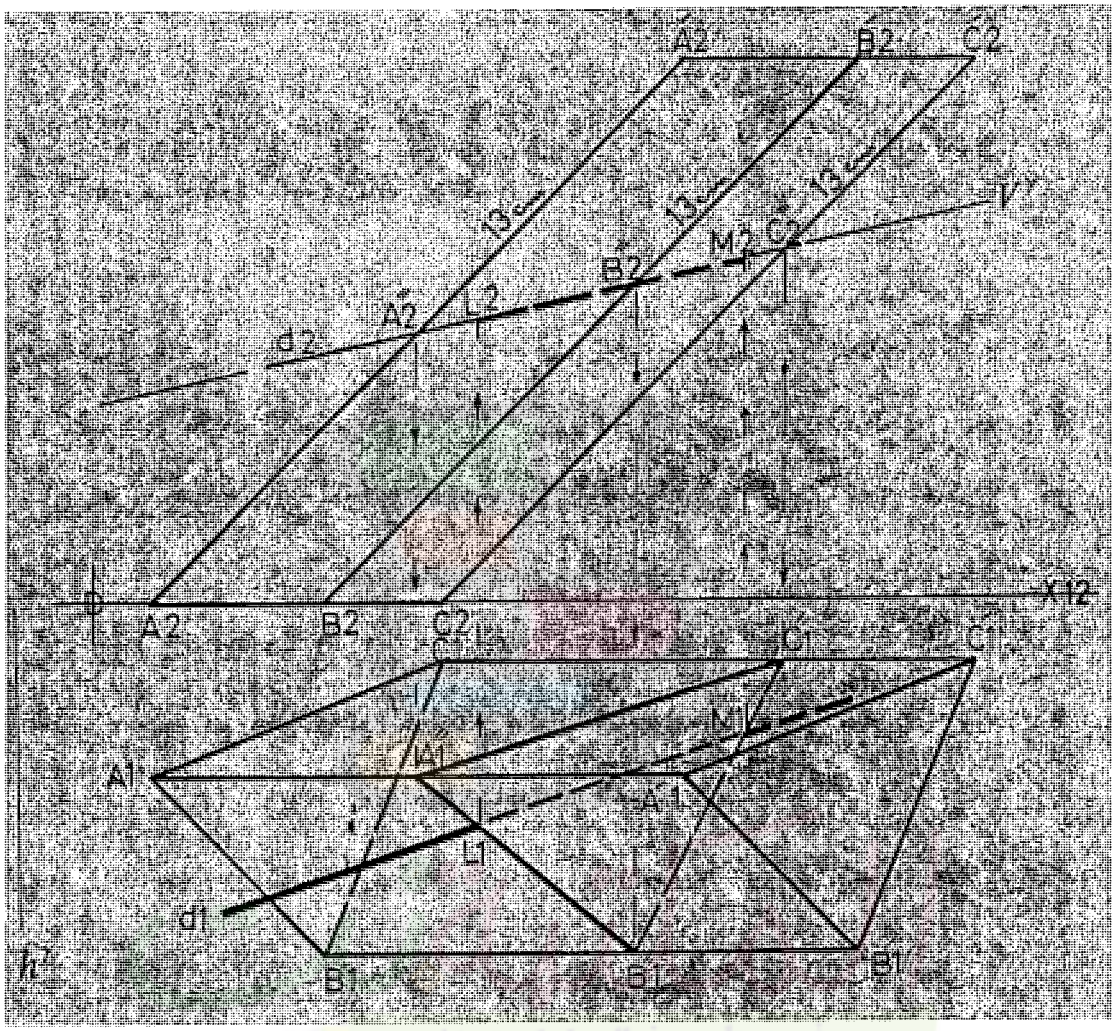
شكل 314

**مثل نقطتى تقاطع المستقيم [(10,3,5), (13,7,3)] d مع منشور قاعدته فى $\pi_1$ وهى المثلث A(1,3),B(4,6),C(6,1) وأحرفه تميل $45^0$ على $\pi_1$ وطولها 13cm.**

الحل:

1. نمرر بالمستقيم **d** مستوى عمودى $V^r$ على $\pi_2$ يتقاطع مع أحرف المنشور فى $A_2'',B_2'',C_2''$ ويكونوا مكونات مضلع التقاطع ولكن خطى المسقط لذلك مطلوب مسقط مضلع التقاطع فى المستوى الأفقى
2. نوجد المسقط الأفقى لمضلع التقاطع فيكون $A_1'',B_1'',C_1'$
3. نوجد نقطتى تقاطع المسقط الأفقى للمستقيم مع المسقط الأفقى لمضلع التقاطع فنجدهم $L_1$و$M_1$ فنوجد مساقطهم الرأسيه وهو المطلوب.

www.Maktbah.Net




شكل 315

www.Maktbah.Net

# تمارين

1-المعلوم المستوى (-2 ، ∞، 2) $\alpha$ ونقطة M(0,5,5) و المطلوب تمثيل المكعب الذى مركزه M وأحد أوجهه ABCD يقع في المستوى $\alpha$ بحيث كان الضلع يميل 30 على الاثر الأفقي للمستوى .

2- مثل منشور رباعي قائم إرتفاعه 6 سم وقاعدته ABCD وتقع في المستوى (0,135,60) $\beta$ حيث B(? ,4,2), A(?,2,1)

3- مثل منشور رباعي قائم إرتفاعة 8سم مركز إحدى قاعدتيه N(-3,4,4) محوره بالنقطة L(5,5,8,8) و النقطة K(0,8.5,5) تقع على أحد أحرفه .

4- مثل منشور ثلاثي قائم قاعدته مثلث متساوي الاضلاع ABC إرتفاعه 9 سم اذا علم الـرأس A(-5,7,4.5) وكان أحد أحرفه يقع على المستقيم (-4,2.5,1),(6,10.5,10)b.

5- مثل مكعب مركزه M(0,3.5,3) وأحد Hحرفة يقع المستقيم (0,5,7) , (3,2,4)b.

1- المعلوم مستقيمان شماليان متعامدان أحدهما [(-2.5,4,2.5) ، (0,6.5,8) ] و الأخر أفقـي ويمـر بالنقطـة L(4.5,2,3) ، مثل المكعب الذي يقع حرفان منه على هذين المستقيمين ( باستخدام الإسقاط المساعد) .

2- مثل هرم ثلاثي منتظم يقع أحد أوجهه ABC في المستوى (-6,6,5) $\alpha$ حيث A(-3,1,?), B(?,4,0.5)

3- مثل هرم ثلاثي منتظم رأسه A(-1,5,4) ووجهه BCDيقع في المستوى (-2,135,60) $\alpha$ و الضـلع CD يصنع 45 مع الأثر الأفقي للمستوى .

4- مثل هرم خماسي قائم V(2,5,5) وقاعدته تقع في المستوى (4,4,3) $\alpha$ وأحد أحرفه يمر بالنقطة N(-4,4,0)

5- مثل هرم رباعي قائم محوره ينطبق على المستقيم [(3.5,2.5,8.5), (-3.5,9,4)b] وأحد رؤوس القاعـدة A(1.5 ,10,4.5) وطول حرف الهرم يساوى 7سم .

6- مثل هرم سداسي قائم إرتفاعه 9 سم ومركز N(0,6,3) ومحور يمر بالنقطة K(4.5,3,6) وأحد احرفه يمـر بالنقطة L(0,3,4).

7- مثل ذو ثمانية أوجه منتظم إذا علم أن أربعة من رؤوس ABCD تقع في المستوى (5,5,4) $\alpha$ و الضـلع AB يصنع 30 مع الأثر الأفقي للمستوى وكانت الرأس الخامسة E(-4,1.5,1)

8- مثل ذو ثمانية اوجة منتظم اذا كان أحد أوجهة المثلث ABC يقع في المستوى (-5,5,6.5) $\alpha$ وكانت النقطتان A(3,5.5,?) ،B(?,2.5,0.5) رأسين من هذا الوجه .

9- مثل هرم رباعي قائم قاعدته واقعة في المستوى الأفقي ورأسة V(0,4,7) و النقطة K(-1,3.5,3.5) تقع على المستقيم المتوسط لأحد أوجهه . عين مضلع تقاطعة مع المستوى (? ، 60 ، 150) $\alpha$ المار بالنقطة K مع إفراد الجزء الأسفل من الهرم . أعد التمثيل للهرم ثم عين مضلع تقاطعه مع المستوى (3 ,∞ ,∞) $\alpha$

10-مثل هرم خماسي مائل رأسه V(0,1,6) وقاعدته الخماسية تقع في المستوى الأفقي مركزها M(-6,5,?) وأحد رؤوسها A(-6,2,?)ثم عين مضلع تقاطعة مع المستوى (-2.5 ،3.5،؟) $\alpha$ بحيث يبعد5.5سم رأس الهرم ثم أفراد السطع الجانبي للهرم مع مضلع التقاطع . أعد التمثيل للهرم ثم عين مضلع تقاطعه مع المستوى (∞,4,∞) $\alpha$

11-مثل هرم رباعي قائم قاعدته مربعABCD واقعة في المستوى الأفقي وأحد رؤوسها A(-2,3.5,?) وأحد أوجهه الهرم يقع في المستوى (4,-4,2) $\alpha$ أقطع الهرم بالمستوى (؟ ، 60 ،30) $\beta$ المار بالنقطة N(4,0,6)، إفرد الجزء السفلي من الهرم .

12-مثل هرم رباعي قائم إرتفاعه 6 سم علما بأن قاعدته مربعة واقعة في المستوى الأفقي $\pi_1$ ومركزها N(0,4.5,?) و النقطتان L(-1,3.5,3.5) , K(2,4,2.5) تقعان على وجهين متقابلين في الهرم . عين مضلع تقاطع الهرم مع المستوى $\alpha$ (10,5،∞)

13-مثل هرم رباعي قائم إرتفاعه 6 سم علما بأن قاعدته مربعة واقعة في المستوى الأفقي $\pi_1$ ومركزها N(0,4.5,?) و النقطتان L(-1,3.5,3.5) , K(2,4,2.5) تقعان على وجهين متقابلين في الهرم . عين مضلع تقاطع الهرم مع المستوى $\alpha$ (∞, 4,3)

14-مثل منشور رباعي مائل إرتفاعة 8 سم وقاعدته عبارة عن مربع واقع في المستوى الأفقي ومحوره وجهي ويصنع 135 مع الأفقي و النقطتان L (2,3,4.5) , K(- 2,5,3.5) واقعتان على حرفين متقابلين في المنشور . ثم إقطع المنشور بالمستوى $\alpha$ (7.5,8،∞)، مثل مسقطي مضلع التقاطع مع إفراد السطح الجانبي للمنشور مع مضلع لتقاطع

15-مثل منشور رباعي مائل إرتفاعة 8 سم وقاعدته عبارة عن مربع واقع في المستوى الأفقي ومحوره وجهي ويصنع 135 مع الأفقي و النقطتان L (2,3,4.5) , K(- 2,5,3.5) واقعتان على حرفين متقابلين في المنشور . ثم إقطع المنشور بالمستوى $\alpha$ (∞, 4,3)

16-مثل منشور رباعي قاعدته المربع ABCD ومحوره مستقيم وجهي يميل 150 علي الأفقي ومركز أحدي قاعدتيه M (-2.5,4,8) والنقطة L(0,1,5.5) تقع على أحد أحرفه وكان إرتفاع المنشور 10 سم ثم عين مضلع تقاطعه مع المستوى $\alpha$(3,3,-7)، ثم مثل إفراد السطح الجانبي للمنشور مع مضلع التقاطع . أعد التمثيل للمنشور ثم عين مضلع تقاطعه مع المستوى $\alpha$ (∞, 4,3)

www.Maktbah.Net

# الباب الثانى عشر

# نظريات الهندسة المستوية والفراغية

www.Maktbah.Net

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

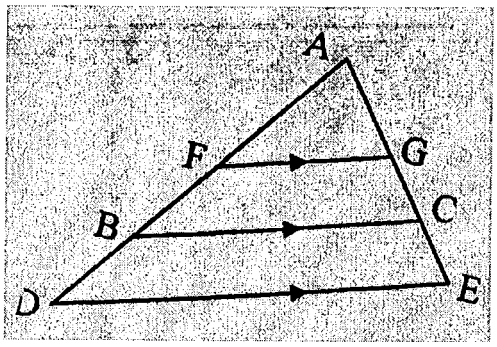
# بعض النظريـات والعمليات الهـامة في الهندسـة المستوية والفراغية

## نظرية (1)

أي مستقيم يرسم موازي لضلع من أضـلاع مثلـث يقسـم الضلعين الاخرين او امتدادهما إلى جزئين متناسبين .

كما هو مبين بالشكل316 ، ABC مثلـث والمسـتقيمان FG,DE يوازيان الضلع BC ولذلك فإن :

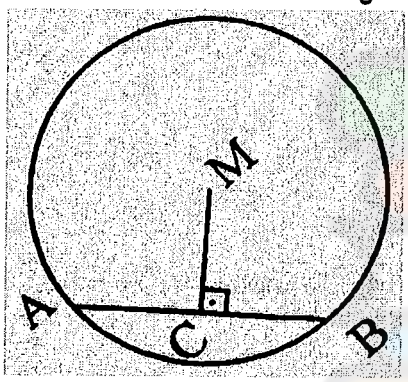
$$AF/FB = AG/GC = AD/DB = AE/EC$$




شكل 316

## نظرية ( 2 ) :

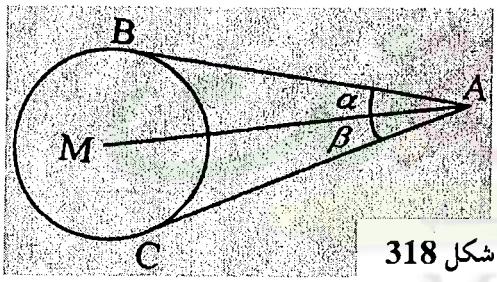
المستقيم الواصل من مركز الدائرة إلى منتصف وتر فيها يكون عموديا عليها كما هو مبين في الشكل 317 فإن نقطة C تقع في منتصـف الوتر AB ولذلك فإن المستقيم MC يكون عموديا على الوتر AB




شكل 317

## نظرية ( 3 ) :

المستقيم الواصل بين مركز دائرة ونقطة تلاقي مماسين لها فإنه ينصف الزاوية بينهما : المستقيمان AB,AC مماسين لدائرة مركزها M ولذلك فإن $\alpha=\beta$ . شكل 318



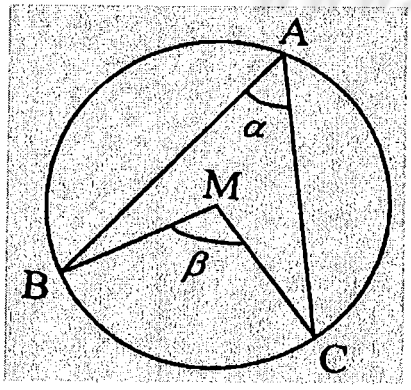

شكل 318

## نظرية ( 4 ) :

في أي دائرة شكل 319 ، الزاوية المركزية ضـعف الزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القـوس .

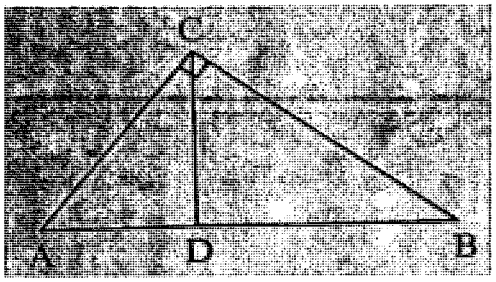
الزاوية المركزية β والزاوية المحيطية α مشتركان في القوس BDC لدائرة مركزها M ولذلك فـإن

$\beta=2\alpha$




شكل 319

**نظرية ( 5 ) :**

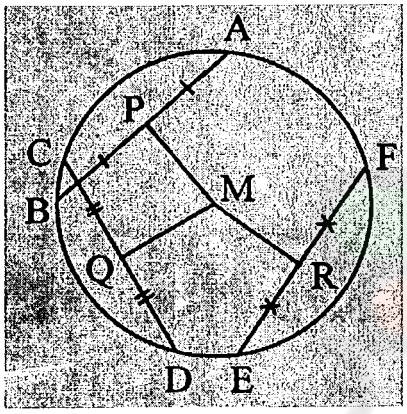



شكل 320

في المثلث القائم الزاوية إذا تم إسقاط عمود من رأس الزاوية القائمة على الوتر كان المثلثان الناتجان متشابهان ويشابهان المثلث الأصلي شكل 320. المثلث ABC مثلث قائم الزاوية في C وفيه CD عمودي على AB ولذلك تكون المثلثات BDC ، CDA ، BAC متشابهين ويكون :

$CB^2=BD.BA$ و $CD^2=DB.DA$

**نظرية ( 6 ) :**

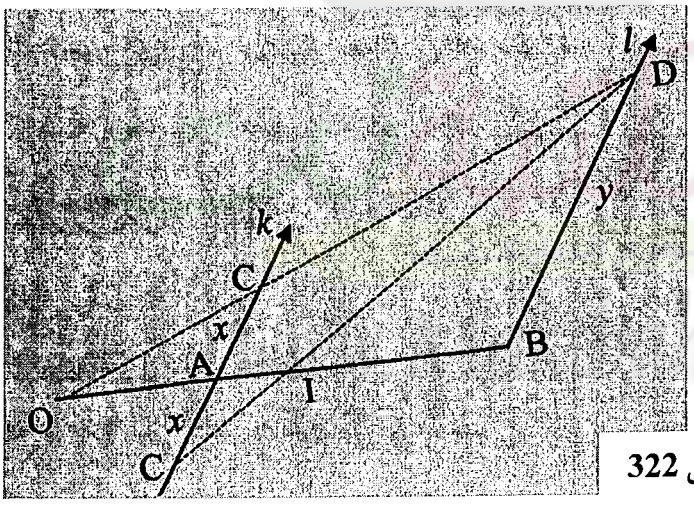



شكل 321

فى شكل 321 الأوتار المتساوية الطول داخل دائرة ، فإنها جميعا متساوية البعد عن مركز هذه الدائرة . EF,CD,AB أوتار داخل الدائرة التي مركزها M هذه الأوتار الثلاثة متساوية ، والنقط R,Q,P تنصف هذه الأوتار الثلاثة على الترتيب ولذلك فإن MP =MQ =MR .

**عملية رقم (1)**

تقسيم مستقيم AB بنسبة X إلى Y من الداخل: نرسم من نقطي A,B مستقيمين متوازيين اختياريين $k$ , $l$ .




شكل 322

– نرسم من نقطة A المستقيم x=AC في أي إتجاه .

– نرسم من نقطة B المستقيم BD =Y يوازي المستقيم X بحيث يكونا في إتجاهين مختلفين من المستقيم AB ثم نصل CD فيقطع AB في نقطة I فتكون هي نقطة التقسيم من الداخل شكل 322.

## عملية رقم (2)

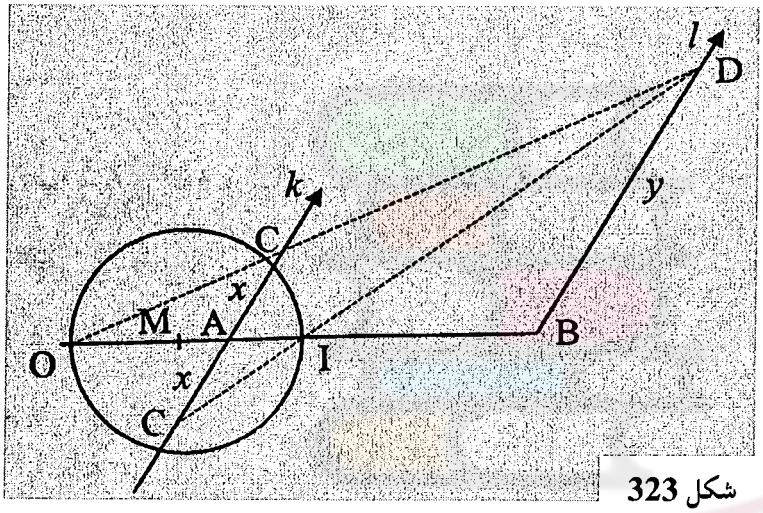
تقسيم مستقيم AB بنسبة X إلى Y من الخارج :

1- نرسم من نقطتي A,B مستقيمين متوازيين اختياريين $k$, $l$ . شكل 322

2- نرسم من نقطةA المستقيم x=AC في أي اتجاه . شكل 322

3- نرسم من نقطة B المستقيم Y= BD يوازي المستقيم X بحيث يكونا في اتجاهين مختلفين من المستقيمAB

ثم نصل CD فيقطع امتداد AB في نقطة O فتكون هي نقطة التقسيم . شكل 322




شكل 323

## عملية رقم ( 3 )

المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث يكون نسبة بعديها عن نقطتين ثابتتين A,B تساوي نسبة معلومة x إلى y ( x : y ) :

1- نعين نقطتي التقسيم من الداخل والخارج للمستقيم AB ولتكن I,O على الترتيب .

2- ننصف المستقيم OI في نقطة M .

3- نرسم الدائرة التي مركزها M ونصف قطرها يساوي المسافة OM فتاكون هي دائرة ابو لونيوس .

www.Maktbah.Net

## عملية رقم ( 4 )

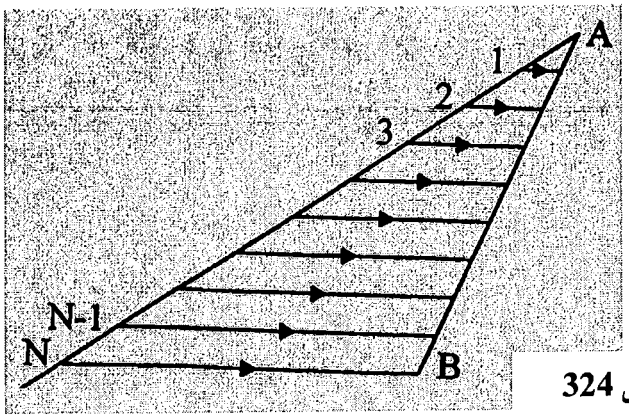
تقسيم جزء من مستقيم AB إلى عدد N من الاجزاء المتساوية .

1- نرسم من أحدى نهايتي المستقيم AB وليكن A مستقيما إختياريا بحيث يصنع مع المستقيم AB زاوية مناسبة .

2- نقيس على المستقيم عدد N من الأجزاء المتساوية الطول عند النقط 1,2,3 .....N,N-1

3- نصل أخر نقطة (N) بنقطة B .

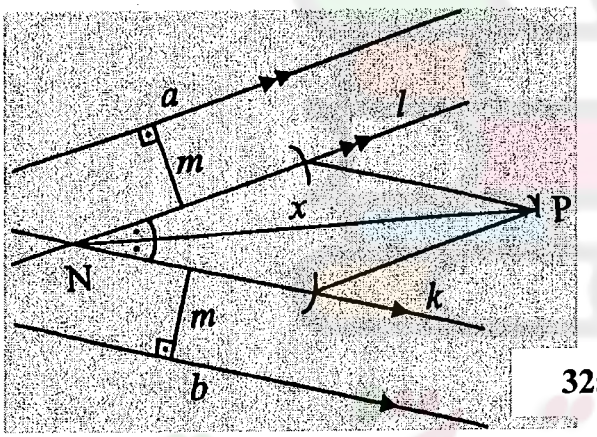
4- نرسم فى شكل 324 من النقط 1,2,3 .....N مستقيمات توازي المستقيم NB فتقطع المستقيم AB في (N-1) من النقاط التي تقسم المستقيم AB إلى عدد N من الأجزاء المتساوية.



شكل 324

## عملية رقم ( 5 )

رسم مستقيم x ينصف الزاوية المحصورة بين المستقيمان a,b حيث نقطة تلاقيهما خارج نطاق صفحة الرسم شكل 225.



شكل 325

1- نرسم مستقيم $l$ يوازي المستقيم a ويبعد عنه مسافة عمودية m .

2- نرسم مستقيم $k$ يوازي المستقيم b ويبعد عنه مسافة عمودية m .

يجب أن نراعى الأتى:

1- المستقيمان $l,k$ يقعا بين المستقيمين a, b .

2- إختيار المسافة m بحيث تسمح بتقاطع المستقيمين $l, k$ في النقطة N والتي تقع داخل حدود صفحة الرسم .

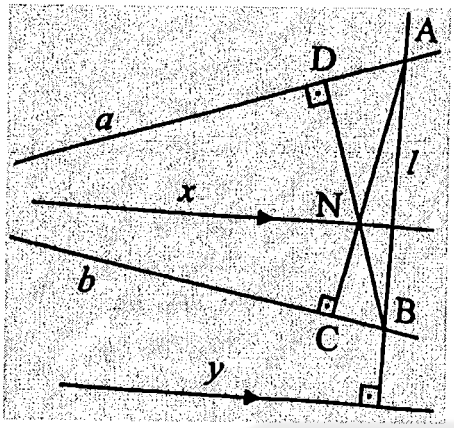
3- من نقطة N وبفتحة فرجار مناسبة نرسم قوس يقطع المستقيمين $l, k$ في نقطتين .

4- من النقطتين السابقين وبنفس الفتحة السابقة نرسم قوسين يتقاطعان في نقطة P .

5- نصل بين النقطتين N,P فيكونا المستقيم x المنصف للزاوية المحصورة بين المستقيمين a , b .

www.Maktabah.Net

## عملية رقم ( 6 )




شكل 326

رسم مستقيم x يوازي إتجاها معلوم y ويمر بنقطة تلاقي المستقيمان b, a حيث نقطة تلاقي المستقيمان خارج حدود الصفحة .

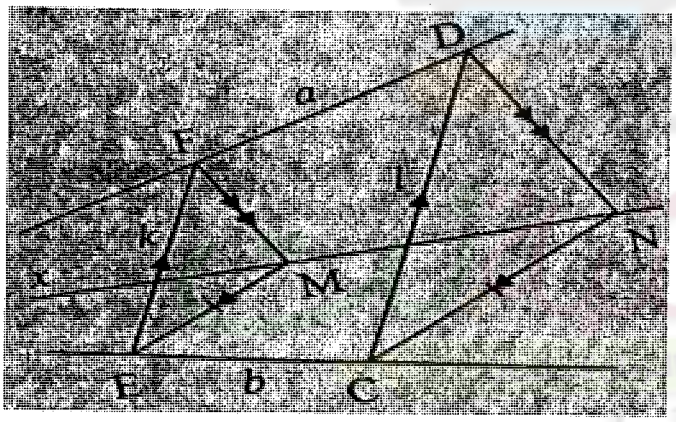
شكل 326

1- نرسم مستقيم إختياري l عمودي على الإتجاه المعلوم والمحدد بالمستقيم y فيقطع المستقيمان a, b في النقطتين A B على الترتيب .

2- نسقط من النقطتين A, B عمودين AC وBD على الترتيب فيتقاطعان في N .

3- نرسم من نقطة N المستقيم x الموازي للإتجاه المعلوم y فيكون هو المستقيم المطلوب .

## عملية رقم ( 7 )




شكل 327

رسم مستقيم x يمر بالنقطة N ويمر كذلك بنقطة تلاقي مستقيمان a , b حيث نقطة تلاقي المستقيمان خارج حدود الصفحة .

1- نرسم مستقيمين متوازيين اختياريين k , l يقطعا المستقيمين a ,b في النقط C ,D , E , F على الترتيب .

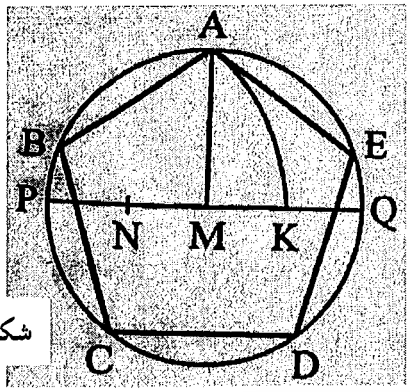
2- نصل المستقيمين NC, ND .

3- نرسم من النقطتين E , F مستقيمين يوازيان المستقيمان CN , DN فيتقاطعا في نقطة M .

4- نصل بين النقطتين M , N لايجاد المستقيم المطلوب .

## عملية رقم ( 8 )

رسم شكل خماسي منتظم بمعلومية مركزه M وأحد رؤوسه A .



شكل 328

1- نرسم دائرة مركزها M ونصف قطرها يساوي MA . شكل 328

2- نرسم من M مستقيما عموديا على MA فيقطع محيط الدائرة في النقطتين Q , P .

3- نصف MP في نقطة N ونرسم قوسا بنصف قطر يساوي الطول A ومركزه نقطة N فيقطع MQ في نقطة K .

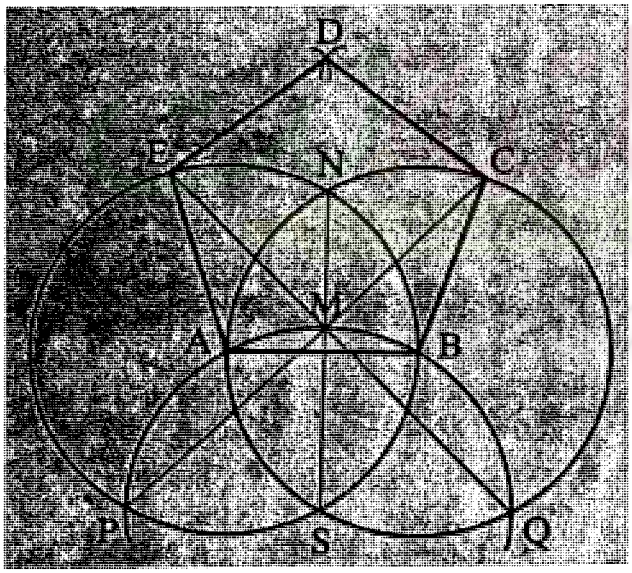
4- نقيس المسافة AK فتكون هي ضلع المخمس .

5- نرسم من A قوسا بنصف قطر يساوي طول ضلع المخمس فيقطع الدائرة في نقطة B ومنها نرسم قوسا أخر بطول ضلع المخمس فيقطع الدائرة في نقطة C وهكذا برسم أقواسا أخرى نحصل على النقط E , D .

6- نصل بين النقط E , D , C , B , A فنحصل على الشكل الخماسي المطلوب .

## عملية رقم ( 9 )

رسم خماسي منتظم بمعلومية أضلاعه AB



شكل 329

1- نرسم دائرتين مركزاهما A , B ونصف قطر كل منهما = المسافة AB فتتقاطع الدائرتين في S,N . شكل 329

2- نصل المستقيم SN .

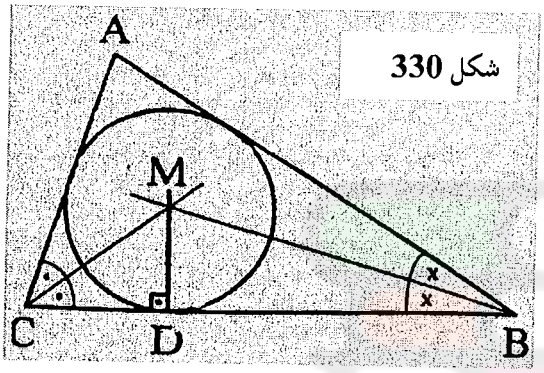
3- نرسم قوسا من دائرة بنفس القطر السابق ومركزها النقطة S فتقطع الدائرتان في النقطتين Q , P وكذلك تقطع المستقيم NS في نقطة M .

4- نصل المستقيم QM ونمده حتى يلاقي الدائرة التي مركزها A في نقطة E .

5- نصل المستقيم حة ونمده حتى يلاقي الدائرة التي مركزها B في نقطة C .

6- من النقطتين E , C نرسم قوسان بنفس فتحة الفرجار السابقة فيتقاطعا في نقطة D .

7- نصل EA , DE, CD , BC فنحصل على الشكل الخماسي المطلوب .



شكل 330

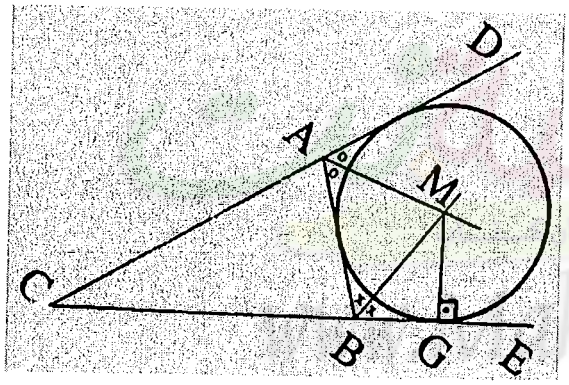
## عملية رقم ( 10 )

رسم دائرة تمس أحد أضلاع مثلث وتقع داخله

1- ننصف الزاوية A B C بمستقيم يتلاقى مع المستقيم المنصف للزاوية ABC في نقطة M .

2- نسقط عمود من نقطة M على الضلع CB فيقطعه في D . شكل 330

3- نرسم الدائرة التي مركزها M ونصف قطرها يساوي المسافة MD فتمس الثلاثة أضلاع من الداخل.



شكل 331

## عملية رقم ( 11 )

رسم دائرة تمس أحد أضلاع مثلث وتقع خارجه .

1- نمد المستقيم CA إلى نقطة مناسبة ولتكن نقطة D ثم نمد المستقيم CB إلى نقطة مناسبة اخرى ولتكن نقطة E . شكل 331

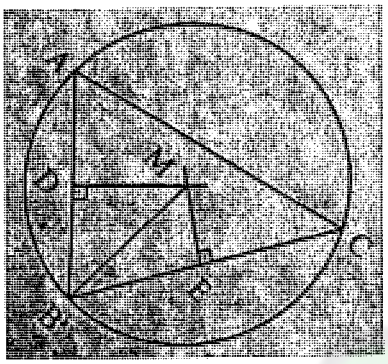
2- ننصف الزاوية DA B بمستقيم يتلاقى مع المستقيم المنصف للزاوية ABE في نقطة M .

3- نسقط عمود من نقطة M على الضلع EB فيقطعه في G .

4- نرسم الدائرة التي مركزها M ونصف قطرها يساوي المسافة MG فتمس الضلع AB وامتداد الضلع CA وامتداد الضلع CB .

**عملية رقم ( 12 )**

**رسم دائرة تمر برؤوس المثلث .**

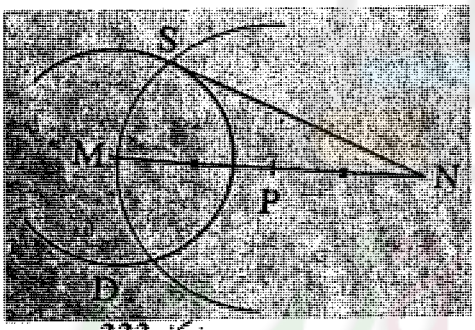


شكل 332

1- ننصف المستقيم AB في نقطة D ونقيم عمودا على المستقيم من نقطة D . شكل 332

2- ننصف المستقيم BC في نقطة E ونقيم عمودا على المستقيم من نقطة E فيتلاقى مع المستقيم السابق في نقطة M .

3- نصل نقطة M بنقطة B ثم نرسم دائرة مركزها M ونصف قطرها = طول المستقيم MB فتكون هي الدائرة المطلوبة .



شكل 333

**عملية رقم ( 13 )**

رسم مماس دقيق لدائرة مركزها M من نقطة خارجها N شكل 333

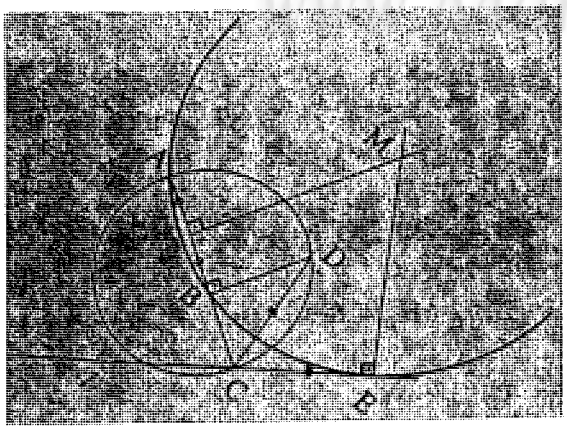
1- نصل النقطة M بالنقطة N ثم ننصف المستقيم MN في نقطة P .

2- نرسم من نقطة P قوس من دائرة نصف قطرها = PN فيقطع الدائرة السابقة في نقطة S .

3- نصل نقطة N بنقطة S فيكون المستقيم NS هو المماس المطلوب .

**عملية رقم ( 14 )**

رسم دائرة تمر بنقطتين معلومتين A , B وتمس مستقيما معلوما $l$ شكل 334



شكل 334

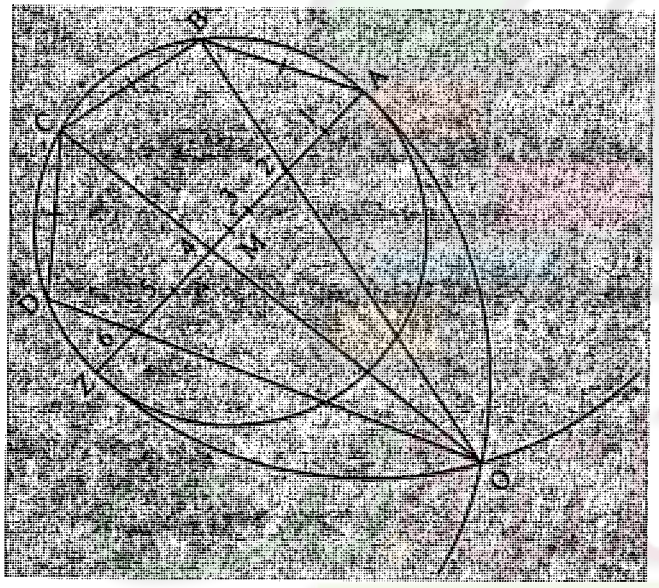
1. نمد المستقيم AB حتى المستقيم l في نقطة C

2. نجعل AC قطرا في الدائرة

3. نقيم عمودا من نقطة B على AC يقطع الدائرة في نقطة D .

4. نوقع E على المستقيم l بحيث يكون CD = CE وبذلك تكون نقطة E هي نقطة تماس الدائرة المطلوبة مع المستقيم l .

5. نقيم عمودا على المستقيم l من نقطة E نقيم عمودا على المستقيم AB من منتصفه ، فيتقاطع العمودين في نقطة M فتكون هي مركز الدائرة المطلوبة ونصف قطرها = الطول ME .



شكل 335

## عملية رقم ( 15 )

رسم أي مضلع منتظم بمعلومية مركزه M وأحد رؤوسه A . شكل 335

1- نرسم دائرة مركزها M وتمر بالنقطة A .

2- نُقسم القطر AZ إلى عدد من الأقسام يساوى عدد أضلاع المضلع

3- نرسم قوسين بفتحة فرجار تساوى AZ ومركزها النقطتين A,Z فيقطعا بعض فى O

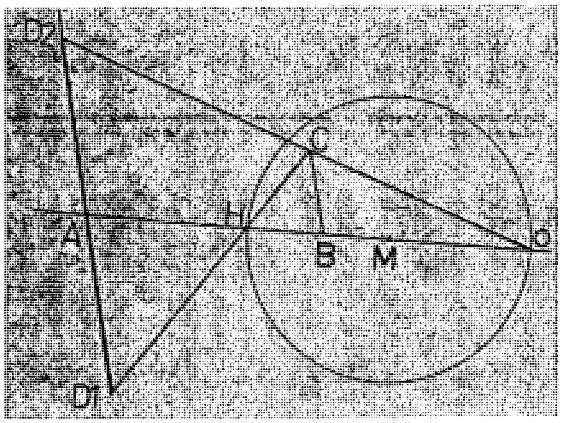
4- نصل النقطة 2 بالنقطةO حتى يقطع محيط الدائرة M فى B وهو طول ضلع المضلع

5- نتابع قطع الدائرة بهذا الطول

www.Maktbah.Net

## دائرة أبولو نيوس

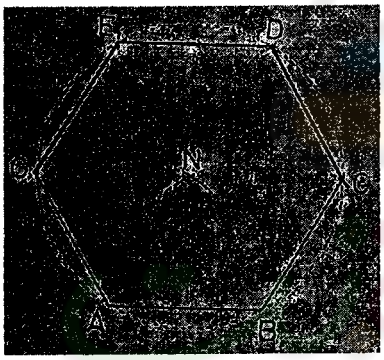
هي المحل الهندسي النقطة تتحرك بحيث تكون نسبة بعديها عن نقطتين ثابتتين A،B تساوي نسبة معلومة X ،Y. نقوم بتقسيم المسافة بين النقطتين من الداخل و الخارج فنحصل على نقطة التقسيم من الداخل و الخارج وهما O وH، ويكون OH عبارة عن قطر دائرة (دائرة ابولونيوس) ومركزها M وهي المحل الهندسي للنقطة المطلوبة.



شكل 336

## رسم المسدس المنتظم إذا علم أحد أضلاعة AB أو مركزة وأحد رؤوسة

- معلوم الضلع AB نركز في A، B بفتحة تساوى AB ونرسم قوسين يتقاطعان في N هي مركز دائرة المسدس، نرسم الدائره.
- بالطول AB نركز في B ونقطع محيط الدائرة على التوالي فنحصل على G،E،D،C .

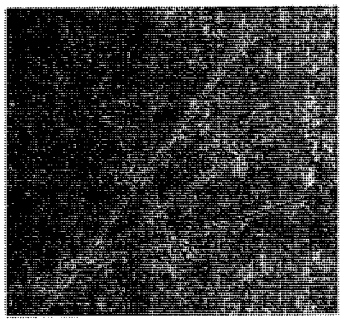


شكل 337

- واذا كان معلوم مركز المسدس وأحد رؤوسة نرسم دائرة من N بالمسافة بين المركز و الرأس ونقسمها بهذا الطول ابتداء من الرأس المعلومة فنحصل على باقي رؤوس المسدس .

## تنصيف الزاوية بين مستقيمين

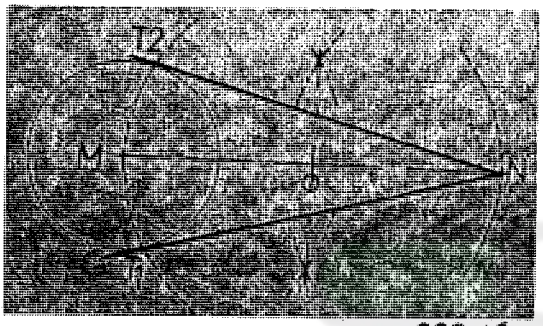
- يمكن عمل التنصيف من خلال فتحة برجل واحدة نركزها في O فتقطع المستقيمين في النقطتين A، B


شكل 338

– بنفس الفتحة او فتحة اخرى نركزها في كل من A وB ونرسم قوسين يتقاطعان في C .

– نصل OC فيكون هو المنصف للزاوية بين المستقيمين .

## رسم مستقيم يمس دائرة معلومة M من نقطة خارجها N



شكل 339

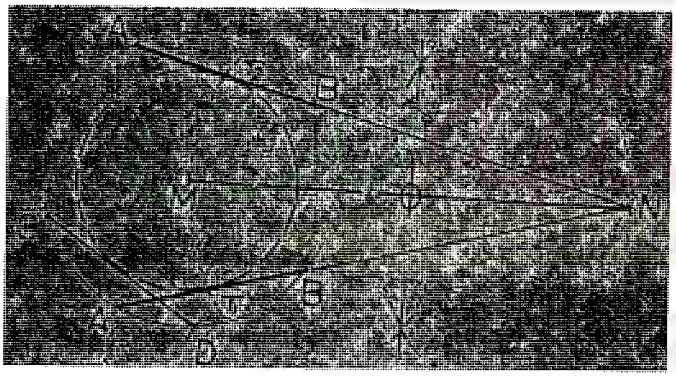
– ننصف المسافة بين M،N فنحصل على O

– من O نرسم دائرة بنصف القطر OM ويقطع الدائرة في T2،T1

– T2،T1 هما نقطتى التماس نصلهم بالنقطة N

–يكون NT2،NT1 هما المماسين من النقطة N للدائرة M.

## رسم قاطع يمر بنقطة معلومة N ويقطع الدائرة في وتر AB بطول L


شكل 340

– نختار أى نقطة C على الدائرة وبالطول L نركز في C ونقطع محيط الدائرة فيكون في D حيث L=CD

–من M نرسم دائرة تمس المستقيم CD

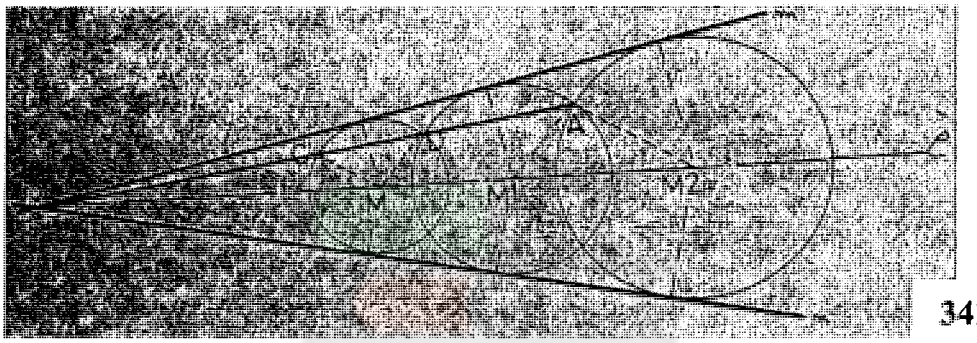
– ننصف بين M،N فنحصل على O

– من O نرسم دائرة OM فنحصل على T2،T1 نصلهم بN

وللتأكد من صحة الحل نجد أن AB الناتج يساوى L

## رسم دائرة تمس مستقيمين متقاطعين n ،m وتمر بالنقطة A

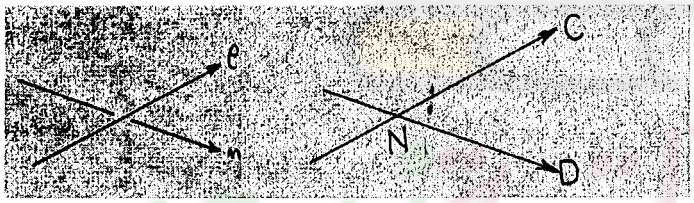
- ننصف الزاوية بين المستقيمين n ،m فنحصل على المستقيم المنصف l هو الحل الهندسي لأى دائرة تمس المستقيمين
- نرسم اى دائرة على المستقيم l من اى نقطة اختياريه عليه ولتكن M تمس المستقيمين
- نصل OA فتقطع الدائرة المرسومه من M في النقطتين D وC
- من نقطة A نرسم موازى ل MC و MD يقطعا l في مركزين M2،M1 هذا المحل الهندسي للدائرتين اللـذان




شكل 341

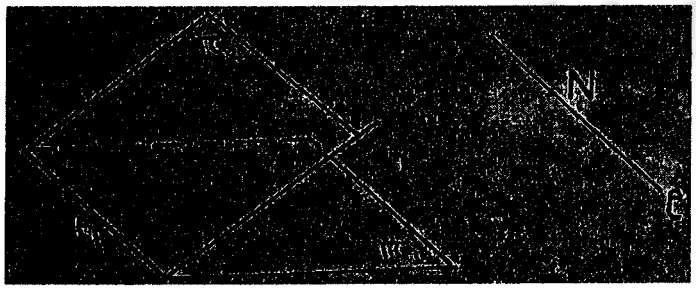
يمران بالنقطة A ويمسا المستقيمين m وn.

## رسم مستوى يمر بنقطة معلومة N ويوازى مستقيمين شماليين e،n




شكل 342

نرسم من النقطة N مستقيم يوازى l فيكون c. نرسم من النقطة N مستقيم يوازى n فيكون D. المستوى المكون من المستقيمين C ، D هو المستوى المطلوبة




شكل 343

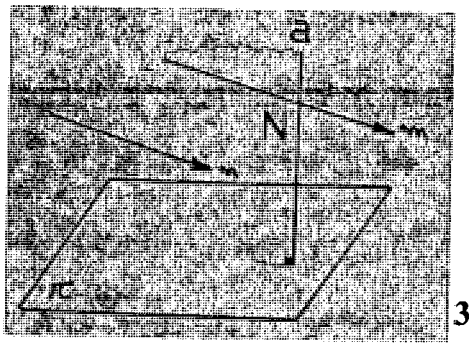
## رسم مستقيم من نقطة N يوازى مستويين معلومين $\pi_1, \pi_2$

نعين خط تقاطع المستويين $\pi_1, \pi_2$ فيكون هو $e_1$ . نرسم من النقطة Nمستقيم e موازى ل $e_1$ وهو المطلوب

## رسم مستوى يمر بنقطة N ويوازى إتجاه معلوم m وعمودى على المستوى $\pi$

فى الشكل 344 نرسم من N مستقيم m يـوازى الإتجاه المعلوم n

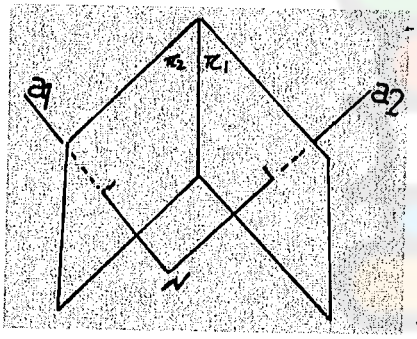
نرسم من Nمستقيم عمودى a علـى المسـتوى المعلوم$\pi$ المستوى المطلوب هو المستوى المكون من المستقيمين الموازى m و العمودى a .



شكل 344

## رسم مستوى يمر بنقطة N وعمودى على مستويين $\pi_1,\pi_2$

نرسم من N مسـتقيمين $a_1$و $a_2$ عمـوديين علـى $\pi_1,\pi_2$ المستوى المطلوب هو المكون من المسـتقيمين العموديين



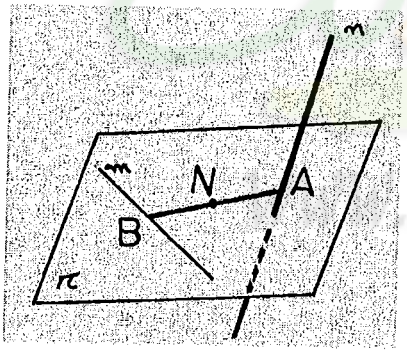
شكل 345

## رسم مستقيم يقطع مستقيمين شماليين m،n ويمر بنقطة معلومة N

كون من النقطة N و المستقيم m أحـد المسـتقيمين الشماليين مستوى $\pi$

نعين نقطة تقاطع المستقيم الأخر n مع هذا المسـتوى فيكون في A . نصل N،A ونمده فيقطع m في B

فيكون ANB هو القاطع للمستقيمين الشماليين

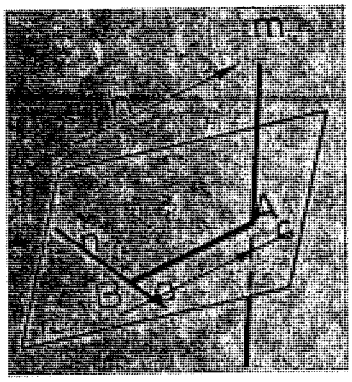


شكل 346

Maktbah.Net

## رسم مستقيم يقطع مستقيمين شماليين m،n و يوازى إتجاه معلوم h

من نقطة إختيارية على أحد المستقيمين وليكن n لختار نقطة مثل D ونرسم موازى للمستقيم h فيكون CD موازى ل h من على n . المستقيم n،CD يكونان المستوى $\pi$ ، نعين تقاطع المستقيم m مع المستوى $\pi$ فيكون A نقطة التقاطع من A نرسم موازى لCD فيكون AB حيث B تقاطعة مع n ، المستقيم AB هو المستقيم المطلوب



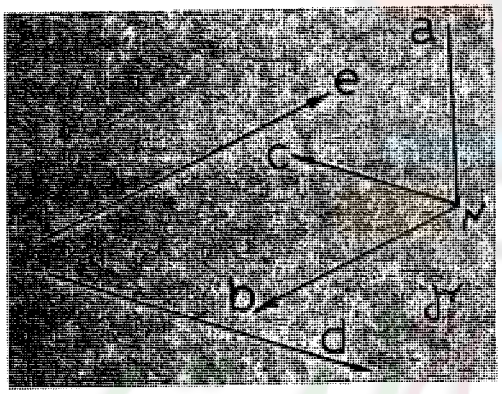
شكل 347

## تعيين أقصر قاطع للمستقيمين الشماليين m، n

الطريقة الأولى

لختار نقطة إختيارية مثل N ونرسم منها موازيان للمستقيمين e ،d الشماليين فنحصل على b ،c مكونات مستوى . نقيم عمودى على المستوى فيكون a هذا هو الإتجاه المطلوب .

تكرر خطوات البند السابق



شكل 348

### الطريقة الثانية

من نقطة اختيارية على المستقيم n يرسم المستقيم d الموازى للإتجاه m

المستقيمان المتقاطعان n ،d يكونان المستوى T

من نقطة إختيارية مثل x على m نسقط منها العمودى على المستوى $\pi$ فيتقاطع مع المستوى $\pi$ في Y

نرسم من Y مستقيم موازى للمستقيم d فيتقاطع مع n في B

نقيم من B المستقيم العمودى على $\pi$ فيتقاطع مع m في نقطة A فيكون AB أقصر بعد بين المستقيمين وعمودى عليهما

# نظريات

نظرية ( 1 ) كل مستويين يشتركان في نقطة يشتركان في مستقيم

نظرية ( 2 ) كل مستويان يشتركان في ثلاث نقط ليست على إستقامة واحدة ينطبق أحدهما على الأخر مهما امتدا

نظرية ( 3 ) يتعين المستوى

1- إما بثلاث نقط ليست على إستقامة واحدة

2- مستقيم ونقطة خارجة عنه .

3- مستقيمان متقاطعان .

4- مستقيمان متوازيان

نظرية (5) إذا توازى مستقيمان فإن أي مستوى يقابل أحد هما يقابل الثاني

نظرية (6) إذا توازى مستقيمان فكل مستوى مار بأحدهما إما أن يوازي الثاني أو يمر به

نظرية (7) إذا توازى مستويان فإن أي مستقيم يقطع أحدهما يقطع الثاني .

نظرية (8) المحل الهندسي لجميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة معلومة عليه هو مستوى عمودي على ذلك المستقيم .

نظرية (9) يتعين وضع المستوى بمستقيم عمودي عليه ونقطة يمر بها المستوى .

نظرية (10) إذا تعامد مستقيم على كل من مستقيمين متقاطعين في نقطة تقاطعهما كان عموديا على مستواهما .

نظرية (11) الزاوية المحصورة بين أي مستقيم مائل ومسقطه على المستوى أصغر من الزاوية المحصورة بين المائل وأي مستقيم اخر في المستوى مارا بموقع المائل .

نظرية (12) كل مستقيمين ليسا في مستوى وأحد يمكن أن يمد بينهما مستقيم عمودي على كل منهما ولا يمكن مد سواه ، وهذا المستقيم العمودي هو أقصر بعد بين المستقيمين ويعرف هذان المستقيمان بالمستقيمين الشماليين .

نظرية (13) كل مستقيمين ليسا في مستوى وأحد يمكن ان يمر بهما مستويان متوازيان

نظرية ( 14 ) كل مستوى مار بمستقيم عمودي على مستوى يكون عموديا على ذلك المستوى

نظرية ( 15 ) إذا كان كل من مستويين متقاطعين متعامدين على مستوى ثالث فخط تقاطعهما يكون عمودا على ذلك المستوى والزاوية الزوجية هي الزاوية بين مستتويين متقاطعين وتقاس بالزاوية المحصورة بين عمودين مقامين على خط تقاطع المستويين من أي نقطة عليه بحيث يكون أحد العمودين في مستوى الاخر .

نظرية (16) اذا مد مائل من نقطة خارج مستوى وكان عموديا على مستقيم في هذا المستوى فإن مسقط المائل على المستوى يكون عموديا على المستقيم .

نظرية (17) الزاوية القائمة تسقط عموديا على مستوى المسقط في زاوية قائمة اذا كان أحد اضلاعها يوازي مستوى المسقط

المحل الهندسي عبارة عن المسار الذي تصنعه عناصر الفراغ بحيث تحقق شروط هندسية معينة

## أولا : المستوى

1. المحل الهندسي لجميع النقط التي تبعد عن نقطة ثابتة M بعدا ثابتا h هو عبارة عن محيط دائرة مركزها M ونصف قطرها h.

2. المحل الهندسي لجميع النقط التي تبعد بعدا ثابتا h عن مستقيم معلوم هو عبارة عن مستقيمين m, n يواز يين المستقيم المعلوم l ويبعدان عنه بعدا يساوي h .

3. المحل الهندسي لجميع النقط التي على أبعاد متساوية من نقطتين ثابتتين A,B هو العمود المقام h من منتصف الخط الواصل بين النقطتين A,B من منتصفه.

4. المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن مستقيمين متوازيين k , l هو المستقيم h الموازي لهما ويقع في منتصف المسافة بينهما .

5. المحل الهندسي لجميع النقط التي على أبعاد متساوية عن مستقيمين متقاطعين k , l هو عبارة عن منتصف الزاويتين بين هذين المستقيمين حيث المستقيمين j , h هما المنصفين للزاويتين بين المستقيمين من الداخل والخارج

6. المحل الهندسي لرؤوس الزوايا التي مقدارها Φ بحيث تمر اضلاعها بنقطتين ثابتتين A,B هو عبارة عن قوس دائرة مرسومة على AB ويقابل الزاوية Φ واذا كانت تقابل زاوية قائمة فالمحل الهندسي عبارة عن محيط دائرة قطرها AB

7. إذا مررت أوتار في دائرة مركزها M بنقطة مثلA داخل الدائرة فإن المحل الهندسي لمنتصف هذه الأوتار هو محيط الدائرة المرسومة على A M مأخوذا قطرا لها .

8. المحل الهندسي لجميع النقط التي يرسم منها مماسات متساوية الطول لدائرة مركزها M ونصف قطرها هو البعد الواصل بين المركز وإحدى هذه النقط .

9. المحل الهندسي لنقطة تتحرك بشرط أن نسبة بعديها عن نقطتين A , B تساوي نسبة معلومة هو عبارة عن محيط دائرة قطرها المستقيم المحصور بين نقطتي تقسيم A , B من الداخل والخارج بنفس النسبة المعلومة وتسمى ( دائرة أبو لونيوس )

ثانيا : في الفراغ

1. المحل الهندسي لنقطة تتحرك في الفراغ وتبعد عن نقطة ثابتة M بعدا ثابتا h هو سطح كرة مركزها M ونصف قطرها h .

2. المحل الهندسي لجميع النقط الفراغية والتي بعدها h عن مستقيم معلوم هو سطح إسطوانة دائرية قائمة محورها المستقيم المعلوم ونصف قطرها h .

3. المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن نقطتين ثابتتين هو المستوى العمودي على A B من منتصفه .

4. المحل الهندسي للنقط التي تبعد مسافة h عن مستوى معلوم α هو مستويانβ,γ على جانبي المستوى α وكل منهما على بعد h منه .

5. المحل الهندسي لجميع النقط الفراغية والمتساوية البعد عن مستقيمين متوازيين هو عبارة عن المستوى العمودي على مستوى المستقيمين المعلومين والذي يمر بمنتصف المسافة بين المستقيمين .

6. المحل الهندسي لجميع النقط الفراغية والمتساوية البعد عن مستقيمين متقاطعين هو عبارة عن المستوي العمودي على مستوى المستقيمين المعلومين والذي يمر بمنتصف الزاوية بين المستقيمين .

7. المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن مستقيمين شماليين هو المستوى العمودي على اقصر قاطع لهما من منتصفه ولتوضيح ذلك نختار مستقيما m يقطع المستقيمان الشماليين k, l في نقطتي A,B ثم ننصف المسافة AB في نقطة C ونرسم منها مستقيمان p , q يوازيان المستقيمان k , l ويكونان المستوى α المطلوب .

8. المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن مستويين متوازيين هو مستوي يوازيهما ويقع في منتصف المسافة بينهما .

9. المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن مستويين متقاطعين $\beta$, $\alpha$ هو المستويان $\Phi$,$\psi$ المنصفان للزاوية الزوجية الواقعة بينهما والزاوية المكملة .

10. المحل الهندسي لجميع النقط الفراغية والتي نسبة بعديها عن نقطتين ثابتتين A ,B تساوي نسبة معلومة ثابتة x الى y هو عبارة عن سطح الكرة التي نهايتي اقطارها هما نقطتي التقسيم من الداخل I والخارج O بنفس النسبة وتعرف بكرة ابو لونيوس .

11. المحل الهندسي للنقط التي تتحرك بحيث نسبة بعديها عن مستقيمين متوازيين k , l تساوي نسبة ثابتة هو إسطوانة تعرف(بإسطوانة بأبو لونيوس )

12. المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن الثلاث نقط لا تقع على إستقامة واحدة هو العمود المقام على المستوى المتكون من الثلاث نقط من مركز الدائرة المار بهم .

13. المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن ثلاث مستقيمات متقاطعة في نقطة واحدة N هو مخروط دائري قائم تكون المستقيمات الثلاثة رواسم له .

14. المحل الهندسي للمستقيمات العمودية على مستقيم معلوم l من نقطة معلومة M هو المستوى $\alpha$ المار بالنقطة M عموديا على المستقيم l .

15. المحل الهندسي للمستقيمات التي تمر خلال نقطة معلومة M بحيث تميل بزاوية معلومة $\Phi$ على مستقيم k هو مخروط دائري قائم رأسه هي نقطة M ومحوره يوازي المستقيم l ومقداره نصف زاوية الرأس $\Phi$ .

16. المحل الهندسي لرؤوس الزوايا القائمة التي أضلاعها تمر بالنقطتين A , B عبارة عن سطح كرة قطرها A , B

17. المحل الهندسي لجميع النقط الفراغية والمتساوية البعد عن ثلاث نقط هو العمود المقام من مركز الدائرة التي تمر بالثلاث نقط على مستوى هذه الدائرة .

18. المحل الهندسي لجميع النقط الفراغية والمتساوية البعد عن ثلاث مستقيمات متوازية معلومة هو محور إسطوانة دائرية قائمة فيها الثلاث مستقيمات رو اسم للسطح .

## المـــــراجـــــــــع


1. Engineering Graphics Fundamentals Arvid R.Eide., Roland D.Jenison., Lane H. Mashaw., Larry L. Northup., C. Gordon Sanders., 1985
2. Descriptive Geometry, Louis Gary Lamit., prentice Hall., 1983

3- الهندسة الوصفية، أستاذ دكتور /محمد الرقباوى، عين شمس، 1979

4- الهندسة الوصفية، أستاذ دكتور /رامى طلعت ، 1983

5-الهندسة الوصفية، أستاذ دكتور /ألفريد بشارة، دار النهضة العربية، 1963

6-الهندسة الوصفية، أستاذ دكتور /محب عزيزعبد المسيح، منشأة المعارف،1980

7-الهندسة الوصفية، أعضاء هيئة التدريس، هندسة الإسكندرية 2004

8-الهندسة الوصفية، أستاذ دكتور /محمد عبد اللطيف جودة،ممدوح إبراهيم، عبد الحكم أيوب،1997

9-الهندسة الوصفية، أستاذ دكتور /وجيه ناعوم حنا، 1980

10-الهندسة الوصفية، أستاذ دكتور /محمد خليل بسيونى، د/محسن موسى، 2002

11-الهندسة الوصفية، أستاذ دكتور /محمود حسام الدين، د/حنفى هنداوى هندسة طنطا، 1995

12--الهندسة الوصفية، أستاذ دكتور /محمد عباس حمامه، هندسة البترول والتعدين، 2000

13-الهندسة الوصفية، دكتور مهندس /أيمن على عاشور، 2002

المكتبة
خير جليس في الزمان كتاب
www.Maktbah.Net

# الرسم الهندسى ( الإنشاء ) الهندسة الوصفية



إن علم الهندسة الوصفية هو من العلوم التى إعتمد عليها العالم فى ماضيه وحاضره وسيعتمد عليها فى مستقبله. وقد جاءت أهمية هذا العلم لما يقدمه للعالم من مساعدات تكون بمثابة حجر الزاوية فى الصناعة وتطورها. وتأتى الأهمية لهذا العلم فى أنه هو المحرك الأساسى والخطوة الأولى فى عمليات التصنيع وخاصة الهياكل العامة لجميع المنتجات التى يتم إنتاجها فى الأسواق والتى تختلف أشكالها من منتج لأخر. فإنتاج رفرف سيارة أو سقف أو أبواب أو هيكل طائرة من الصاج أو من المعادن الأخرى الموجودة فى صورة ألواح أو منتجات بلاستيكية ذات هياكل دائرية أو حلزونية أو أى أشكال هندسية يستلزم معرفة أصل هذا الشكل الحقيقى على الأوراق حتى يتم تقطيعه على ألواح المعادن والتى بدورها يتم عمل إسطمبات للأشكال المطلوب إنتاجها ومن ثم تشكيل الألواح المعدنية على الشكل المطلوب، ويتم وضع فى إفراد الأشكال النسب الموجودة للتشغيل والتشكيل والتى يتم عمل حساباتها أثناء إفراد الشكل.وأيضا فى التقاطعات بين الأشكال الهندسية فى المنتجات يتم تحديد شكل التقاطع وإفراده وعمل العمليات المطلوبة له حتى يتثنى أخذها فى الإعتبار. و لذا ظهرت الأهمية القصوى لهذا العلم كأساس للصناعة. وكذلك ظهرت التطبيقاتفى الهندسة المدنية فى رسم الخرائط وتحديد الخطوط والحفر والردم ورسم الخرائط الجوية و بعض الهياكل المدنية فى التشكيلات الخرسانية للأشكال الخاصة. ومن عمل بهذا العلم فى التخصصات الأخرى لم يعطه حقه فى الوصف والتحليل وإيضاح الفائدة منه. لذا عكفنا على إعداد هذا الكتاب كجزء أول بالإسلوب الذى يتفاعل مع ذهن الطالب مباشرة دون إرهاقه فى سرد النظريات العلمية دون فهم مرجعيتها وكذلك وضعنا فيه الأسرار التى بين السطور وإجتهدنا لنعلم الطالب الإسم الذى أطلقناه على هذا العلم وهو " علم الكلام وتفسير الأحلام" والذى أطلقناه ليعلم الطالب أن هذا العلم الأساس فيه وصف الكلام وليس الأرقام التى تلفت إنتباهه ويترك التركيز فى وصف الموضوع. والجزء الثانى يتطرق لمعظم التطبيقات العملية والصناعية التى تعتمد على هذا العلم .

المؤلف

مكتبة الأنجلو المصرية
THE ANGLO-EGYPTIAN BOOKSHOP
The World of Words & Thoughts